Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 4: Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- Εξισώσεις Διαφορών
- Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών με Γραμμικούς Συντελεστές (ΓΕΔΣΣ)
- Ταξινόμηση Συστημάτων ανάλογα με τον Τύπο της Κρουστικής Απόκρισης

Εξισώσεις Διαφορών

Η έξοδος $y(n)$ σε τυχαία είσοδο $x(n)$, όπου $a(k), b(k)$ συντελεστές που ορίζουν το σύστημα, δίνεται από τη **Γραμμική Εξίσωση Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΕΔΣΣ)** :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

- **ΓΕΔΣΣ μη-Αναδρομική** (non-recursive) αν $a(k) = 0$ για καθε k
- **ΓΕΔΣΣ Αναδρομική** (recursive) αν $a(k) \neq 0$ για κάποιο k

Η **Γενική Λύση** της ΓΕΔΣΣ δίνεται από : $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$, όπου:

$y_h(n)$: ομογενής λύση

$y_p(n)$: μερική λύση

Για να υπολογιστεί η λύση της ΓΕΔΣΣ για n>=0 απαιτείται να έχουν οριστεί προηγουμένως οι τιμές των αρχικών συνθηκών.

Εξισώσεις Διαφορών

Ομογενής λύση $y_h(n)$: απόκριση στις αρχικές συνθήκες, θεωρώντας ότι $x(n) = 0$.

$$y_h(n) = \sum_{k=1}^{p} A_k\, z_k^n$$

όπου οι A_k επιλέγονται ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες και τα z_k^n είναι οι ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου** :

$$\sum_{k=0}^{p} a(k) z^{n-k} = 0 \Rightarrow z^{n-p}\{z^p + a(1)z^{p-1} + a(2)z^{p-2} + \cdots + a(p-1)z + \alpha(p)\} = 0$$

Μερική (ειδική) λύση $y_p(n)$: απόκριση για είσοδο $x(n)$, με μηδενικές Α.Σ.

Όρος στη $x(n)$:		Μερική λύση:	
	C		C_1
	$C\, n$		$C_1 n + C_2$
	$C\, a^n$		$C_1 a^n$
	$C \cos(n\omega_0)$		$C_1 \cos(n\omega_0) + C_2\; sin(n\omega_0)$
	$C \sin(n\omega_0)$		$C_1 \cos(n\omega_0) + C_2\; sin(n\omega_0)$
	$C\, a^n \cos(n\omega_0)$		$C_1 a^n \cos(n\omega_0) + C_2 a^n\, sin(n\omega_0)$
	$C\, \delta(n)$		Καμία

Ταξινόμηση Συστημάτων ανάλογα με τη διάρκεια της Κρουστικής Απόκρισης

FIR - Finite Impulse Response - Συστήματα με κρουστική απόκριση <u>πεπερασμένης</u> διάρκειας:

Αν $h(n)$ κρουστική απόκριση διάρκειας M [δηλ. $h(n) \neq 0, \quad$ για $0 \leq n < M$ και $h(n) = 0, \quad$ για $n < 0$ και $n \geq M$], η έξοδος $y(n)$ για είσοδο $x(n)$ δίνεται από:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} x(k)h(n-k)$$

Επειδή το σύστημα είναι **μη-αναδρομικό**, δηλ. ισχύει $a(k) = 0$, σε μορφή ΓΕΔΣΣ έχουμε:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k)$$

Ταξινόμηση Συστημάτων ανάλογα με τη διάρκεια της Κρουστικής Απόκρισης

IIR - Infinite Impulse Response - Συστήματα με κρουστική απόκριση <u>άπειρης</u> διάρκειας:

Αν $h(n)$ κρουστική απόκριση άπειρης διάρκειας, η έξοδος $y(n)$ για είσοδο $x(n)$ υπολογίζεται από το άθροισμα της συνέλιξης:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Επειδή το σύστημα είναι **αναδρομικό**, δηλ. ισχύει $a(k) \neq 0$, σε μορφή ΓΕΔΣΣ έχουμε:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί η κρουστική απόκριση ενός αναδρομικού συστήματος 2ης τάξης που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ: $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) - x(n-1)$.

<u>**Απάντηση**</u>**:** Επειδή αναζητούμε την κρουστική απόκριση $h(n)$, θέτουμε ως είσοδο $x(n) = \delta(n)$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Χαρακτηριστική εξίσωση: $z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)$ (1)

Ομογενής λύση: $y_h(n) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$ (2)

Μερική λύση: $y_p(n) = 0$

Πλήρης λύση: $y(n) = y_h(n) + y_p(n) = y_h(n)$

<u>Λύση ομογενούς:</u> [Ισχύει $y(-1) = y(-2) = 0$]

Για $n = 0$ έχουμε: $y(0) = \frac{3}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) + x(0) - x(0-1) \quad \Rightarrow y(0) = 1$

Για $n = 1$ έχουμε: $y(1) = \frac{3}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) + x(1) - x(0) = \frac{3}{4} - 1 \Rightarrow y(1) = -\frac{1}{4}$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Λύνουμε την (2) για $n = 0$ και $n = 1$ και έχουμε:

- $y(0) = y_h(0) = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^0 + A_2 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \Rightarrow 1 = A_1 + A_2$
- $y(1) = y_h(1) = A_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + A_2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \Rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_2$

Λύνουμε το παραπάνω σύστημα ως προς A_1, A_2 και βρίσκουμε $A_1, = -2,\ A_2 = 3$.

Επομένως: $y(n) = y_h(n) = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \left(\frac{1}{4}\right)^n,\ \ n \geq 0$

Και η κρουστική απόκριση είναι $h(n) = \left[-2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος της άσκησης 1 για είσοδο:

$$x(n) = u(n) - u(n-10)$$

<u>Απάντηση</u>: Η είσοδος $x(n)$ είναι άθροισμα δύο βηματικών. Υπολογίζουμε τη βηματική απόκριση $s(n)$ και λόγω γραμμικότητας εκφράζουμε την απόκριση ως $y(n) = s(n) - s(n-10)$. Η βηματική απόκριση $s(n)$ για $n \geq 0$, είναι:

$$s(n) = h(n) * u(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} \left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\left(\frac{1}{4}\right)^k\right], \qquad n \geq 0$$

Υπολογίζοντας το άθροισμα με χρήση γεωμετρικών προόδων, βρίσκουμε:

$$s(n) = \left[-2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + 3\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right]u(n) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

Η λύση είναι:

$$y(n) = s(n) - s(n-10) = \left[2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right]u(n) - \left[2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-10} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-10}\right]u(n-10)$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί η βηματική απόκριση του αναδρομικού συστήματος 2ης τάξης που περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ $y(n) - 0.25\, y(n-2) = x(n)$, για αρχικές συνθήκες $y(-1) = 0$ και $y(-2) = 0$.

<u>**Απάντηση**</u>: Επειδή ζητείται η βηματική απόκριση, η είσοδος είναι $x(n) = u(n)$.

(α) <u>Εύρεση μερικής λύσης</u>: Από τον πίνακα βρίσκουμε $y_p(n) = C_1$

Θέτουμε τη λύση στη ΓΕΔΣΣ και έχουμε: $C_1 - 0.25C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{4}{3}$

(β) <u>Εύρεση ομογενούς λύσης</u>: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$z^2 - 0.25 = 0 \Rightarrow (z - 0.5)(z + 0.5) = 0, \text{ άρα } z_1 = 0.5 \text{ και } z_2 = -0.5.$$

Έτσι, η ομογενής λύση είναι: $y_h(n) = A_1 z_1^n + A_2 z_2^n = A_1(0.5)^n + A_2(-0.5)^n$

και η γενική λύση είναι: $y(n) = \frac{4}{3} + A_1(0.5)^n + A_2(-0.5)^n, \quad n \geq 0 \qquad (1)$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Οι συντελεστές A_1 και A_2 πρέπει να υπολογιστούν έτσι ώστε να ικανοποιούν τη γενική λύση για τις δοσμένες αρχικές συνθήκες $y(-2)$ και $y(-1)$. Επειδή η λύση που δίνεται από την (1) ισχύει μόνο για $n \geq 0$, αναζητούμε ένα ισοδύναμο σύνολο αρχικών συνθηκών για $y(0)$ και $y(1)$.

Από τη ΓΕΔΣΣ έχουμε:

$$y(0) - 0.25\, y(-2) = x(0) = 1 \Rightarrow y(0) = 1$$

$$y(1) - 0.25\, y(-1) = x(1) = 1 \Rightarrow y(1) = 1$$

Αντικαθιστώντας τις νέες αρχικές συνθήκες $y(0)$ και $y(1)$ στην (1), έχουμε:

$$y(0) = \frac{4}{3} + A_1 + A_2 = 1$$

$$y(1) = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{2} A_2 = 1$$

Λύνοντας ως προς A_1 και A_2 έχουμε: $A_1 = -\frac{1}{2}$ και $A_2 = \frac{1}{6}$

Θέτοντας τις τιμές των A_1 και A_2 στην (1) έχουμε τη γενική λύση:

$$y(n) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}(0.5)^n + \frac{1}{6}(-0.5)^n, \qquad n \geq 0$$

Άσκηση 4

Ένα σύστημα περιγράφεται από την ΓΕΔΣΣ $y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$. Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x(n) = (0.5)^n u(n)$ με αρχικές συνθήκες $y(-1) = 0.75$ και $y(-2) = 0.25$.

<u>**Απάντηση**</u>: (α) <u>Εύρεση μερικής λύσης</u>. Για είσοδο $x(n) = (0.5)^n\, u(n)$ θεωρούμε μια λύση $y_p(n) = C_1\, (0.5)^n \quad n \geq 0$. Αντικαθιστώντας τη λύση στη ΓΕΔΣΣ, έχουμε:

$$C_1(0.5)^n = C_1(0.5)^{n-1} - C_1\,(0.5)^{n-2} + 0.5(0.5)^n + 0.5(0.5)^{n-1} \quad n \geq 0$$

Διαιρούμε με $(0.5)^n$ και βρίσκουμε $C_1 = 2C_1 - 4C_1 + 0.5 + 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$

(β) <u>Εύρεση ομογενούς λύσης</u>. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $z^2 - z + 1 = 0$, η οποία έχει ρίζες $z = \frac{1}{2}\,(1 \pm j\sqrt{3}) = e^{\pm\frac{j\pi}{3}}$.

Άρα η ομογενής λύση είναι $y_h(n) = A_1\, e^{\frac{jn\pi}{3}} + A_2\, e^{\frac{-jn\pi}{3}}$

Η γενική λύση είναι $y(n) = (0.5)^{n+1} + A_1\, e^{\frac{jn\pi}{3}} + A_2 e^{\frac{-jn\pi}{3}} \quad n \geq 0 \qquad (1)$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Υπολογίζουμε τις σταθερές A_1 και A_2, ώστε η γενική λύση να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες: $y(-1) = 0.75$ και $y(-2) = 0.25$.

Επειδή η λύση που δίνεται στην εξίσωση (1) είναι κατάλληλη μόνο για $n \geq 0$, πρέπει να αναζητήσουμε ένα ισοδύναμο σύνολο αρχικών συνθηκών για $y(0)$ και $y(1)$. Λύνοντας την ΓΕΔΣΣ για $n = 0$ και $n = 1$, έχουμε:

$$y(0) = y(-1) - y(-2) + 0.5x(0) + 0.5x(-1) = 0.75 - 0.25 + 0.5 = 1$$

και

$$y(1) = y(0) - y(-1) + 0.5x(1) + 0.5x(0) = 1 - 0.75 + 0.25 + 0.5 = 1$$

Αντικαθιστώντας τις παραγόμενες αρχικές συνθήκες στην εξίσωση (1), έχουμε:

$$y(0) = 0.5 + A_1 + A_2 = 1$$

$$y(1) = 0.25 + A_1\, e^{\frac{j\pi}{3}} + A_2\, e^{\frac{-j\pi}{3}} = 1$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Γράφουμε το ζεύγος εξισώσεων με αγνώστους A_1 και A_2, σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\pi/3} & e^{-j\pi/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας, βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{j\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^{-j\pi/3} - \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} e^{\frac{j\pi}{3}} + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και απλοποιώντας βρίσκουμε:

$$y(n) = (0.5)^{n+1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\, sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή η ΓΕΔΣΣ έχει πραγματικούς συντελεστές, οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι συζυγείς μιγαδικές. Άρα η κρουστική απόκριση είναι πραγματική. Για ένα πραγματικό σήμα $x(n)$, η απόκριση θα είναι επίσης πραγματική, άρα η σταθερά A_2 θα είναι η συζυγής της A_1, δηλ: $A_2 = A_1^*$