Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 1: Σήματα Διακριτού Χρόνου

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Εισαγωγή
- Διαφορές Αναλογικής – Ψηφιακής Επεξεργασίας
- Παραγωγή Ψηφιακών Σημάτων
- Θεμελιώδη Σήματα Διακριτού Χρόνου (ΣΔΧ)
- Περιοδικά ΣΔΧ
- Συμμετρικά ΣΔΧ
- Η Έννοια της Συχνότητας σε ένα ΣΔΧ

Σήματα και Συστήματα

Σήμα: οποιαδήποτε φυσική ποσότητα που μεταβάλλεται με το χρόνο, το χώρο και οποιαδήποτε άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή, π.χ.

$$x_1(t) = 5t, \qquad x_2(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i(t)\sin[2\pi F_i(t) + \theta_i(t)]$$

Σύστημα: μία οντότητα που πραγματοποιεί μία λειτουργία (μετατροπή) σε ένα σήμα εισόδου και παράγει ένα (ή περισσότερα) σήματα εξόδου.

Διαφορές Αναλογικής – Ψηφιακής Επεξεργασίας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος:

- Ευελιξία στη σχεδίαση
- Προβλεπόμενη ακρίβεια
- Ομοιογένεια στην απόδοση προϊόντων ίδιου τύπου
- Μειωμένο κόστος υλοποίησης, αξιοπιστία
- Υλοποίηση πολύπλοκων αλγορίθμων
- Δυνατότητα αποθήκευσης σε μαγνητικά μέσα

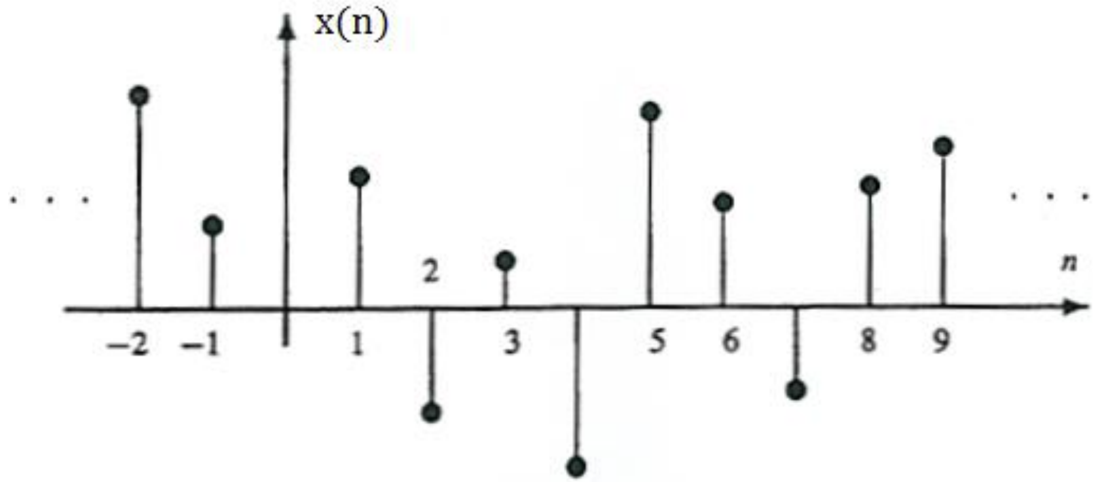
Αναλογική επεξεργασία σήματος:

- Επικοινωνία των ψηφιακών συστημάτων με το αναλογικό περιβάλλον
- Εφαρμογές υψηλών συχνοτήτων

Σήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα **σήμα διακριτού χρόνου** (ΣΔΧ) $x(n)$ είναι μία ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Η ανεξάρτητη μεταβλητή n αναπαριστά (συνήθως) τον χρόνο και παίρνει μόνο ακέραιες τιμές.

Ένα ΣΔΧ δεν ορίζεται για μη ακέραιες τιμές του n.



Γραφική παράσταση σήματος διακριτού χρόνου

Συμβολισμός ΣΔΧ σε μορφή **διανύσματος** $\boldsymbol{x} = [x(0), x(1), \ldots, x(N-1)]^T$

Παραγωγή Ψηφιακού Σήματος

Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό

Το ΣΔΧ $x(n)$ συνήθως παράγεται με τη βοήθεια ενός Μετρατροπέα Αναλογικού σε Ψηφιακό (Digital-to-Analog-Converter).

Στη διαδικασία αυτή, ένα σήμα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ) $x_a(t)$ υπόκειται σε **δειγματοληψία** με ρυθμό $f_s = 1/T_s$ δείγματα/sec και παράγεται το ΣΔΧ $x(n)$.

Η διαδικασία περιγράφεται από τη σχέση:

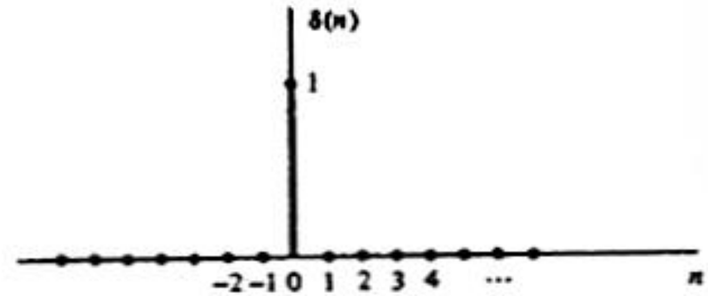
$$x(n) = x_a(nT_s)$$

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις ΣΔΧ που παράγονται πρωτογενώς σε διακριτή μορφή, π.χ. η τιμή μίας μετοχής σε διαδοχικές ημέρες, στατιστικά στοιχεία πληθυσμού μίας πόλης, κλπ.

Θεμελιώδη Σήματα Διακριτού Χρόνου

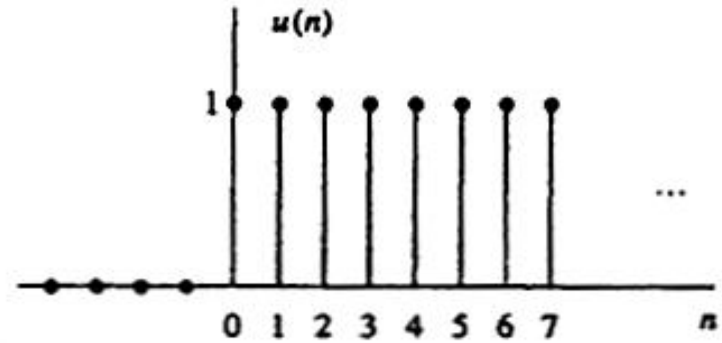
Μοναδιαία κρουστική: $\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

(unit impulse)



Μοναδιαίο βήμα: $u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

(unit step)



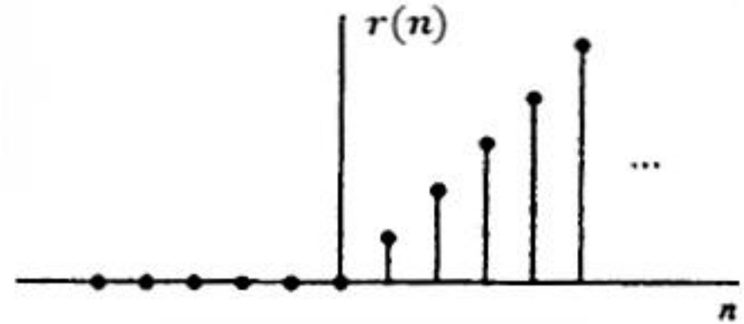
Οι $\delta(n)$και $u(n)$ συνδέονται μέσω:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \text{ και}$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

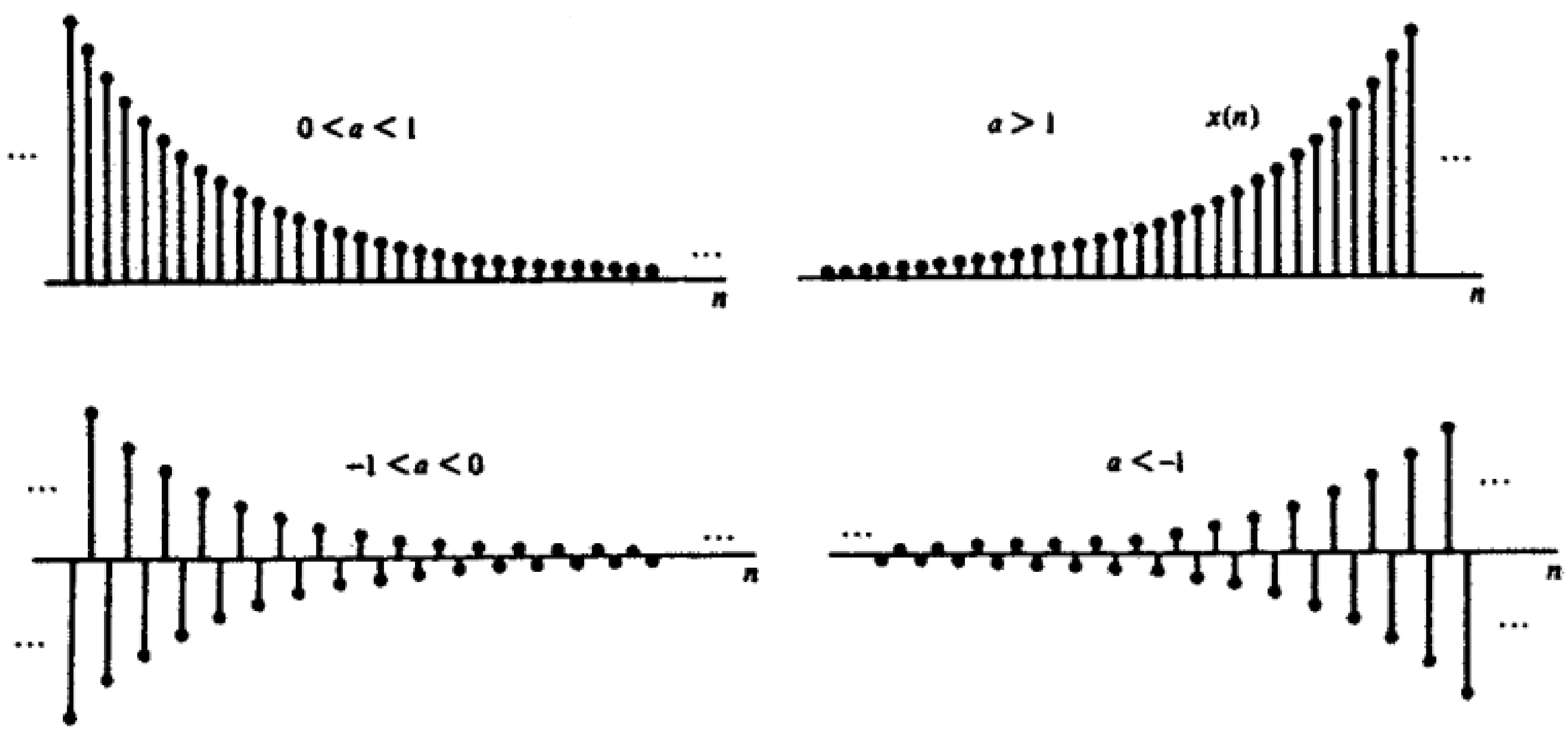
Μοναδιαία κλίση (ράμπα): $r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

(unit ramp)



Θεμελιώδη Σήματα Διακριτού Χρόνου

Πραγματική εκθετική ακολουθία: $x(n) = \alpha^n$, όπου $\alpha \in \mathrm{R}$



Μορφές της ακολουθίας $x(n) = \alpha^n$ για διάφορες τιμές του α.

Συνοπτικά Στοιχεία Μιγαδικής Ανάλυσης

Μια μιγαδική ακολουθία $x(n)$ μπορεί να εκφραστεί σε **καρτεσιανή μορφή**, δηλ. σε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$a(n) + jb(n) = Re\{x(n)\} + j\ Im\{x(n)\}$$

ή σε **πολική μορφή**, δηλ. σε πλάτος (μέτρο) και φάση:

$$x(n) = |x(n)|\ e^{j\ arg\{x(n)\}}$$

Συνάρτηση πλάτους :

$$|x(n)| = \sqrt{Re^2\{x(n)\} + Im^2\{x(n)\}}$$

Συνάρτηση φάσης :

$$\arg\{x(n)\} = \tan^{-1}\frac{Im\{x(n)\}}{Re\{x(n)\}}$$

Συζυγής Μιγαδικός $x^*(n)$:

$$x^*(n) = Re\{x(n)\} - j\ Im\{x(n)\} = |x(n)|\ e^{-j\ arg\{x(n)\}}$$

Θεμελιώδη Σήματα Διακριτού Χρόνου

Μιγαδική εκθετική ακολουθία: $x(n) = a^n$, όπου $\alpha \in$ C.

Θέτοντας $\alpha = re^{j\omega_0}$ έχουμε:

$$x(n) = r^n e^{jn\omega_0} = r^n[\cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)]$$

<u>Καρτεσιανή Μορφή</u>:

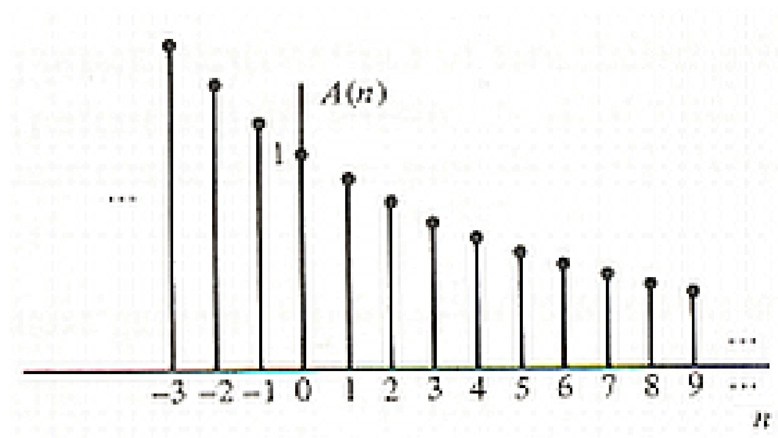
- Πραγματικό μέρος: $x_R(n) = r^n\, cos(n\omega_0)$
- Φανταστικό μέρος: $x_I(n) = r^n\; sin(n\omega_0)$

<u>Πολική Μορφή</u>:

- Μέτρο : $|x(n)| = \mathrm{A(n)} = r^n$
- Φάση: $< x(n) = \varphi(n) = n\omega_0$

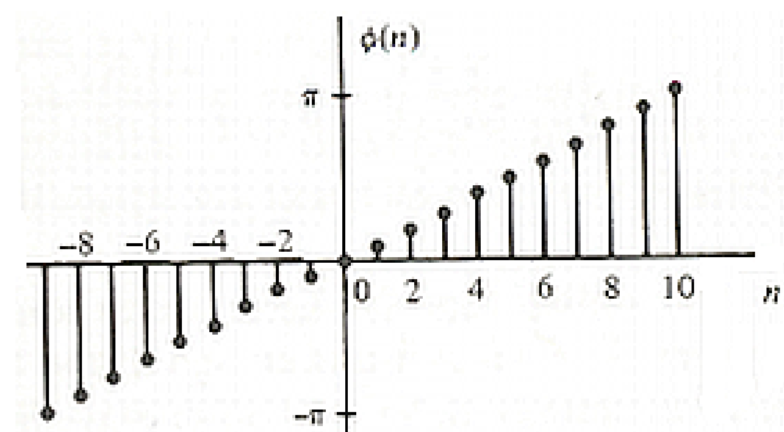
Θεμελιώδη Σήματα Διακριτού Χρόνου

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί το μέτρο και η φάση του παρακάτω μιγαδικού σήματος:



$$x(n) = (0{,}9)^n[\cos\frac{\pi n}{10} + j\sin\frac{\pi n}{10}]$$

- Μέτρο $\quad r^n = A(n) = (0{,}9)^n$



- Φάση $\quad \varphi(n) = \frac{\pi}{10}n$

Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

Όταν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός N, ώστε για κάθε τιμή του n να ικανοποιείται η σχέση $x(n) = x(n + N)$, το ΣΔΧ $x(n)$ καλείται **περιοδικό**, διαφορετικά καλείται **μη-περιοδικό** ή **απεριοδικό**. Το N ονομάζεται **θεμελιώδης περίοδος**.

Η περιοδική ακολουθία $x(n)$ με περίοδο N επαναλαμβάνει τον εαυτό της κάθε φορά που θα εμφανιστούν N δείγματα. Ένα περιοδικό ΣΔΧ με περίοδο N, είναι περιοδικό και με περίοδο $2N$, $3N$ και γενικά με κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του N.

Αν $x_1(n)$ και $x_2(n)$ περιοδικά ΣΔΧ με περιόδους N_1 και N_2, αντίστοιχα, τότε :

- Το ΣΔΧ $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο $N = \frac{N_1 N_2}{\mathrm{MK\Delta}(\mathrm{N_1},\mathrm{N_2})}$

- Το ΣΔΧ $z(n) = x_1(n)\, x_2(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N

Περιοδικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

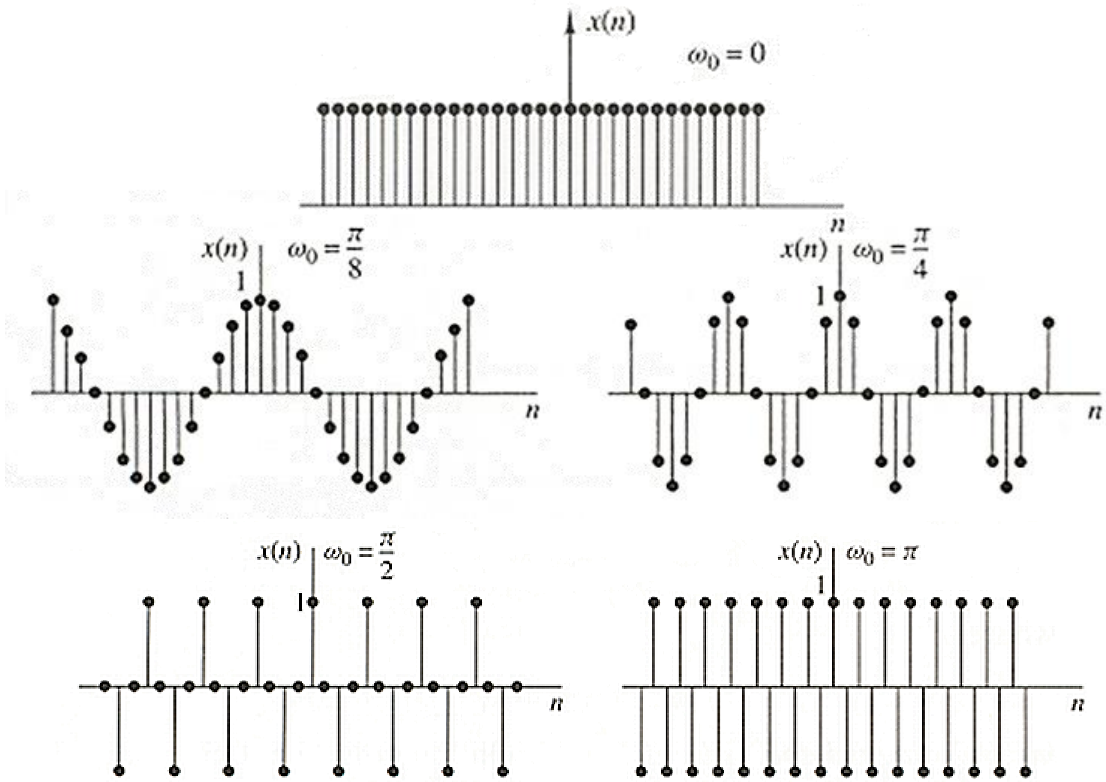
Από μία οποιαδήποτε ακολουθία $x(n)$ μπορούμε πάντα να δημιουργήσουμε ένα **περιοδικό σήμα** $y(n)$ με περίοδο Ν, επαναλαμβάνοντας το $x(n)$ ως εξής:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n - kN)$$

Η έννοια της συχνότητας σε ΣΔΧ

Ημιτονικά Σήματα: $x(n) = A\,cos(\omega_0 n + \theta), \quad -\infty < n < \infty$ και $\omega_0 = 2\pi f_0$

Περιοδικότητα μεταξύ δύο ΣΔΧ υπάρχει μόνο όταν η συχνότητα εμφανίζεται ως <u>λόγος δύο ακεραίων αριθμών</u> ($f = k/N$, όπου το N ονομάζεται περίοδος).



Το σήμα $x(n) = cos(\omega_0 n)$ για διάφορες τιμές του ω_0

Άσκηση 1

Διερευνήστε αν το παρακάτω σήμα είναι περιοδικό και σε θετική περίπτωση να προσδιορίσετε τη θεμελιώδη περίοδό του.

$$x(n) = cos(0.125\pi n)$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή $0.125\,\pi = \frac{\pi}{8}$ και ισχύει:

$$cos\left(\frac{\pi}{8}n\right) = cos\left(\frac{\pi}{8}(n+16)\right)$$

Άρα το $x(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο $N = 16$.

Άσκηση 2

Διερευνήστε αν το παρακάτω σήμα είναι περιοδικό και σε θετική περίπτωση να προσδιορίσετε τη θεμελιώδη περίοδό του.

$$x(n) = Re\left\{e^{\frac{jn\pi}{12}}\right\} + Im\left\{e^{\frac{jn\pi}{18}}\right\}$$

<u>Απάντηση</u>: Το $x(n)$ είναι το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων:

$$x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{18}\right)$$

Οι περίοδοι είναι $N_1 = 24$ και $N_2 = 36,$ αντίστοιχα.

Συνεπώς, η περίοδος του αθροίσματος, δηλ. του $x(n)$ είναι:

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)} = \frac{24\,.\,36}{\text{ΜΚΔ}(24{,}36)} = \frac{864}{12} = 72$$

Άσκηση 3

Διερευνήστε αν το παρακάτω σήμα είναι περιοδικό και σε θετική περίπτωση να προσδιορίσετε τη θεμελιώδη περίοδό του.

$$x(n) = sin(\pi + 0.2\, n)$$

<u>**Απάντηση**</u>: Για να είναι περιοδικό το $x_1(n)$ πρέπει να βρεθεί μία τιμή N, τέτοια ώστε $sin(\pi + 0.2\, n) = sin(\pi + 0.2\, (n + N))$.

Η συνάρτηση $sin(\ )$ είναι περιοδική με περίοδο 2π.

Η ποσότητα $0.2N$ πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Όμως ο π είναι άρρητος αριθμός, άρα δεν υπάρχει καμία ακέραια τιμή του N ώστε να επαληθεύεται η ισότητα.

Άρα, το $x(n)$ είναι μη-περιοδικό.

Άσκηση 4

Διερευνήστε αν το παρακάτω σήμα είναι περιοδικό και σε θετική περίπτωση να προσδιορίσετε τη θεμελιώδη περίοδό του.

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{16}n} cos\left(\frac{n\pi}{17}\right)$$

<u>Απάντηση</u>: Το δοθέν σήμα $x(n)$ είναι γινόμενο δύο επιμέρους ακολουθιών.

Και οι δύο ακολουθίες $e^{j\frac{\pi}{16}n}$ και $cos\left(\frac{n\pi}{17}\right)$ είναι περιοδικές, με περιόδους $N_1 = 32$ και $N_2 = 34$, αντίστοιχα.

Άρα και το γινόμενο $x(n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N:

$$N = \frac{32\,.\,34}{\text{ΜΚΔ}(32, 34)} = \frac{1.088}{2} = 544$$

Συμμετρικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

Συμμετρικά ΣΔΧ:

<u>Άρτιο ή συμμετρικό</u> $x(n) = x(-n), \forall n$

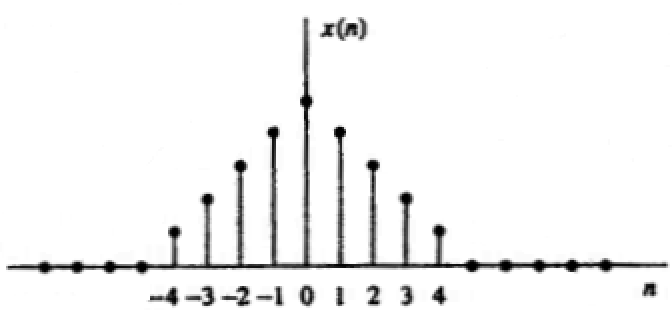
<u>Περιττό ή αντισυμμετρικό</u> $x(n) = -x(-n), \forall n$

Για κάθε σήμα $x(n)$, ισχύει $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$, όπου:

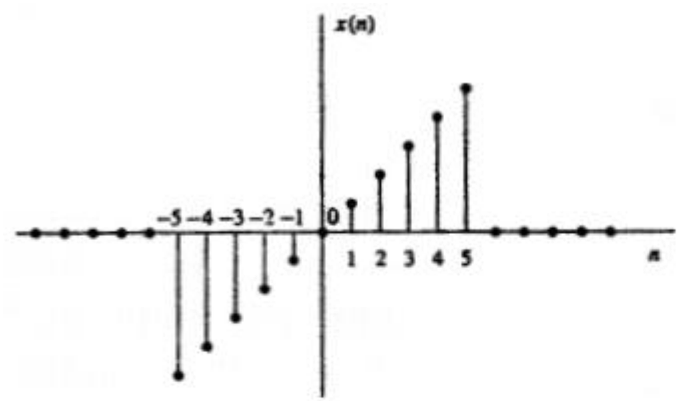
$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \quad \text{άρτια συνιστώσα}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \quad \text{περιττή συνιστώσα}$$

Άρτιο Σήμα



Περιττό Σήμα



Άσκηση 5

Βρείτε το άρτιο και το περιττό μέρος του ΣΔΧ : $x(n) = u(n)$

<u>**Απάντηση**</u>: Το άρτιο μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] = \frac{1}{2}[u(n) + u(-n)] =$$

$$= \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1/2, & n \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \delta(n)$$

Το περιττό μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] = \frac{1}{2}[u(n) - u(-n)] =$$

$$= \begin{cases} 1/2, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1/2, & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} sgn(n)$$

Άσκηση 6

Βρείτε το άρτιο και το περιττό μέρος του ΣΔΧ : $x(n) = a^n\, u(n)$

<u>Απάντηση</u>: Το άρτιο μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] = \frac{1}{2}[a^n u(n) + a^{-n} u(-n)] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}a^n, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ \dfrac{1}{2}a^{-n}, & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}a^{|n|} + \delta(n)$$

Το περιττό μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] = \frac{1}{2}[a^n u(n) - a^{-n} u(-n)] =$$

$$= \frac{1}{2}a^{|n|} sgn(n)$$

Άσκηση 7

Αν $x_1(n)$ άρτιο σήμα και $x_2(n)$ περιττό, τι προκύπτει για το $y(n) = x_1(n)\, x_2(n)$

<u>**Απάντηση**</u>:

Επειδή το $x_1(n)$ είναι άρτιο σήμα ισχύει : $x_1(n) = x_1(-n)$

Επειδή το $x_2(n)$ είναι περιττό σήμα ισχύει: $x_2(n) = -x_2(-n)$

Επομένως : $y(n) = x_1(n)\, x_2(n) = -x_1(-n)\, x_2(-n) = -y(-n)$

Άρα το σήμα $y(n)$ είναι περιττό.

Άσκηση 8

Βρείτε το συζυγές συμμετρικό (άρτιο) μέρος του σήματος:

$$x(n) = j\, e^{\,j\,\pi/4}$$

<u>Απάντηση</u>: Το συζυγές συμμετρικό μέρος του $x(n)$ είναι:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] = x_e(n) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\, j\, e^{\,j\,\pi/4} - j\, e^{\,j\,\pi/4}\right] = 0$$

Άρα το σήμα είναι συζυγές αντισυμμετρικό (περιττό).