Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

Διάλεξη 1: Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μέρος 1: Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Σήματα Συνεχούς Χρόνου

1. Κατηγορίες Σημάτων
2. Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων
3. Κατάταξη σημάτων ως προς την ενέργεια και την ισχύ
4. Απλές Πράξεις Σημάτων Συνεχούς Χρόνου
5. Ιδιότητες Σημάτων Συνεχούς Χρόνου
6. Στοιχειώδη Σήματα Συνεχούς Χρόνου

1. Κατηγορίες Σημάτων

Κατηγορίες Σημάτων (1/2)

Ως προς την μεταβλητή του **χρόνου**:

- Σήμα **Συνεχούς Χρόνου** (continuous time): ένα σήμα $x(t)$ το οποίο ορίζεται για **κάθε τιμή του $\boldsymbol{t}$** στο διάστημα χρόνου (a, b).

- Σήμα **Διακριτού Χρόνου** (discrete time): ένα σήμα το οποίο ορίζεται μόνο για κάποιες (συγκεκριμένες) στιγμές του χρόνου.
  Τα διακριτά σήματα συμβολίζονται από **ακολουθίες** $\{x(n)\}$. Η τιμή της ακολουθίας $\{x(n)\}$ τη χρονική στιγμή n_0 είναι το βαθμωτό μέγεθος $x(n_0)$.

Κατηγορίες Σημάτων (1/2)

Ως προς την μεταβλητή του **πλάτους**:

- **Συνεχούς τιμής :** ένα σήμα που παίρνει όλες τις δυνατές τιμές σε ένα διάστημα τιμών

- **Διακριτής τιμής:** ένα σήμα που παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών

Σήματα Συνεχούς Χρόνου

Τα σήματα συνεχούς χρόνου υποδιαιρούνται σε δύο κατηγορίες:

- Στα **αναλογικά σήματα** ή σήματα συνεχούς χρόνου και συνεχούς πλάτους, στα οποία τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή (t) όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή (πλάτος του σήματος) λαμβάνουν συνεχείς (πραγματικές) τιμές, π.χ. $x(t) = 6t$.

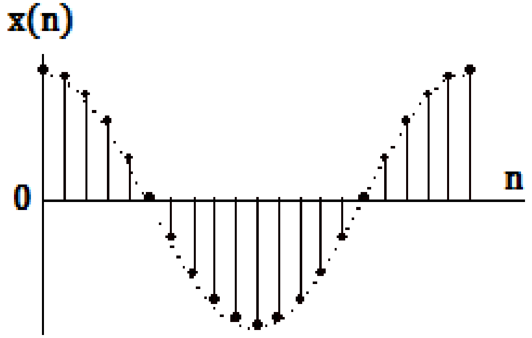
- Στα **διακριτά σήματα συνεχούς χρόνου**, στα οποία η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνει διακριτές τιμές, π.χ.

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 2, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σήματα Διακριτού Χρόνου

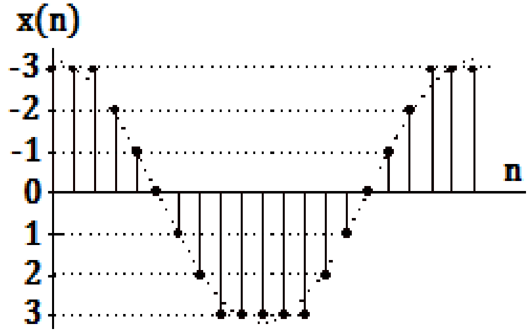
Τα σήματα διακριτού χρόνου διαιρούνται σε δύο κατηγορίες:

- Στα **διακριτά σήματα συνεχούς τιμής** (πλάτους), στα οποία η εξαρτημένη μεταβλητή (πλάτος) λαμβάνει συνεχείς τιμές, π.χ. $x(t) = \cos(n\ t)$, όπου n είναι φυσικός αριθμός.



- Στα **διακριτά σήματα διακριτής τιμής** ή **ψηφιακά**, στα οποία η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή λαμβάνουν διακριτές τιμές.

  Παρατηρούμε ότι το διακριτό σήμα $\{x(n)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}.



Κατηγορίες Σημάτων (3/3)

- **Αναλογικό Σήμα** ή σήμα συνεχούς χρόνου και συνεχούς πλάτους, στο οποίο τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή (t) όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή (πλάτος του σήματος) λαμβάνουν συνεχείς (πραγματικές) τιμές, π.χ. $x(t) = 6t$
- **Ψηφιακό Σήμα :** Ένα σήμα διακριτού χρόνου και διακριτής τιμής.

- Τα σήματα απαντώνται στη φύση συνήθως σε αναλογική μορφή, π.χ. σήματα ομιλίας, μουσικής, κλπ, όμως τις τελευταίες δεκαετίες η εξέλιξη της **ψηφιακής τεχνολογίας** επιτρέπει την αποδοτικότερη επεξεργασία, μετάδοση και αποθήκευση των ψηφιακών σημάτων.
- Ένα αναλογικό σήμα μετατρέπεται σε ψηφιακό μέσω των διαδικασιών της **δειγματοληψίας** του **κβαντισμού** και της **κωδικοποίησης**

2. Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων

Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (ΣΣΧ) (1/2)

Για ένα σήμα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ) $x(t)$ στο διάστημα $[t_1, t_2]$, ορίζουμε:

Μέση Τιμή:

$$\bar{x}(t) = x_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt$$

Ενεργός Τιμή:

$$\bar{\bar{x}}(t) = x_{rms} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt \right]^{1/2}$$

Στιγμιαία Ισχύς:

$$P(t) = x^2(t)$$

Μέση Ισχύς:

$$\bar{P}_x = P_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt$$

Ενέργεια:

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt$$

Χαρακτηριστικές Παράμετροι Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (ΣΣΧ) (2/2)

Για τον υπολογισμό της ενέργειας και της ισχύος στο χρονικό διάστημα $[-\infty, \infty]$, ισχύει αντίστοιχα:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T}$$

3. Κατάταξη σημάτων ως προς την ενέργεια και την ισχύ

Κατάταξη σημάτων ως προς την ενέργεια και την ισχύ

Ένα σήμα $x(t)$ χαρακτηρίζεται ως:

- **Σήμα ισχύος:** όταν $0 < P_{av} < \infty$ όταν το διάστημα $[t_1, t_2]$ τείνει στο άπειρο
- **Σήμα ενέργειας** : όταν η ενέργειά του στο διάστημα $[-\infty, \infty]$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή $E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt < \infty$. Για να συμβαίνει αυτό, το πλάτος του σήματος θα πρέπει να φθίνει αρκετά γρήγορα προς το μηδέν στο πέρασμα του χρόνου. Σε μερικές περιπτώσεις αυτό δεν συμβαίνει, π.χ. $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ για $-\infty < t < \infty$.
- Ένα σήμα δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα σήμα ενέργειας και σήμα ισχύος, επειδή τα σήματα ενέργειας έχουν $P_x = 0$ και τα σήματα ισχύος έχουν $E_x = \infty$.
- Ένα σήμα μπορεί να μην είναι ούτε σήμα ενέργειας, ούτε σήμα ισχύος.
- Τα περισσότερα σήματα που συναντάμε στην πράξη είναι είτε σήματα ενέργειας είτε σήματα ισχύος.
- Όλα τα περιοδικά σήματα (με εξαίρεση το $x(t) = 0$) είναι σήματα ισχύος.

Άσκηση 1

Ένα σήμα $x(t)$ εισέρχεται σε ένα σύστημα και στην έξοδο εμφανίζεται το σήμα $y(t) = a\, x(bt)$. Αν το σήμα $x(t)$ είναι σήμα με ενέργεια E_x στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, να υπολογιστεί η ενέργεια E_y του σήματος $y(t)$ στο ίδιο διάστημα.

<u>Απάντηση</u>: Η ενέργεια E_x του σήματος $x(t)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt$$

Όμοια, η ενέργεια E_y του σήματος $y(t)$ είναι:

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(bt)\, dt$$

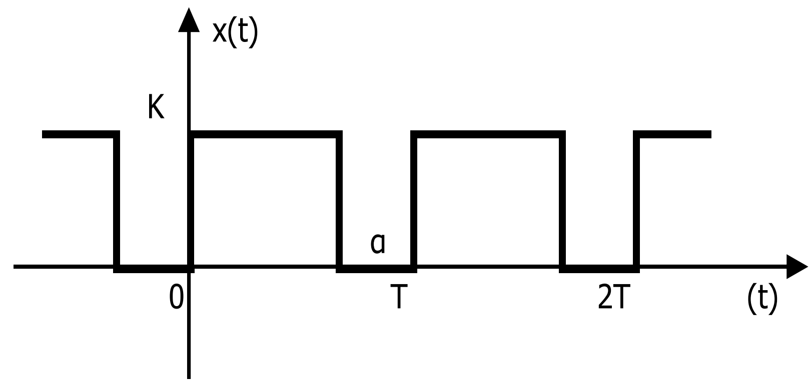
Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα θέτοντας $t' = bt$, οπότε έχουμε:

$$E_y = \frac{a^2}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t')\; dt'$$

Επομένως ισχύει: $E_y = \frac{a^2}{b} E_x$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η μέση τιμή του σήματος $x(t)$ ως συνάρτηση των α και Κ.



Απάντηση: Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε πως το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο Τ και πλάτος Κ.

Επομένως η μέση τιμή του στο διάστημα $[t_1, t_2] = [0, \mathrm{T}]$ δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{x}(t) = x_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{T-a} K\ dt = \left[\frac{K}{T}\ t\right]\begin{matrix} T-a \\ 0 \end{matrix} = K\left(1 - \frac{a}{T}\right)$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η ενέργεια του σήματος $x(t) = e^{-|t|}$

<u>Απάντηση</u>: Από την εξίσωση ορισμού του σήματος διαπιστώνουμε ότι:

$$|x(t)|^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{+2t} & \text{για } t < 0 \\ e^{-2t} & \text{για } t > 0 \end{cases}$$

Επομένως, η ενέργεια του σήματος δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2t}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{2} e^{2t}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Επειδή η ενέργεια του σήματος είναι πεπερασμένη, το $x(t)$ είναι σήμα **ενέργειας**.

4. Απλές Πράξεις Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Απλές Πράξεις Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

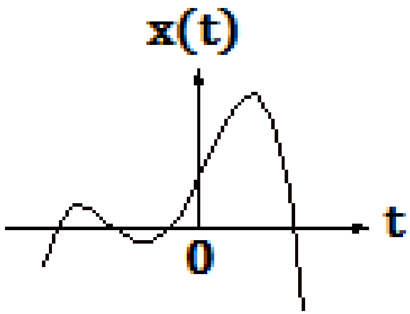
1. Χρονική Μετατόπιση
2. Ανάκλαση
3. Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου
4. Πρόσθεση και Πολλαπλασιασμός Σημάτων

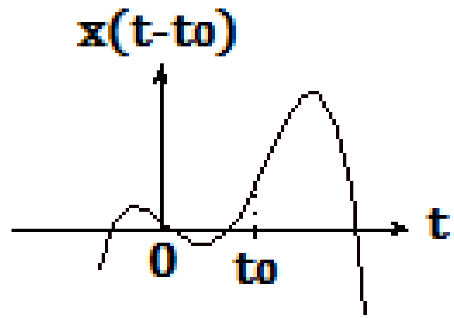
Χρονική Μετατόπιση Σήματος (1/2)

Ένα σήμα $y(t)$ αποτελεί μία μορφή **χρονικά μετατοπισμένη** κατά ποσότητα χρόνου t_0 του σήματος $x(t)$, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή t αντικατασταθεί από $t - t_0$, δηλ. όταν ισχύει:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

όπου το t_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός.





Το σήμα $x(t)$ και η χρονικά μετατοπισμένη μορφή του $y(t)$

Χρονική Μετατόπιση Σήματος (2/2)

- Η χρονική μεταβολή κατά θετικό t_0 αντιστοιχεί σε **χρονική καθυστέρηση** (ολίσθηση προς τα **δεξιά**) και είναι μια διαδικασία που συμβαίνει συνήθως κατά τη μετάδοση ενός σήματος μέσα από ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα.

- Αν η χρονική μεταβολή γίνει κατά αρνητικό t_0 τότε η χρονική μετατόπιση αντιστοιχεί σε χρονική **προήγηση** ή **προπορεία**, δηλ. η ολίσθηση του σήματος γίνεται προς τα **αριστερά** στον άξονα του χρόνου.

- Κατά την εφαρμογή της χρονικής μετατόπισης σε ένα σήμα, δεν προκύπτει μεταβολή της ενέργειάς του, ισχύει δηλαδή η σχέση:

$$E[x(t)] = E[x(t - t_0)]$$

Ανάκλαση Σήματος

Ένα σήμα $y(t)$ αποτελεί την **ανάκλαση** του σήματος $x(t)$ ως προς $t = 0$, δηλ. ως προς τον κατακόρυφο άξονα, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή t αντικατασταθεί από $-t$, δηλ. όταν ισχύει:

$$y(t) = x(-t)$$

Σήμα συνεχούς χρόνου και η ανάκλασή του ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

- Η πράξη της ανάκλασης έχει ως αποτέλεσμα την εναλλαγή μεταξύ «παρελθόντος» και «μέλλοντος» ενός σήματος.

- Κατά την εφαρμογή της χρονικής μετατόπισης σε ένα σήμα, δεν προκύπτει μεταβολή της ενέργειάς του, ισχύει δηλαδή η σχέση:

$$E[x(t)] = E[x(-t)]$$

Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου Σήματος

Το σήμα $x_1(t)$ αποτελεί μια **χρονική συστολή** του σήματος $x(t)$, αν ισχύει:

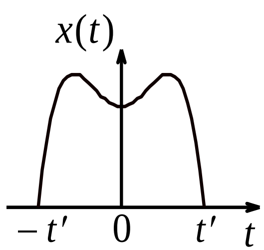
$$x_1(t) = x(at) \qquad a > 1$$

δηλ. αν η ανεξάρτητη μεταβλητή t αντικατασταθεί από την ποσότητα αt.

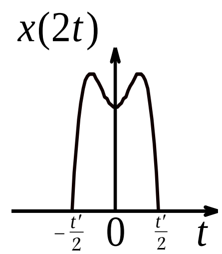
Το σήμα $x_2(t)$ αποτελεί μια **χρονική διαστολή** του σήματος $x(t)$, αν ισχύει:

$$x_2(t) = x(at) \qquad 0 < a < 1$$

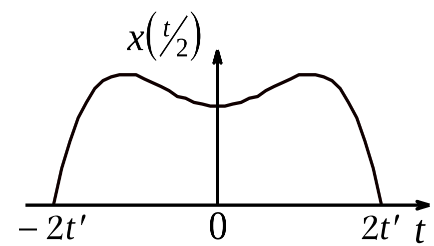
Η αρχή των αξόνων $t = 0$ παραμένει αμετάβλητη.



Αρχικό σήμα



Η χρονική συστολή του



Η χρονική διαστολή του

- Η πράξη της αλλαγής της κλίμακας του χρόνου κατά μία σταθερή α, οδηγεί στον πολλαπλασιασμό της ενέργειας του σήματος επί $\frac{1}{|\alpha|}$, δηλ., ισχύει:

$$E[x(t)] = \frac{1}{|a|} E[x(t)]$$

Πρόσθεση και Πολλαπλασιασμός Σημάτων

Δοθέντων δύο σημάτων συνεχούς χρόνου $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού σημάτων, την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των αντίστοιχων στιγμιαίων τιμών τους, δηλ.:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$z(t) = x_1(t)\ x_2(t)$$

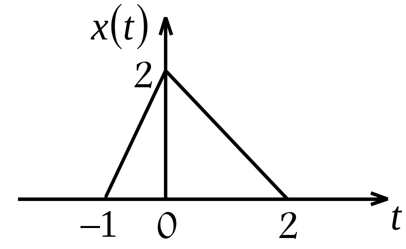
- Αν τα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ δεν χαρακτηρίζονται από χρονική επικάλυψη, τότε η ενέργεια του σήματος $y(t)$ είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών των δύο σημάτων, δηλ. ισχύει:

$$E[y(t)] = E[x_1(t)] + E[x_2(t)]$$

Άσκηση 4

Ένα σήμα $x(t)$ περιγράφεται από τη σχέση: $x(t)=\begin{cases}2t+2, & -1\le t<0\\ 2-t, & 0\le t<2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

Να σχεδιάσετε τα σήματα $x(t)$, $y_1(t)=x(-t)$, $y_2(t)=x(t+1)$, $y_3(t)=x(2t)$, $y_4(t)=x(t/2)$, $y_5(t)=x(1-t)$ και $y_6(t)=x(2t-2)$.

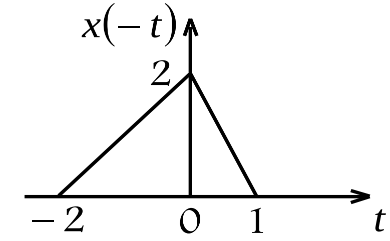


<u>Απάντηση</u>: Το αρχικό σήμα $x(t)$ είναι:

Το σήμα $y_1(t)$ είναι η ανάκλαση του $x(t)$ και υπολογίζεται αντικαθιστώντας το t με $-t$:

$$y_1(t)=\begin{cases}2(-t)+2, & -1\le -t<0\\ 2-(-t), & 0\le -t<2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}=\begin{cases}-2t+2, & 1\ge t>0\\ 2+t, & 0\ge t>-2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}=\begin{cases}t+2, & -2\le t<0\\ 2-2t, & 0\le t<1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

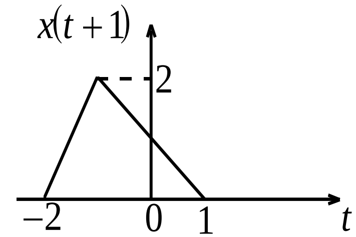
Η γραφική παράσταση του σήματος $y_1(t)=x(-t)$:



Άσκηση 4 (συνέχεια)

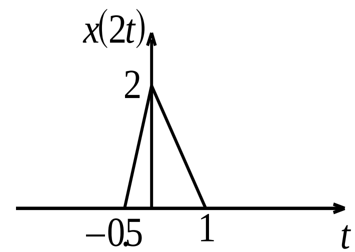
Το $y_2(t)$ είναι μια χρονικά μετατοπισμένη μορφή του $x(t)$

$$y_2(t) = \begin{cases} 4 + 2t, -2 \le t < -1 \\ 1 - t, \quad -1 \le t < 1 \\ 0, \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

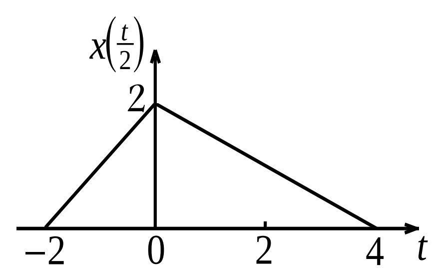


Τα $y_3(t)$ και $y_4(t)$ είναι χρονική συστολή και διαστολή του $x(t)$, αντίστοιχα:

$$y_3(t) = \begin{cases} 2 + 4t, -\dfrac{1}{2} \le t < 0 \\ 2 - 2t,\ 0 \le t < 1 \\ 0, \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

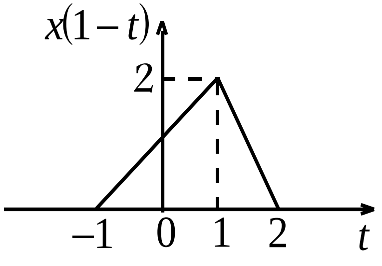


$$y_4(t) = \begin{cases} 2 + t, \quad -2 \le t < 0 \\ 2 - \frac{t}{2}, \quad 0 \le t < 4 \\ 0, \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

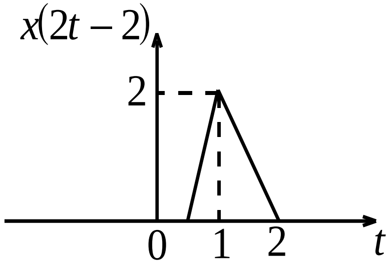


Άσκηση 4 (συνέχεια)

Το $y_5(t)$ είναι μια χρονικά μετατοπισμένη μορφή προς τα δεξιά του σήματος $y_1(t)$, δηλαδή της ανάκλασης του σήματος $x(t)$.



Το $y_6(t) = x[2(t-1)]$ αποτελεί μια διαστολή του σήματος $x(t-1)$ δηλαδή της χρονικά μετατοπισμένης μορφής του σήματος $x(t)$.



5. Ιδιότητες Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Ιδιότητες Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

1. Απλά και Στοχαστικά Σήματα
2. Αιτιατά και μη Αιτιατά Σήματα
3. Σήματα Πεπερασμένου Πλάτους
4. Σήματα Πεπερασμένης και Σήματα Άπειρης Διάρκειας
5. Άρτια και Περιττά σήματα
6. Περιοδικά Σήματα

Απλά και Στοχαστικά Σήματα

- **Απλό ή αιτιοκρατικό** ονομάζεται ένα σήμα για το οποίο είμαστε πάντα σε θέση να γράψουμε μία μαθηματική σχέση που να το περιγράφει πλήρως σε κάθε χρονική στιγμή, άρα και να το προσδιορίσουμε πριν συμβεί.

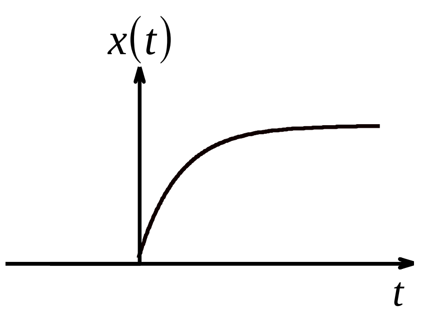
- Αντίθετα, **στοχαστικό ή τυχαίο** ονομάζεται ένα σήμα το οποίο δεν είναι δυνατό να το προσδιορίσουμε επακριβώς πριν συμβεί, δηλαδή δεν μπορούμε να γράψουμε μία αναλυτική μαθηματική έκφραση που να το περιγράφει.
  Στην περίπτωση αυτή εντάσσεται ο **θόρυβος** καθώς και πληθώρα άλλων πραγματικών σημάτων. Για τη μελέτη των σημάτων αυτών χρησιμοποιείται η Θεωρία Πιθανοτήτων.
  Τέτοια σήματα δεν θα μας απασχολήσουν στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος.

Αιτιατά και μη Αιτιατά Σήματα

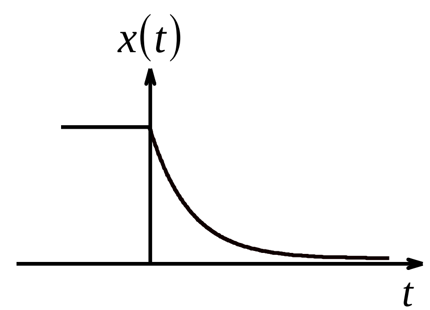
Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται **αιτιατό** εάν είναι μηδενικό για αρνητικές τιμές του χρόνου t, δηλαδή αν ισχύει:

$$x(t) = 0 \;\text{ για } t < 0$$

Αυτή η διαπίστωση ισχύει γενικά, καθώς τα σήματα που μελετώνται στην πράξη προέρχονται από φυσικά συστήματα και προφανώς σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές από τη στιγμή έναρξης λειτουργίας του συστήματος, η οποία θεωρείται ως η χρονική στιγμή $t = 0$.



Αιτιατό Σήμα



Μη αιτιατό σήμα

Σήματα Πεπερασμένου Πλάτους

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται πεπερασμένου πλάτους όταν ισχύει:

$$|x(t)| < \infty \quad \text{για καθε } t$$

Ισοδύναμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο σήμα «φραγμένου πλάτους»

Σήματα Πεπερασμένης Διάρκειας και Σήματα Άπειρης Διάρκειας

Ένα σήμα x(t) λέγεται σήμα πεπερασμένης διάρκειας όταν:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq T_1 \\ 0, & t \geq \ T_2 \end{cases}$$

όπου τα T_1 και T_2, $(T_1 < T_2)$ είναι πεπερασμένοι αριθμοί.

Αν τουλάχιστον ένα από τα T_1 και T_2 γίνει ίσο με το άπειρο, τότε το σήμα έχει άπειρη διάρκεια.

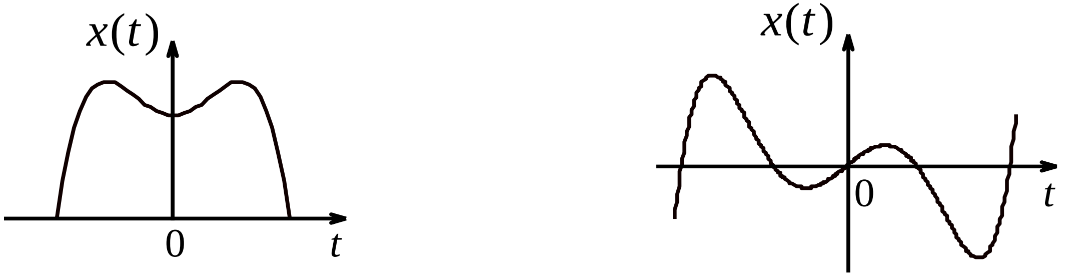
Άρτια και Περιττά Σήματα (1/2)

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται **άρτιο** και παρουσιάζει **άρτια συμμετρία**, όταν ισχύει:

$$x(-t) = x(t) \quad -\infty < t < +\infty$$

Ένα σήμα $x(t)$ λέγεται **περιττό** και παρουσιάζει **περιττή συμμετρία**, όταν ισχύει:

$$x(-t) = -x(t) \quad -\infty < t < +\infty$$



Άρτιο Σήμα

Περιττό σήμα

Άρτια και Περιττά Σήματα (2/2)

Κάθε σήμα μπορεί να εκφρασθεί ως **άθροισμα ενός άρτιου $\boldsymbol{x_e(t)}$ και ενός περιττού σήματος $\boldsymbol{x_o(t)}$**, δηλ. ως:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

όπου τα $x_e(t)$ και $x_o(t)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Αποδεικνύεται ότι:

- το γινόμενο δύο άρτιων ή δύο περιττών σημάτων είναι ένα **άρτιο** σήμα
- το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος είναι ένα **περιττό** σήμα

Περιοδικά Σήματα (1/3)

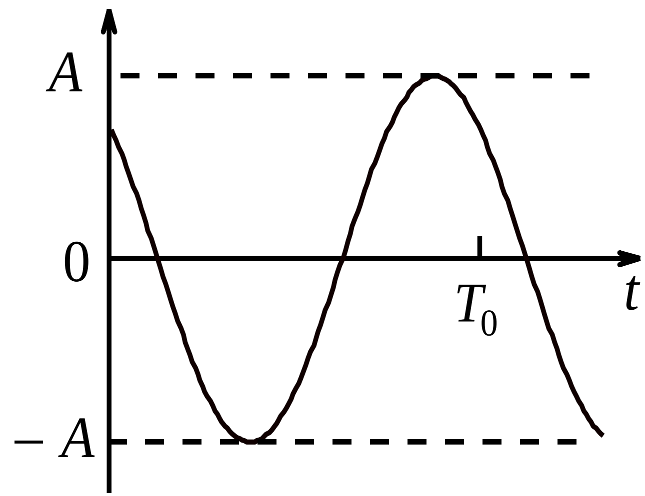
Ένα αναλογικό σήμα $x(t)$ λέγεται **περιοδικό** αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός Τ έτσι ώστε να ισχύει $x(t) = x(t+T)$ για κάθε t.

Η ποσότητα Τ λέγεται **περίοδος** και μετριέται σε sec. Η ελάχιστη περίοδος ονομάζεται και **θεμελιώδης περίοδος** (T_0) και ορίζει τη μικρότερη χρονική διάρκεια μετά την οποία το περιοδικό σήμα θα αρχίσει να επαναλαμβάνεται.

Η ποσότητα $f = 1/T$ ονομάζεται **συχνότητα**, δίνει τον αριθμό των επαναλήψεων του σήματος στη μονάδα του χρόνου (sec) και μετριέται σε Hertz (Hz), ενώ η ποσότητα $\omega = 2\pi/\mathrm{T} = 2\pi f$ ονομάζεται **κυκλική συχνότητα** και μετριέται σε rad.

Περιοδικά Σήματα (2/3)

Κλασσικό παράδειγμα περιοδικών σημάτων είναι τα **ημιτονοειδή** και **συνημιτονοειδή** σήματα, δηλαδή αυτά που περιγράφονται από μία σχέση της μορφής $x(t) \ = \ A\, cos\ (\omega_0 t \ + \ \theta)$, όπου A είναι το **πλάτος** και θ είναι η **γωνία φάσης** ή απλά **φάση**.



Το ημιτονοειδές σήμα $x(t) \ = \ A\, cos(\omega_0 t + \pi/4)$

Περιοδικά Σήματα (3/3)

Έστω $x(t)$ και $y(t)$ περιοδικά σήματα με θεμελιώδεις περιόδους T_1 και T_2, αντίστοιχα. Θα μελετήσουμε τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες το άθροισμα $z(t) = x(t) + y(t)$ είναι περιοδικό σήμα.

- Εφόσον τα $x(t)$ και $y(t)$ είναι περιοδικά με θεμελιώδεις περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα, ισχύει:

$$x(t) = x(t + mT_1), \qquad m = 1,2,\ldots.$$

$$y(t) = y(t + nT_2), \qquad n = 1,2,\ldots.$$

- Αν το άθροισμα $z(t) = x(t) + y(t)$ είναι περιοδικό σήμα με **θεμελιώδη περίοδο $\boldsymbol{T}$**, τότε θα ισχύει $z(t) = z(t + T)$, η οποία γράφεται ως:

$$z(t + T) = x(t + mT_1) + y(t + nT_2)$$

- Η σχέση αυτή ικανοποιείται μόνο όταν ισχύει:

$$T = mT_1 = nT_2 \Rightarrow \boldsymbol{\frac{T_1}{T_2} = \frac{n}{m}}$$

  που αποτελεί και την αναγκαία προϋπόθεση για να είναι περιοδικό σήμα το άθροισμα δύο περιοδικών σημάτων.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε την άρτια και την περιττή συνιστώσα του σήματος συνεχούς χρόνου $x(t) = e^{j\omega t}$

Απάντηση: Από τις εξισώσεις ορισμού των συνιστωσών $x_e(t)$ και $x_o(t)$ για το σήμα $x(t) = e^{j\omega t}$ και χρησιμοποιώντας τους τύπους του Euler:

$$e^{+j\omega t} = cos(\omega t) + j\,sin(\omega t) \quad \text{και} \quad e^{-j\omega t} = cos(\omega t) - j\,sin(\omega t)$$

έχουμε για την άρτια συνιστώσα:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \\ &= \frac{1}{2}[cos(\omega t) + j\,sin(\omega t) + cos(\omega t) - j\,sin(\omega t)\,] = \frac{1}{2} 2\,cos(\omega t) \\ &= cos(\omega t) \end{aligned}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Ομοίως και για την περιττή:

$$
\begin{aligned}
x_o(t) &= \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right] \\
&= \frac{1}{2}[cos(\omega t) + j\,sin(\omega t) - cos(\omega t) + j\,sin(\omega t)\,] = \frac{1}{2}2j\,sin(\omega t) \\
&= j\,sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

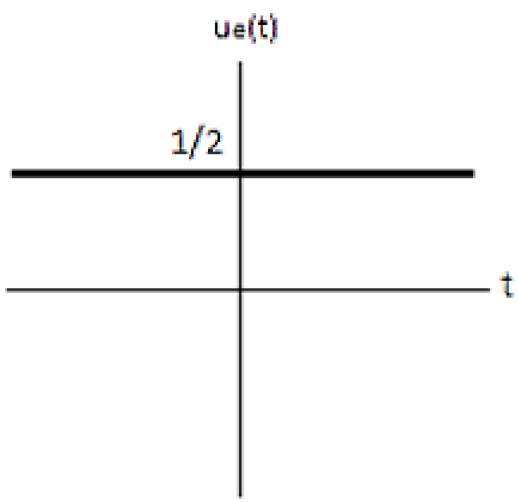
Άσκηση 6

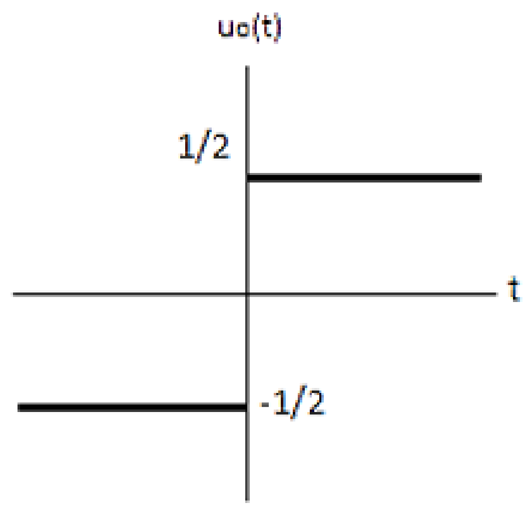
Να προσδιορίσετε την άρτια και την περιττή συνιστώσα της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Από τις εξισώσεις ορισμού των άρτιων και περιττών συνιστωσών έχουμε:

$$u_e(t) = \frac{1}{2}[u(t) + u(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}[0+1], & t<0 \\ \frac{1}{2}[1+0], & t>0 \end{cases} = \frac{1}{2}$$

$$u_o(t) = \frac{1}{2}[u(t) - u(-t)] = \begin{cases} \frac{1}{2}[0-1], & t<0 \\ \frac{1}{2}[1-0], & t>0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & t<0 \\ \frac{1}{2}, & t>0 \end{cases}$$





Άσκηση 7

Για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα να εξετάσετε αν είναι περιοδικό ή όχι.

1. $y(t) = 3\sin(3\pi t) + 2\sin(4\pi t)$
2. $y(t) = 4\cos(100t) + 5\sin(70\sqrt{2}\, t)$
3. $y(t) = \sqrt{2}\cos(12t) + 1{,}5\cos(2\pi t)$

<u>Απάντηση</u>:

1. Σχετικά με την κυκλική συχνότητα κάθε συνιστώσας του σήματος, ισχύει $\omega_1 = 3\pi$ και $\omega_2 = 4\pi$ και αφού το πηλίκο $\omega_2/\omega_1 = 4/3$ είναι ένας ρητός αριθμός, το σήμα $y(t)$ είναι περιοδικό.
2. Ισχύει ότι $\omega_1 = 100$ και $\omega_2 = 70\sqrt{2}$ $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 70\sqrt{2}\,\frac{1}{100} = 7\sqrt{2}\,\frac{1}{10}$.
   Άρα το $y(t)$ δεν είναι περιοδικό.
3. Ισχύει ότι $\omega_1 = 12$ και $\omega_2 = 2\pi$ $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\pi}{6}$.
   Άρα το $y(t)$ δεν είναι περιοδικό.

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδος για καθένα από τα παρακάτω περιοδικά σήματα:

1. $x_1(t) = e^{j\,0.25\,\pi\,t}$
2. $x_2(t) = \cos(0.2\,\pi t)$
3. $x_3(t) = 2\cos(0.1\,\pi t) + 2\sin(0.2\,\pi t)$

<u>Απάντηση</u>:

1. Το $x_1(t)$ γράφεται ως $e^{\,j\,2\pi\,t\,/8}$ και επειδή ισχύει $2\pi/T_0 = 2\pi/8$, η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 8$.
2. Η θεμελιώδης περίοδος του $x_2(t) = cos\,(0.2\,\pi t) = \cos\left(\frac{2\pi}{10}t\right)$ είναι $T_0 = 10$.
3. Η θεμελιώδης περίοδος του $2cos\,(0.1\,\pi t)$ είναι $T_0 = \frac{2\pi}{0.1\pi} = 20$, ενώ του $2\,sin(0.2\pi t)$ είναι $T_0 = \frac{2\pi}{0.2\pi} = 10$.
   Επειδή το 20 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 10 είναι και περίοδος του $2\,sin(0.2\,\pi t)$. Επομένως, η θεμελιώδης περίοδος του $x_3(t)$ είναι $T_0 = 20$.

Άσκηση 8

Να αποδειχθεί πως το σήμα $x(t) = A\,cos(\omega_0 t + \varphi)$ είναι περιοδικό σήμα. Να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδός του.

Απάντηση: Προκειμένου το σήμα $x(t)$ να είναι περιοδικό θα πρέπει να υπάρχει θετικός αριθμός T τέτοιος ώστε $x(t+T) = x(t)$.

Με βάση την εξίσωση ορισμού του δοθέντος σήματος, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$x(t+T) = A\,cos(\omega_0(t+T) + \varphi) = A\,cos(\omega_0 t + \omega_0 T + \varphi)$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση συνημιτόνου είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = 2\pi m$.

Για να είναι $x(t+T) = x(t)$ ή $A\,cos(\omega_0 t + \omega_0 T + \varphi) = A\,cos(\omega_0 t + \varphi)$, θα πρέπει $\omega_0 T = 2\pi m$.

Θα ισχύει λοιπόν $T = m\left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)$ και η θεμελιώδης περίοδος του σήματος θα είναι ίση με $T = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Άσκηση 9

Να βρεθεί η θεμελιώδης περίοδος του σήματος $x(t) = cos(15\pi t) + 3\,sin(8\pi t)$.

<u>Απάντηση</u>: Εάν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, τότε θα ισχύει $x(t) = x(t+T)$. Το σήμα $x(t+T)$ ορίζεται ως:

$$x(t+T) = cos[15\pi(t+T)] + 3\,sin[8\pi(t+T)]$$
$$= cos(15\pi t + 15\pi T) + 3\,sin(8\pi t + 8\pi T)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη πως οι περίοδοι των δύο ημιτονοειδών σημάτων είναι της μορφής $T_1 = 2\pi m$ και $T_2 = 2\pi n$, η συνθήκη περιοδικότητας ικανοποιείται εάν ισχύει:

$$15\pi T = 2\pi m \;\text{ και }\; 8\pi T = 2\pi n$$

Λύνοντας ως προς T, προκύπτει ότι:

$$T = \frac{2m}{15} = \frac{n}{4} \;\text{ ή ισοδύναμα }\; \frac{n}{m} = \frac{8}{15}$$

Αλλά οι δύο παραπάνω αριθμοί δεν διαθέτουν κάποιο κοινό διαιρέτη (εκτός από το 1).

Θα είναι λοιπόν $n = 8$ και $m = 15$, από όπου προκύπτει ότι $T = n/2 = 4$

6. Στοιχειώδη Σήματα Συνεχούς Χρόνου

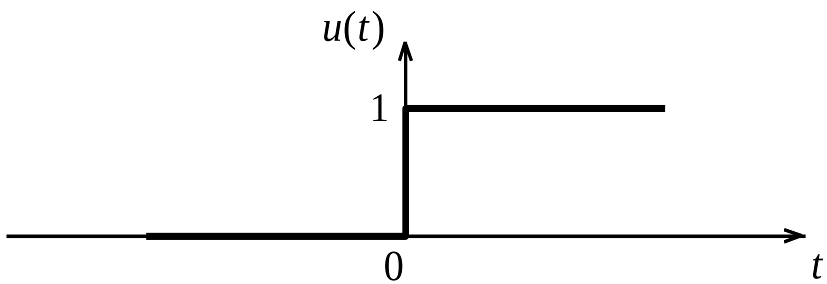
6.1. Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση

Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (1/2)

Η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος ή **μοναδιαία βηματική συνάρτηση** συνεχούς χρόνου ή συνάρτηση του Heaviside, ορίζεται από τη σχέση:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $u(t)$ είναι **ασυνεχής** εφόσον δεν ορίζεται στο $t = 0$.

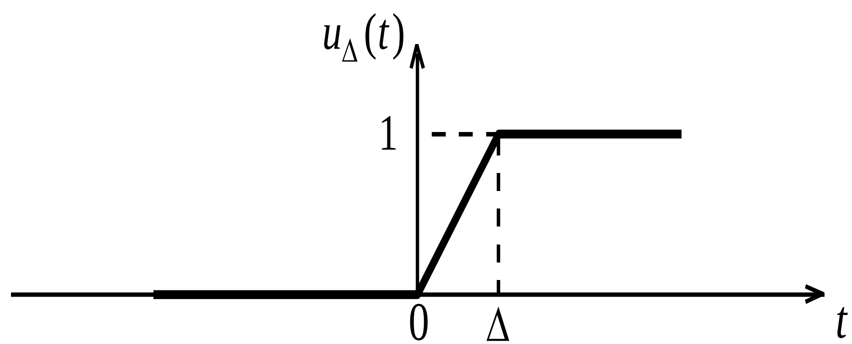


Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος $u(t)$ (Heaviside)

Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση (2/2)

Εναλλακτικά η μοναδιαία βηματική συνάρτηση ορίζεται ως το όριο μίας ακολουθίας συναρτήσεων $u_n(t)$, δηλαδή ως $u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$, όπου:

$$u_\Delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{t}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 1, & t \geq \Delta \end{cases}$$



Η συνεχής προσέγγιση της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος

Ιδιότητες Μοναδιαίας Βηματικής Συνάρτησης

Οι πιο σημαντικές ιδιότητες της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης είναι:

(α) Η πράξη της **κλιμάκωσης**:

$$\mathrm{A}\, u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \mathrm{A}, & t > 0 \end{cases}$$

(β) Η πράξη της **χρονικής μετατόπισης** κατά μία ποσότητα χρόνου t_0:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

Ιδιότητες Μοναδιαίας Βηματικής Συνάρτησης

(γ) Η πράξη της **αλλαγής μεταβλητής**:

$$u(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & t < 0 \end{cases}$$

Αν προσθέσουμε τις $u(t)$ και $u(-t)$, βρίσκουμε :

$$u(t) - u(-t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} = sgn(t)$$

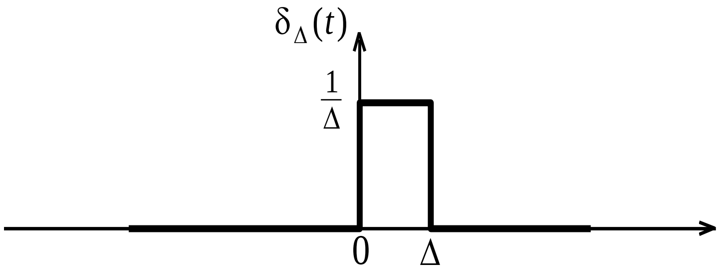
η οποία ονομάζεται **συνάρτηση προσήμου**, επειδή επιστρέφει τις τιμές $+1{,}0$ και $-\,1$, αν η τιμή του t είναι θετική, μηδενική ή αρνητική, αντίστοιχα.

6.2 Κρουστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Δέλτα

Κρουστική Συνάρτηση (1/3)

Η παράγωγος της συνάρτησης $u_{\Delta}(t)$ είναι:

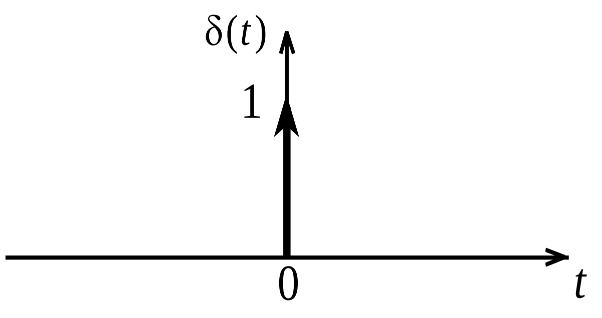
$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/\Delta, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & t \geq \Delta \end{cases}$$



Όταν $\Delta \rightarrow 0$ η χρονική διάρκεια του παλμού ελαττώνεται και αυξάνεται το ύψος του, το εμβαδόν όμως παραμένει **σταθερό** και ίσο με τη μονάδα.

Αν πάρουμε το όριο της $\delta_{\Delta}(t)$ όταν $\Delta \rightarrow 0$ ορίζουμε τη **συνάρτηση Δέλτα** ή **συνάρτηση Dirac** ή **κρουστική συνάρτηση** $\delta(t)$ από τη σχέση:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$



Κρουστική Συνάρτηση (2/3)

Η $\delta(t)$ δεν είναι συνάρτηση υπό την αυστηρή μαθηματική έννοια, διότι δεν ορίζεται για $t = 0$.

Εναλλακτικά, μελετούμε τη συνάρτηση $\delta(t)$ ως έναν **τελεστή** που επενεργεί σε άλλες συναρτήσεις οι οποίες είναι ομαλές στο σημείο 0 και τις οποίες ονομάζουμε **συναρτήσεις δοκιμής**.

Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε (όχι να ορίσουμε) τη συνάρτηση $\delta(t)$ ως:

$$\delta(t) = 0 \ \text{ για } \ t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(0)$$

όπου $\varphi(t)$ είναι μία συνάρτηση δοκιμής.

Κρουστική Συνάρτηση (3/3)

Ο προηγούμενος ορισμός μπορεί να γενικευθεί ώστε να περιγράψει την χρονικά μετατοπισμένη συνάρτηση $\delta(t - t_0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,\varphi(t_0)\,dt = \varphi(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\,dt = \varphi(t_0)$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει το μαθηματικό μοντέλο της διαδικασίας της **δειγματοληψίας**, η οποία αποτελεί το πρώτο από τα τρία στάδια μετατροπής ενός σήματος από αναλογική σε ψηφιακή μορφή.

Για $\varphi(t) = 1$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$$

Η συνάρτηση $\delta(t)$ είναι πολύ σημαντική επειδή ενώ η χρονική της διάρκεια τείνει στο **μηδέν**, το εμβαδόν της παραμένει ίσο με την **μονάδα**

Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης (1/2)

- $\delta(t) = \delta(-t)$

- $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

- $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$

- $\varphi(t)\, \delta(t - t_0) = \varphi(t_0)\, \delta(t - t_0)$

- $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|a|}\, \delta(t)$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)\, \varphi(t)\, dt = \frac{1}{|a|} \varphi(0)$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\, \varphi(t)\, dt = -\varphi'(0)$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\, dt = 0$

Ιδιότητες Κρουστικής Συνάρτησης (2/2)

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} A\, \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, \delta(t - t_0)\, dt = A$

- $\varphi(t)\, \delta'(t) = -\varphi'(0)\, \delta(t) + \varphi(0)\, \delta'(t)$

- $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0)\, \varphi(t)\, dt = \begin{cases} \varphi(t_0), & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & t_0 < t_1, \quad t_0 > t_2 \end{cases}$

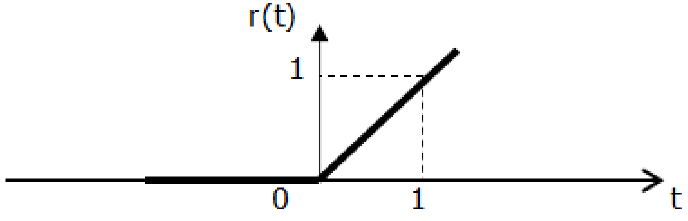
- $\int_{t_1}^{t_2} \delta(\tau - t)\delta(t - t_0)\, dt = \delta(t - t_0),\ t_1 < t_0 < t_2$

6.3. Συνάρτηση Μοναδιαίας Κλίσης (Ράμπα)

Συνάρτηση Μοναδιαίας Κλίσης

Η συνάρτηση **μοναδιαίας κλίσης** συνεχούς χρόνου, ορίζεται από τη σχέση:

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{η} \quad r(t) = t\,u(t)$$



Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[t\,u(t)] = u(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) d(\tau)$$

$$\delta(t) = \frac{d'' r(t)}{dt''}$$

6.4. Εκθετικά Σήματα

Εκθετικά Σήματα

Γενικός ορισμός εκθετικού σήματος:

$$x(t) = A\beta^{st}$$

Όπου:

- Το A ονομάζεται πλάτος του σήματος
- Το β είναι κάποιος πραγματικός αριθμός, με συνηθέστερη τιμή $\beta = e = 2{,}171828$.
- Το s μπορεί να παίρνει πραγματικές (θετικές ή αρνητικές) ή μιδαγικές τιμές και καθορίζει σε σημαντικό βαθμό τη συμπεριφορά του σήματος.

Ακολουθεί ανάλυση με βάση τις διαφορετικές τιμές του s.

Πραγματικά Εκθετικά Σήματα (1/2)

(α) s αρνητικός

Αν $s = -1/T,$ το σήμα γράφεται $x(t) = Ae^{-t/T}$.

Το Τ ονομάζεται **σταθερά χρόνου** και περιγράφει την ταχύτητα με την οποία ελαττώνεται το σήμα.

- Για $t = T$ έχουμε:

$$x(T) = A\, e^{-1} = 0{,}368\, A$$

- Για $t = 5T$ έχουμε:

$$x(T) = A\, e^{-5} = 0{,}0067\, A$$

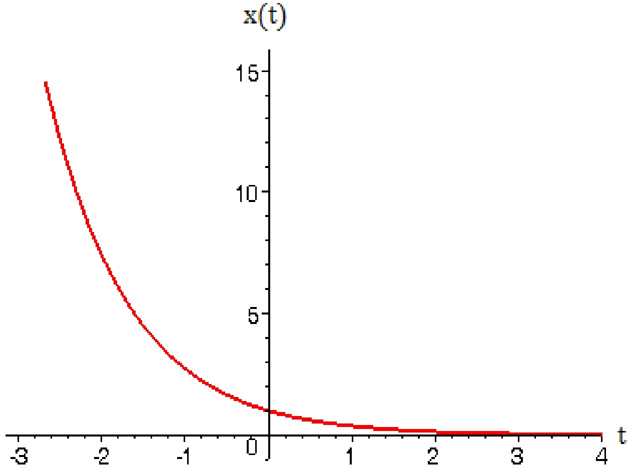
Παρατηρούμε ότι μετά από την πάροδο **πέντε (5) μονάδων χρόνου**, το εκθετικό σήμα λαμβάνει μία **αμελητέα τιμή** σε σχέση με το πλάτος του.

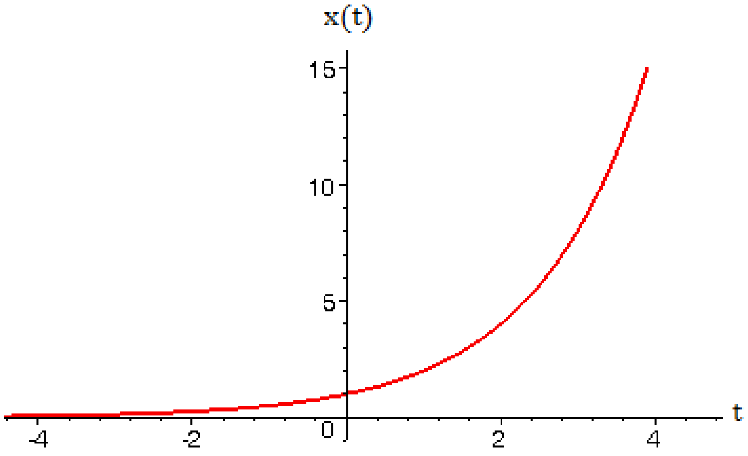
Πραγματικά Εκθετικά Σήματα (2/2)

(β) s θετικός

Αν $s = 1/T$, το σήμα γράφεται $x(t) = Ae^{\frac{t}{T}}$.

Τα συμπεράσματα είναι ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση.





Εκθετικό σήμα για $s = -1/T$ Εκθετικό σήμα για $s = 1/T$

Σχέσεις του Euler

Στην ανάλυση των μιγαδικών συναρτήσεων χρησιμοποιείται συχνά η σχέση του **Euler**, δηλαδή:

$$e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση $\theta = -\theta$ έχουμε:

$$e^{-j\theta} = cos\theta - jsin\theta$$

Προσθαφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, αποκτούμε τις αντίστροφες σχέσεις του Euler που εκφράζουν τις συναρτήσεις συνημιτόνου και ημιτόνου σε ισοδύναμες μιγαδικές μορφές:

$$cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right]$$

$$j\ sin\theta = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right]$$

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα

Αν $s = j\omega_0$ το σήμα γράφεται $x(t) = A\, e^{j\omega_0 t}$, όπου το $j = \sqrt{-1}$ είναι η φανταστική μονάδα.

Τα εκθετικά μιγαδικά σήματα δεν έχουν φυσική υπόσταση αλλά χρησιμοποι-ούνται στη Θεωρία Σημάτων, καθώς απλουστεύουν την άλγεβρα των πράξεων.

Με βάση τις σχέσεις του Euler, έχουμε:

$$A\, cos(\omega_0 t + \varphi) = A\, Re\{e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\}$$
$$A\, sin(\omega_0 t + \varphi) = A\, Im\{e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\}$$

όπου $Re\{.\}$ και $Im\{.\}$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού, αντίστοιχα.

Επομένως, ένα σήμα **συνημιτόνου** μπορεί να θεωρηθεί ως το **πραγματικό μέρος** ενός μιγαδικού εκθετικού σήματος και ένα **ημιτονικό** ως το **φανταστικό μέρος** του.

Μιγαδικά Εκθετικά Σήματα

Ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί επίσης και ως:

$$x(t) = A\, e^{j(\omega_0 t+\varphi)} = X\, e^{j\omega_0 t}$$

όπου η ποσότητα $X = A\, e^{j\varphi}$ ονομάζεται **μιγαδικό πλάτος** του σήματος.

Επειδή το σήμα μπορεί να γραφεί και ως:

$$x(t) = A\, e^{j(\omega_0 t+\varphi)} = A\, cos\omega_0 t + j\, A\, sin\, \omega_0 t$$

- Συμπεραίνουμε ότι το μιγαδικό εκθετικό σήμα $x(t)$ είναι ένα **περιοδικό σήμα** με **θεμελιώδη περίοδο** $T_0 = 2\pi/\omega_0\ (sec)$.

- Η **συχνότητα** του σήματος δίνεται από τη σχέση $f_0 = \omega_0/2\pi\ (Hertz)$, όπου $\omega_0\ (rad/\mathrm{sec})$ είναι η κυκλική συχνότητα.

- Η ποσότητα φ ονομάζεται **φάση** και είναι ένα μέτρο της σχετικής θέσης στο χρόνο για χρονικό διάστημα μίας περιόδου.

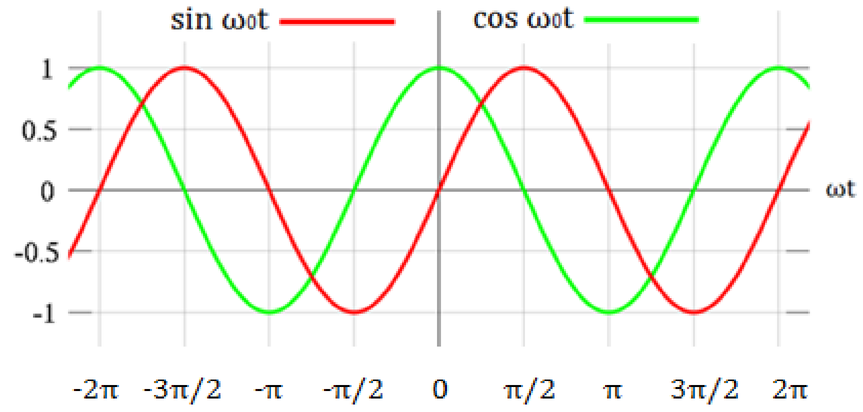
6.5. Ημιτονοειδή Σήματα

Ημιτονοειδή Σήματα

Η γενική σχέση που περιγράφει ένα ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου είναι:

$$x(t) = A\,cos\,(\omega_0 t + \theta) = A\,sin\left(\omega_0 t + \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Οι συναρτήσεις ημιτόνου και συνημιτόνου εμφανίζουν μία σταθερή διαφορά φάσης $\pi/2$ (90ο).



Το ημιτονοειδές σήμα είναι περιοδικό με **θεμελιώδη περίοδο** $T_0 = 2\pi/\omega_0\ (sec)$ και **συχνότητα** $f_0 = \omega_0/2\pi = 1/T_0\ (Hertz)$. Η ποσότητα φ ονομάζεται γωνία φάσης ή απλά **φάση**.

Τα ημιτονοειδή είναι μία ιδιαίτερα χρήσιμη κατηγορία περιοδικών σημάτων, επειδή αντιστοιχούν σε πολλά σήματα του πραγματικού κόσμου, όπως τα ηχητικά κύματα, τα ηλεκτρικά ρεύματα, κλπ.

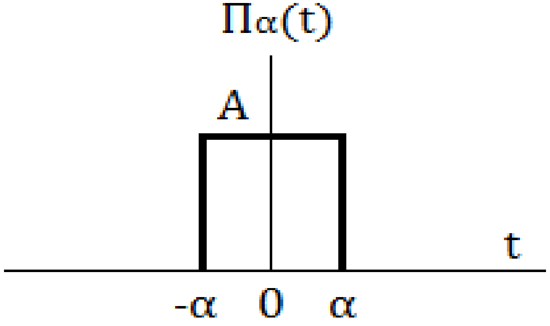
Επιπλέον, σήματα που δεν είναι ημιτονοειδή μπορούν να γραφούν ως άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων με την **ανάλυση Fourier**.

6.6. Τετραγωνικός Παλμός

Τετραγωνικός Παλμός

Τετραγωνικός παλμός διάρκειας α και πλάτους A:

$$\Pi_\alpha(t) = \begin{cases} A, & t < |a| \\ 0, & t > |a| \end{cases}$$

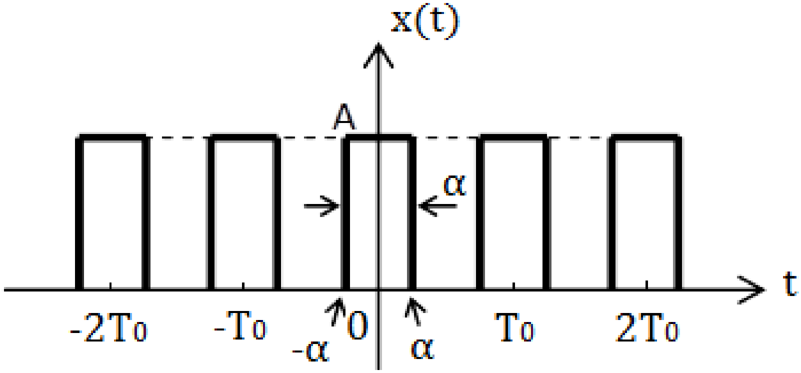


Ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να παραχθεί από την αφαίρεση δύο συναρτήσεων μοναδιαίου βήματος, δηλαδή από τη σχέση:

$$\Pi_\alpha(t) = A[\, u(t+a) - u(t-a)]$$

Επαναλαμβανόμενοι παλμοί με περίοδο T_0 δημιουργούν ένα «τραίνο παλμών», το οποίο είναι περιοδικό σήμα με περίοδο T_0 και διάρκεια παλμού α.

Το τραίνο παλμών έχει ενδιαφέρον στις ψηφιακές επικοινωνίες επειδή προσεγγίζει τις μεταδιδόμενες παλμοσειρές που περιγράφουν τα δείγματα ενός ψηφιακού σήματος.

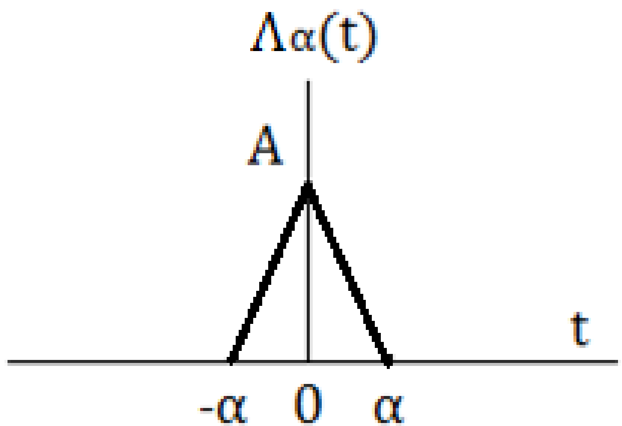


6.7. Τριγωνικός Παλμός

Τριγωνικός Παλμός

Τριγωνικός παλμός διάρκειας α και πλάτους A:

$$\Lambda_\alpha(t) = \begin{cases} A\left(1 - \dfrac{|t|}{a}\right), & t < |a| \\ 0, & t > |a| \end{cases}$$

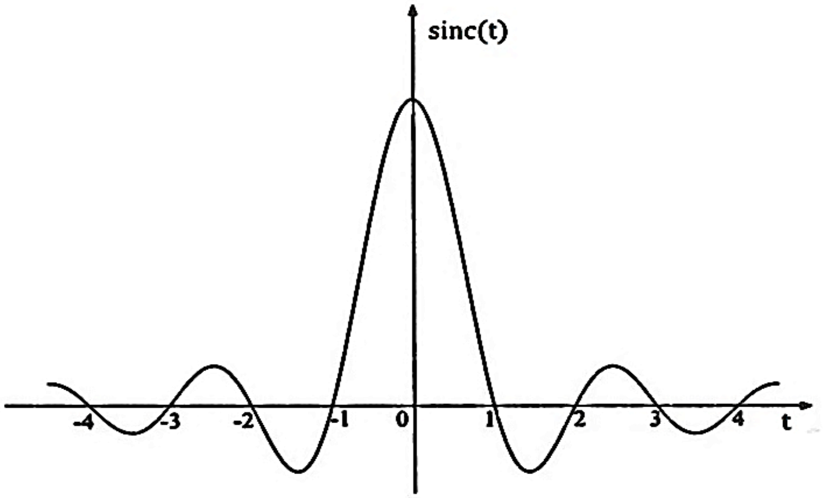


6.8. Συνάρτηση Δειγματοληψίας

Συνάρτηση Δειγματοληψίας

Συνάρτηση δειγματοληψίας:

$$sinc(t) = \begin{cases} \sin(t)\,/t & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Η συνάρτηση $sinc(t)$ έχει άρτια συμμετρία
- Διέρχεται περιοδικά από το μηδέν για $t = \pm n\pi, \quad n = 1{,}2 \ldots$
- Το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώνεται ασυμπτωτικά προς το μηδέν.
- Οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές της συμβαίνουν περίπου στο μέσο των αποστάσεων μεταξύ των σημείων μηδενισμού, δηλαδή περίπου για $t = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, όπου $|sint| = 1$.

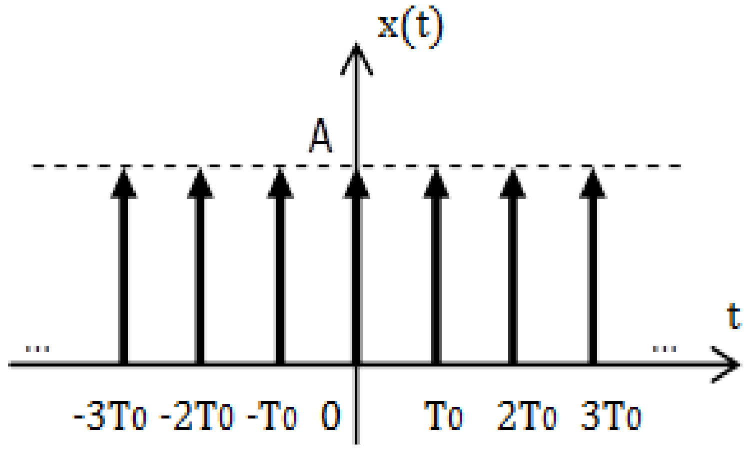
6.9. Τραίνο κρουστικών συναρτήσεων (σήμα Comb)

Τραίνο κρουστικών συναρτήσεων (comb)

Αν επαναλάβουμε τη συνάρτηση $\delta(t)$ με περίοδο T_0, δημιουργούμε το «τραίνο κρουστικών συναρτήσεων» (συνάρτηση $comb$):

$$comb(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

Αποδεικνύεται ότι η σειρά του δεξιού μέλους, συγκλίνει. Έτσι, η συνάρτηση $comb(t)$ είναι δυνατό να οριστεί.



Δειγματοληψία Σήματος Συνεχούς Χρόνου (1/2)

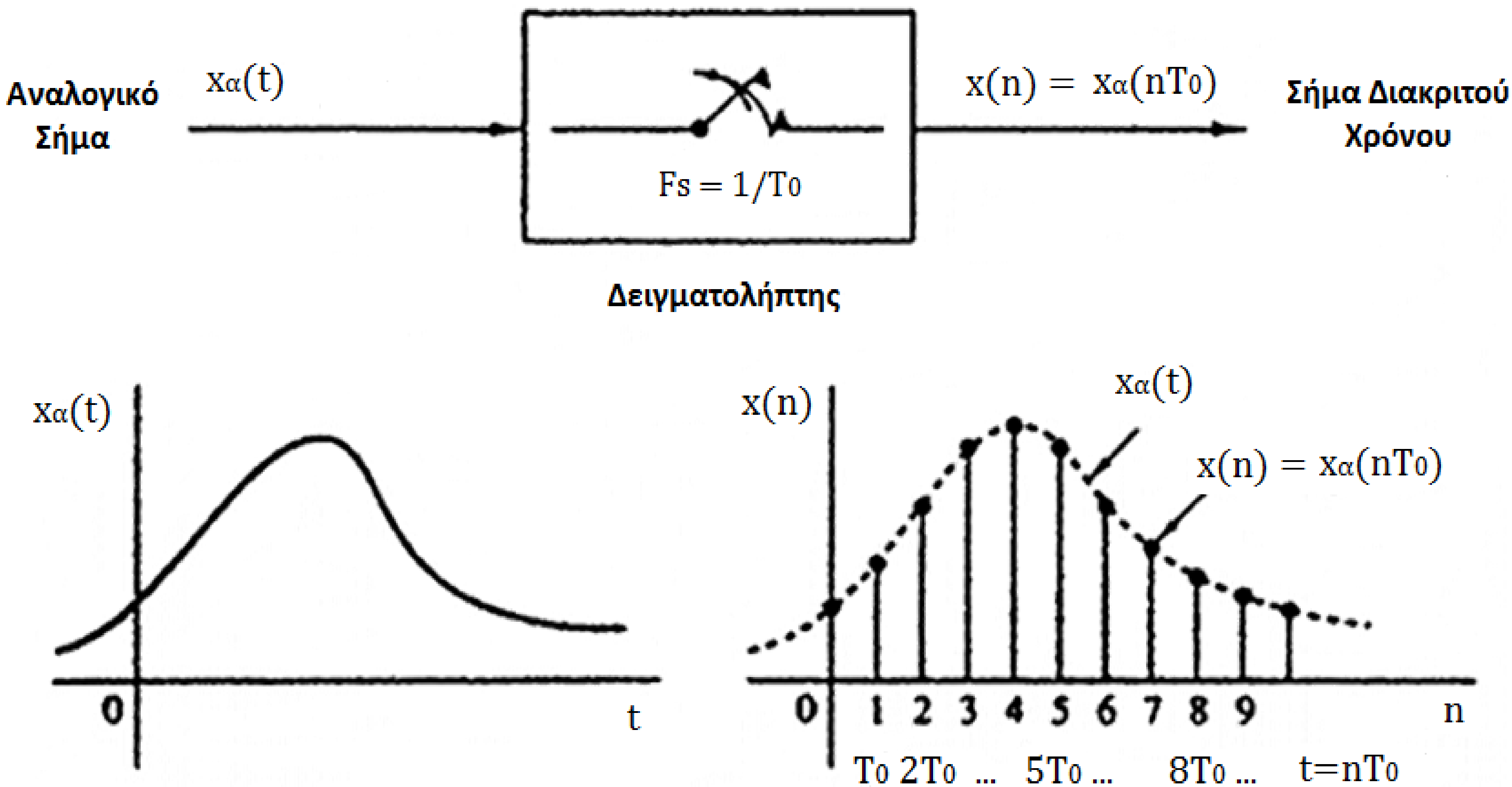
Με τη συνάρτηση $comb(t)$ υλοποιούμε τη **δειγματοληψία** ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_0 ίση με την περίοδο της $comb(t)$.

Το σήμα συνεχούς πλάτους και διακριτού χρόνου $y(t)$, που προκύπτει από τη δειγματοληψία του σήματος $x(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T_0, είναι:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_0)\, \delta(t - kT_0) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

Οι συναρτήσεις $\delta(t - kT_0)$ επιτρέπουν την καταγραφή των τιμών του σήματος $x(t)$ κατά τις χρονικές στιγμές nT_0 $όπου$ $n = -\infty, \ldots, -1,0,1, \ldots, \infty$, οδηγώντας έτσι στη δειγματοληψία του σήματος $x(t)$.

Δειγματοληψία Σήματος Συνεχούς Χρόνου (2/2)

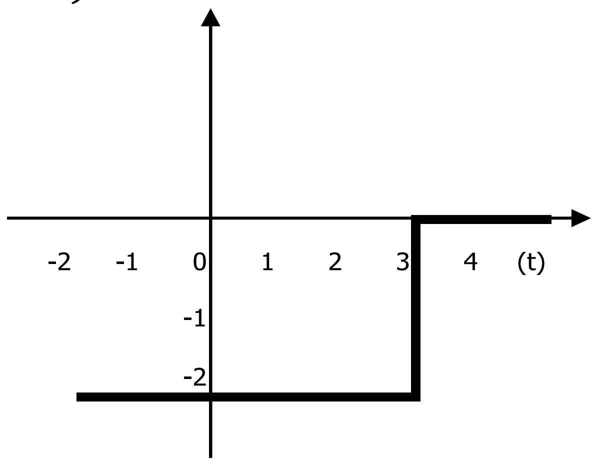


Διαδικασία δειγματοληψίας αναλογικού σήματος

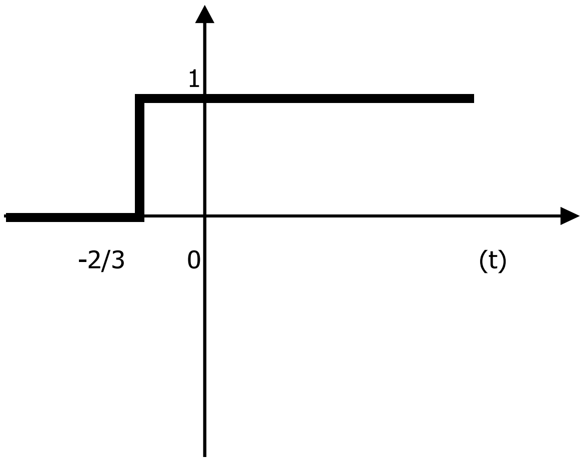
Άσκηση 10

Να σχεδιάσετε τα σήματα:

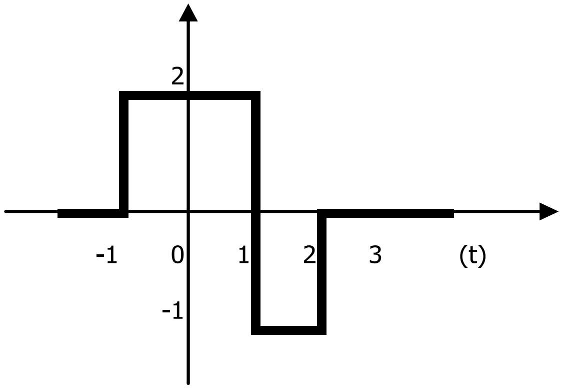
1) $-2u(3-t)$



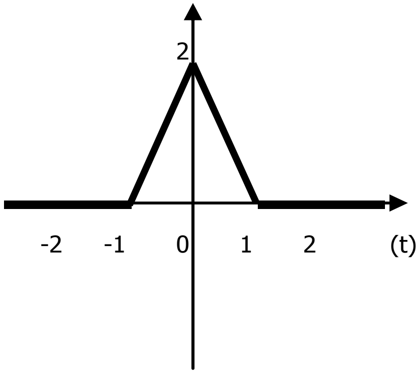
2) $u(3t+2)$



3) $2u(t+1) - 3u(t-1) + u(t-2)$



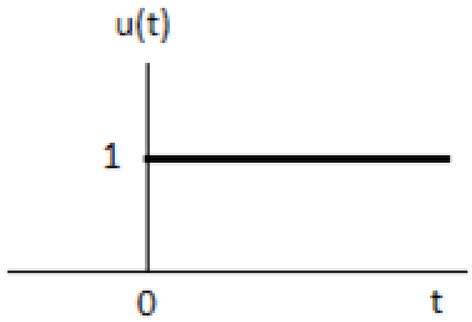
4) $2r(t+1) - 4r(t) + 2r(t-1)$



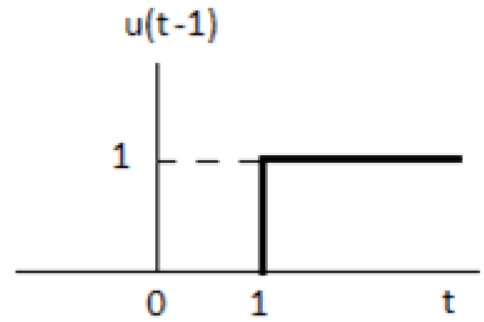
Άσκηση 11

Να σχεδιάσετε το σήμα $x(t) \ = \ u(t+2) - u(t-1)$

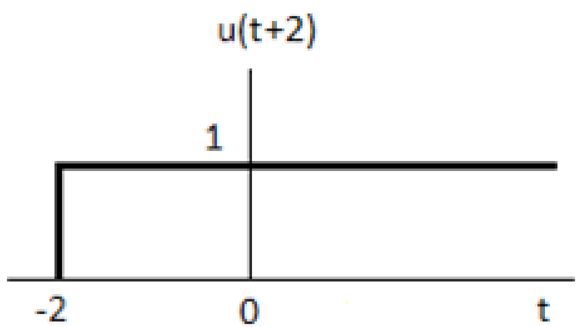
<u>Απάντηση</u>: Στα σχήματα (α) – (δ) απεικονίζονται τα βήματα δημιουργίας του $x(t)$ (σχήμα δ), το οποίο είναι το άθροισμα των $u(t), u(t-1)$ και $u(t+2)$ (σχήματα α, β και γ, αντίστοιχα).



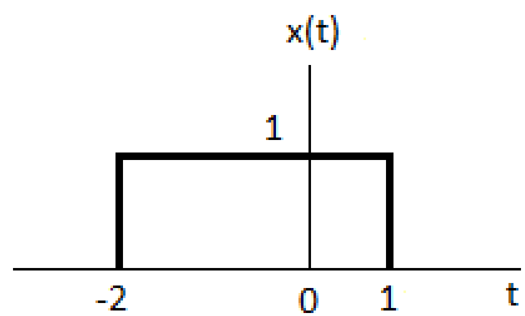
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Άσκηση 12

Να υπολογίσετε την τιμή καθενός από τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1) $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\,\delta(t-1)\,dt$ 2) $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\,\delta'(t-1)\,dt$

3) $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\,\delta''(t-1)\,dt$ 4) $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\delta^{(3)}(t-1)\,dt$

<u>Απάντηση</u>: Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\int_{t_1}^{t_2}\delta(\tau - t)\delta(t - t_0)\,dt = \delta(t - t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, έχουμε:

1. $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\delta(t-1)dt = [\,t^2 + 3t - 1\,]_{t=1} = 3$

2. $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\,\delta'(t-1)\,dt = -\,[(t^2 + 3t - 1)'\,]_{t=1} = -5$

3. $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\,\delta''(t-1)\,dt = (-1)^2\,[(t^2 + 3t - 1)''\,]_{t=1} = 2$

4. $\int_0^{+\infty}(t^2 + 3t - 1)\delta^{(3)}(t-1)\,dt = (-1)^3\,[(t^2 + 3t - 1)^{(3)}\,]_{t=1} = 0$

Άσκηση 13

Να υπολογίσετε την τιμή καθενός από τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1. $\int_0^{+\infty} t\, u(2-t)\, u(t)\, dt$

2. $\int_0^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{2}-1\right)(t^2+2)\, dt$

3. $\int_0^{+\infty} \delta'(t-1)e^{-t}\, u(t)\, dt$

<u>Απάντηση</u>:

1. $\int_0^{+\infty} t\, u(2-t)\, u(t)\, dt = \int_0^2 t\, dt = 2$

2. $\int_0^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{2}-1\right)(t^2+2)\, dt$. Θέτοντας $t' = \frac{t}{2} - 1$ έχουμε:

$$\int_0^{+\infty}[\delta(t')(2t'+2)^2+2]\, dt = \int_0^{+\infty} \delta(t')(4t'^2+8t'+6)\, dt = 6$$

3. $\int_0^{+\infty} \delta'(t-1)e^{-t}\, u(t)\, dt = [(e^{-t})']_{t=1} = e^{-1}$

Άσκηση 14

Να αποδειχθεί πως το εκθετικό μιγαδικό σήμα $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

<u>Απάντηση</u>: Αν είναι περιοδικό το $x(t)$ θα ικανοποιεί τη σχέση $x(t+T) = x(t)$, όπου T θετικός αριθμός. Άρα:

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow e^{j\omega_0 t}\, e^{j\omega_0 T} = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow \boldsymbol{e^{j\omega_0 T} = 1}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Για $\omega_0 = 0$ έχουμε ένα σήμα σταθερών τιμών $x(t) = 1$ και επομένως είναι περιοδικό με οποιαδήποτε τιμή περιόδου.
- Για $\omega_0 \neq 0$ το εκθετικό μιγαδικό σήμα είναι θα περιοδικό για εκείνες τις τιμές της περιόδου T που ικανοποιούν τη σχέση $\omega_0 T = 2\pi m$. Δηλαδή:

$$T = m\frac{2\pi}{\omega_0}\ , \qquad m = 1, 2, \dots$$

Επομένως, η θεμελιώδης περίοδος του σήματος αντιστοιχεί στην τιμή $m = 1$ και είναι η $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Μέρος 2: Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

1. Εισαγωγή στα Συστήματα
2. Μελέτη των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων
3. Γραφική Μέθοδος Υπολογισμού του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

2. Εισαγωγή στα Συστήματα

1. Εισαγωγή στα Συστήματα

1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων
   – Συστήματα Συνεχούς Χρόνου
   – Συστήματα Διακριτού Χρόνου
2. Συνδέσεις Συστημάτων
3. Είδη Συστημάτων
   – Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
   – Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
   – Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
   – Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
   – Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

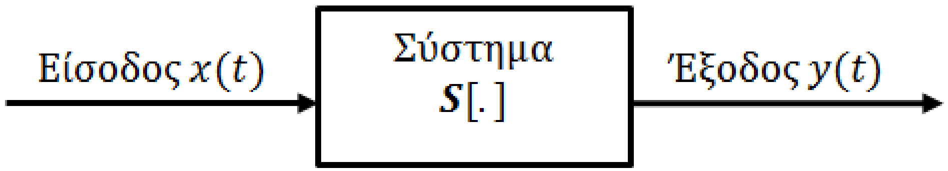
1.1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων

Ορισμός Συστήματος

Σύστημα είναι κάθε οντότητα που επενεργεί σε κάποιο σήμα $x(t)$ και ως αποτέλεσμα παράγει ένα (νέο) σήμα $y(t)$.

Από μαθηματική άποψη ένα σύστημα θεωρείται ως ένας μετασχηματισμός $\boldsymbol{S}[.]$ που μετασχηματίζει ένα σήμα $x(t)$ σε ένα άλλο σήμα $y(t)$, σύμφωνα με τη σχέση $y(t) = \boldsymbol{S}[x(t)]$.

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται **σχέση εισόδου – εξόδου** και περιγράφει ένα σύστημα στο πεδίο του χρόνου (time domain) με βάση την είσοδο και την έξοδό του, αγνοώντας πλήρως την εσωτερική δομή και περιγραφή του συστήματος.



Σχηματική περιγραφή συστήματος

Το σήμα $x(t)$ που διεγείρει το σύστημα λέγεται **είσοδος** του συστήματος, ενώ το αποτέλεσμα της διαδικασίας διέγερσης, δηλαδή το σήμα $y(t)$ λέγεται **έξοδος** του συστήματος.

Κατηγορίες Συστημάτων (1/3)

(Α) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα **μιας εισόδου - μιας εξόδου** (SISO – Single Input, Single Output). Παραδείγματα απλών συστημάτων μιας εισόδου - μιας εξόδου είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιαστής $y(t) = \alpha\, x(t)$ και το σύστημα καθυστέρησης $y(t) = x(t - t_0)$.

- Συστήματα με **πολλές εισόδους και μία έξοδο** (MISO – Multiple Input, Single Output). Παράδειγμα τέτοιων συστημάτων είναι ο αθροιστής δύο ή περισσοτέρων σημάτων $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ και ο πολλαπλασιαστής $y(t) = x_1(t)\, x_2(t)$.

- Συστήματα με **μία είσοδο και πολλές εξόδους** (SIMO – Single Input, Multiple Output).

- Συστήματα με **πολλές εισόδους και πολλές εξόδους** (MIMO – Multiple Input, Multiple Output).

Κατηγορίες Συστημάτων (2/3)

(A) Ανάλογα με τη **φύση των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα **συνεχούς χρόνου** ή **αναλογικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι αναλογικά σήματα.

  Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι σήματα διακριτού χρόνου, τότε τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως συστήματα **διακριτού χρόνου**.

- **Αιτιοκρατικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι απλά αιτιοκρατικά σήματα.

  Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι στοχαστικά σήματα, τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως **στοχαστικά συστήματα**.

Κατηγορίες Συστημάτων (3/3)

- **Σύστημα συνεχούς χρόνου** (ΣΣΧ) (continuous time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου **συνεχούς χρόνου** $x(t)$ και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου **συνεχούς χρόνου**:

$$y(t) = S[x(t)]$$

- **Σύστημα διακριτού χρόνου** (ΣΔΧ) (discrete time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου $\{x(n)\}$ **διακριτού χρόνου** και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου $\{y(n)\}$ **διακριτού χρόνου:**

$$\{y(n)\} = T[\{x(n)\}]$$

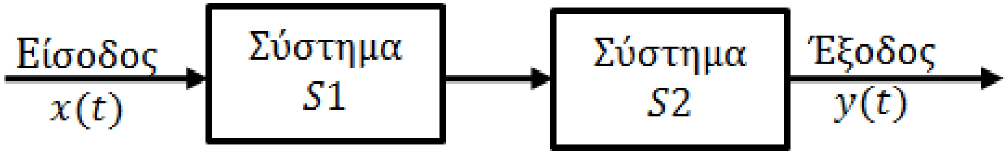
1.2. Συνδέσεις Συστημάτων

Συνδέσεις Συστημάτων (1/2)

Ένα σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερα συστήματα τα οποία διασυνδέονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους.

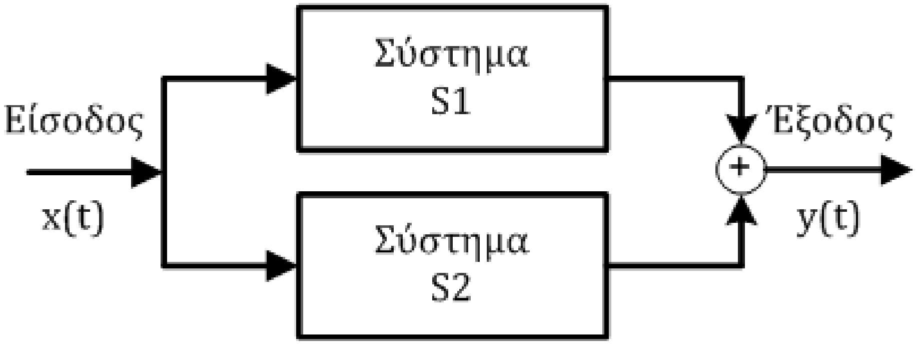
Οι βασικότερες συνδέσεις μεταξύ συστημάτων είναι η **σειριακή**, η **παράλληλη**, η **μεικτή** και η σύνδεση με **ανατροφοδότηση** ή **ανάδραση**.

- **Σειριακή σύνδεση συστημάτων**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S2[\,S1[x(t)]\,]$

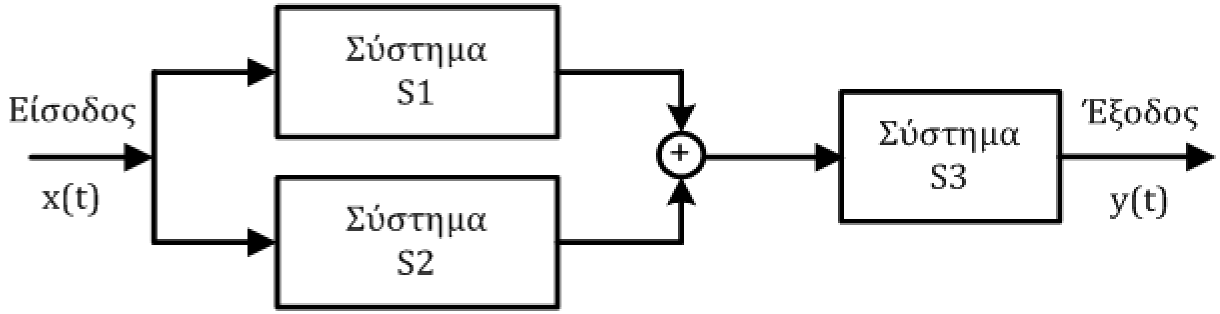
- **Παράλληλη σύνδεση συστημάτων**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S1[x(t)] + S2[x(t)]$

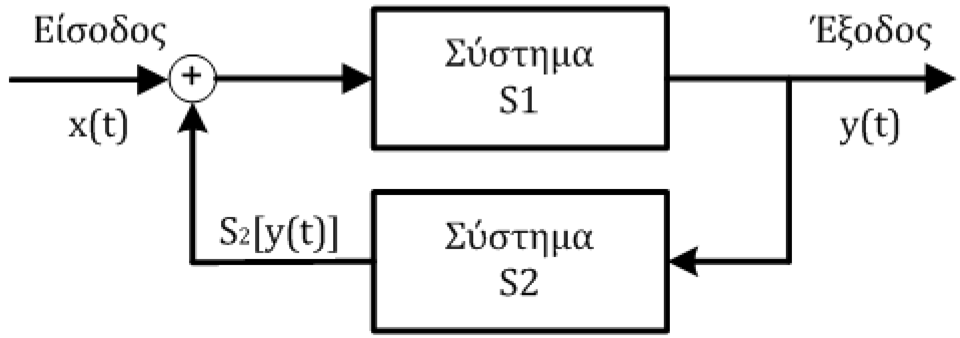
Συνδέσεις Συστημάτων (2/2)

- **Μεικτή σύνδεση συστημάτων**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S3\big[\,S1[x(t)] + S2[x(t)]\big]$

- **Σύνδεση συστημάτων με ανάδραση**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S1[x(t) + S2[y(t)]]$

1.3. Είδη Συστημάτων

Είδη Συστημάτων

Ένα σύστημα βρίσκεται σε **κατάσταση ηρεμίας** τη χρονική στιγμή t_0, εάν δεν έχει υποστεί διέγερση από κάποιο σήμα για $t < t_0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει αποθηκευμένη ενέργεια κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

Είδη συστημάτων που βρίσκονται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας:

- Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
- Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
- Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
- Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
- Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα

Ένα σύστημα που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία ονομάζεται **γραμμικό**, όταν και μόνον όταν δοθέντων δύο σημάτων εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ισχύει η σχέση:

$$S[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 S[x_1(t)] + a_2 S[x_2(t)]$$

Δηλαδή, η απόκριση του συστήματος σε είσοδο που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος σε καθένα από τα σήματα αυτά.

Αυτή είναι η **αρχή της υπέρθεσης** (επαλληλίας - superposition) και επεκτείνεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό σημάτων:

$$x_1(t) \xrightarrow{S} y_k(t), \qquad k = 1,2,\dots,M$$

τότε για βαθμωτά a_k, $k = 1,2,\dots,M$, έχουμε:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k x_k(t) \xrightarrow{S} y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k\, y_k(t)$$

Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα

- Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** (causal) όταν η **παρούσα τιμή της εξόδου** του **δεν εξαρτάται** από **μελλοντικές τιμές της εισόδου**.
- Δηλαδή, για κάθε σήμα εισόδου $x(t)$ η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την παρούσα ή/και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου.
- Αντίστροφα, αν η έξοδος $y(t_0)$ τη χρονική στιγμή t_0 **εξαρτάται** από μεταγενέστερες τιμές του σήματος εισόδου $x(t)$, δηλ. για $t \geq t_0$, τότε το σύστημα είναι **μη-αιτιατό**.
- Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι αιτιατό αν οι μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) του συστήματος, ποτέ **δεν προηγούνται** των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο του συστήματος (αιτία).
- Όλα τα φυσικά παθητικά συστήματα έχουν την ιδιότητα της **αιτιότητας**.

Στατικά και Δυναμικά Συστήματα (1/2)

- Ένα σύστημα καλείται **στατικό** ή **σύστημα χωρίς μνήμη**, εάν για κάθε σήμα εισόδου η αντίστοιχη έξοδος για κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την **ίδια** χρονική στιγμή και όχι από προηγούμενες ή μελλοντικές τιμές της.
- Εάν ένα σύστημα δεν είναι στατικό, τότε καλείται **δυναμικό** ή **σύστημα με μνήμη**.
- Η έξοδος ενός δυναμικού συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή, αλλά επίσης και από (μερικές τουλάχιστον) προηγούμενες τιμές της εισόδου (και σε αιτιατά συστήματα και από μελλοντικές τιμές).
- Ένα σύστημα που η έξοδός του τη χρονική στιγμή t προσδιορίζεται πλήρως από τις τιμές της εισόδου στο διάστημα $t-T$ έως t (ισχύει $T \geq 0$), λέμε ότι έχει **μνήμη μήκους $\boldsymbol{T}$**.
- Εάν το T έχει μία πεπερασμένη τιμή, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα **πεπερασμένης μνήμης**, ενώ αν $T \to \infty$ το σύστημα είναι γνωστό ως σύστημα **άπειρης μνήμης**.
- Ένα στατικό σύστημα έχει μηδενική μνήμη ($T = 0$).

Στατικά και Δυναμικά Συστήματα (2/2)

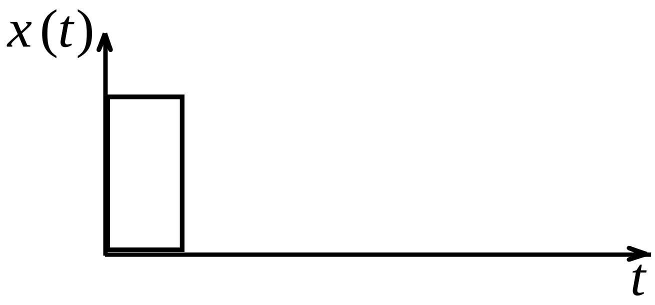
Παραδείγματα στατικών και δυναμικών συστημάτων:

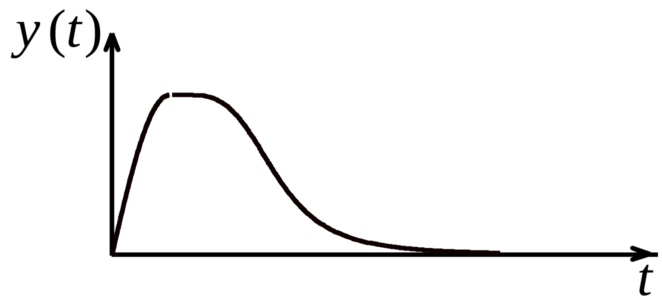
- Η ωμική αντίσταση είναι **σύστημα χωρίς μνήμη**, αφού η τάση στα άκρα της $u_R(t)$ (έξοδος) σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από το ρεύμα $i(t)$ (είσοδος), που την διαρρέει κατά την ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή ισχύει:

$$u_R(t) = R\, i(t)$$

- Ο πυκνωτής είναι ένα **σύστημα με μνήμη**, αφού η τάση $u_c(t)$ στα άκρα του σε κάθε χρονική στιγμή είναι αποτέλεσμα όλου του ιστορικού του ρεύματος $i(t)$ που τον διαρρέει:

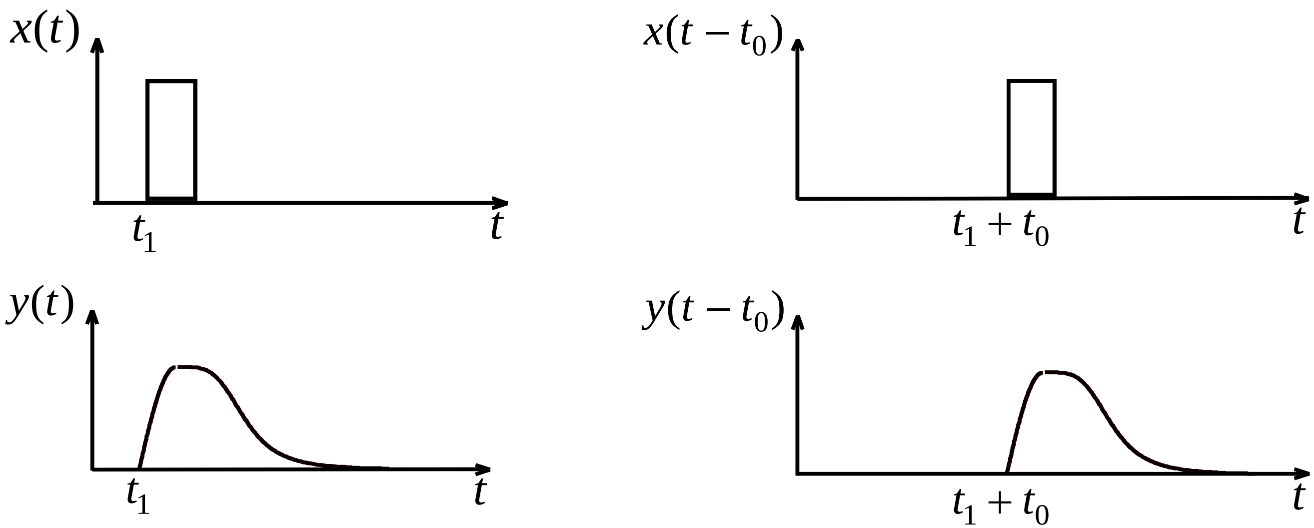
$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$





Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα

- Ένα σύστημα λέγεται **χρονικά αμετάβλητο** ή **χρονικά αναλλοίωτο**, όταν και μόνον όταν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στο σήμα εξόδου.
- Σε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα αν ένα σήμα εισόδου $x(t)$ προκαλεί έξοδο $y(t)$, τότε ένα σήμα εισόδου $x(t - t_0)$ παράγει σήμα εξόδου $y(t - t_0)$.



- Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, υπολογίζουμε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t)$. Αν ισχύει $y(t) \; = \; y(t - t_0)$ για κάθε είσοδο $x(t)$ και κάθε ολίσθηση t_0 τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

- Ένα σύστημα διαθέτει ευστάθεια **Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Εξόδου** και ονομάζεται **ΦΕΦΕ ευσταθές** όταν και μόνον όταν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδός του παραμένει φραγμένη.

- Ένα σύστημα είναι ΦΕΦΕ-ευσταθές (BIBO – bounded input bounded output) όταν για κάθε θετικό αριθμό $M_1 < \infty$ για τον οποίο ισχύει $|x(t)| \leq M_1$, υπάρχει (θετικός) αριθμός $M_2 < \infty$ για τον οποίο να ισχύει $|y(t)| \leq M_2$.

- Η έννοια αυτή της ευστάθειας ενός συστήματος ταυτίζεται με την απαίτηση τα σήματα εισόδου και εξόδου να παραμένουν πεπερασμένα (φραγμένα) σε πλάτος.

Άσκηση 1

Να ελέγξετε αν ισχύει η ιδιότητα της γραμμικότητας στο σύστημα με σχέση εισόδου - εξόδου $y(t) = sin\{x(t)\}$.

<u>Απάντηση</u>: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του συστήματος, τότε η έξοδος του είναι $y_1(t) = sin\{x_1(t)\}$. Αν η είσοδός είναι το σήμα $x_2(t)$, η έξοδος είναι $y_2(t) = sin\{x_2(t)\}$.

Αν στην είσοδο του συστήματος θέσουμε τον γραμμικό συνδυασμό $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$, τότε η έξοδος $y(t)$ είναι:

$$y(t) = sin(a_1 x_1(t) + \ a_2 x_2(t)) \neq sin(a_1 x_1(t)) + sin(a_2 x_2(t)) = y'(t)$$

Όπου $y'(t)$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των εξόδων $y_1(t)$ και $y_2(t)$, δηλαδή:

$$y'(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

Επειδή ισχύει $y(t) \neq y'(t)$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Άσκηση 2

Να ελέγξετε ως προς τη γραμμικότητα το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t-1)}$$

Απάντηση: Για τις εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$, οι έξοδοι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι:

$$y_1(t) = \frac{x_1(t)}{1+x_1(t-1)} \text{ και } y_2(t) = \frac{x_2(t)}{1+x_2(t-1)}$$

Θέτοντας ως είσοδο τον γραμμικό συνδυασμό $x(t) = a_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, η έξοδος $y(t)$ είναι:

$$y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t-1)} = \frac{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)}{1 + \alpha_1 x_1(t-1) + \alpha_2 x_2(t-1)}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός $y'(t)$ των εξόδων $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι:

$$y'(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \ = \alpha_1 \frac{x_1(t)}{1 + x_1(t-1)} + \alpha_2 \frac{x_2(t)}{1 + x_2(t-1)}$$

Παρατηρούμε ότι $y(t) \neq y'(t)$. Άρα το δοθέν σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Άσκηση 3

Για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα, να εξετάσετε αν είναι αιτιατά ή όχι.

1) $y(t) = x^3(t+3)$ 2) $y(t) = e^{-\alpha t}\, u(t)$

<u>Απάντηση</u>:

1) Είναι μη αιτιατό, επειδή η έξοδος εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

2) Είναι αιτιατό, επειδή η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου. Υπενθυμίζεται ότι η μοναδιαία συνάρτηση βήματος

Άσκηση 4

Ποια από τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις εισόδου – εξόδου είναι στατικά και ποια δυναμικά;

1) $y(t) = \alpha x(t)$

2) $y(t) = x^2(t)$

3) $y(t) = x(t) + 2x(t-1)$

4) $y(t) = y(t-1) + x(t)$

<u>Απάντηση</u>:

1) Είναι στατικό, επειδή η έξοδος στην χρονική στιγμή t εξαρτάται από την είσοδο μόνο στην ίδια χρονική στιγμή.
2) Είναι στατικό (ομοίως).
3) Είναι δυναμικό, επειδή η έξοδος στην χρονική στιγμή t εξαρτάται από την είσοδο σε προγενέστερη χρονική στιγμή.
4) Είναι δυναμικό, επειδή η έξοδος στην χρονική στιγμή t εξαρτάται από την έξοδο σε προγενέστερη χρονική στιγμή, άρα και από την είσοδο σε προγενέστερη στιγμή.

Άσκηση 5

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = t\, x(t)$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

Απάντηση:

Στο δοθέν σύστημα θέτουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ όπου t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης και λαμβάνουμε ως έξοδο $y(t) = t\, x(t - t_0)$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή δεν ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = (t - t_0)\, x(t - t_0)$.

Επομένως, το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

Άσκηση 6

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = cos[\ x(t)\ ]$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

<u>Απάντηση</u>: Στο δοθέν σύστημα θέτουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ όπου t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης και έχουμε ως έξοδο $y(t) = cos[\ x(t - t_0)\ ]$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = cos[\ x(t - t_0)\ ]$.

Επομένως, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Άσκηση 7

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = x(t)\ sin(t)$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

Απάντηση: Στο δοθέν σύστημα για είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ (t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης), η έξοδος είναι $y(t) = x(t - t_0)\sin(t)$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή δεν ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = x(t - t_0)\ sin(t - t_0)$.

Επομένως το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

Άσκηση 8

Να ελέγξετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου είναι ΦΕΦΕ ευσταθές ή όχι:

$$y(t) = x(t)\, sin(\omega t)$$

<u>Απάντηση</u>:

Από τη σχέση ορισμού του συστήματος και λαμβάνοντας υπόψη ότι $|\sin \omega t| \leq 1$, έχουμε:

$$|y(t)| = |x(t)\, sin(\omega t)| = |x(t)\,||sin(\omega t)| \leq |x(t)|$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει ότι αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη, τότε και η έξοδος $y(t)$ θα είναι επίσης φραγμένη.

Επομένως το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

Άσκηση 9

Να ελέγξετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου είναι ΦΕΦΕ ευσταθές ή όχι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

<u>Απάντηση</u>:

Ας θεωρήσουμε ότι ως είσοδο $x(t)$ στο σύστημα δίνουμε μια φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή ότι ισχύει: $|x(t)| \leq a$. Η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται ως:

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leq \int_{-\infty}^{t} \alpha\, d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{t} d\tau = \infty$$

Επομένως, η έξοδος δεν είναι φραγμένη, άρα το σύστημα είναι ασταθές.

2. Μελέτη των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων

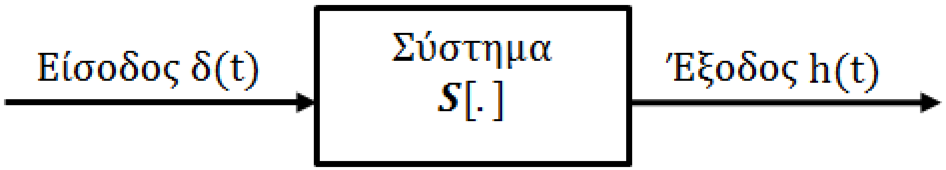
2.1. Κρουστική Απόκριση Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων

Κρουστική Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Κρουστική απόκριση** ονομάζεται η έξοδος που παράγει ένα σύστημα όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$.

- Αν το σύστημα είναι **γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο** (ΓΧΑ), η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \boldsymbol{S}[\delta(t)]$$



- Αν το σύστημα είναι **γραμμικό αλλά όχι και χρονικά αμετάβλητο** , η κρουστική απόκριση $h(t,\tau)$ του συστήματος με είσοδο την μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t-\tau)$ που εφαρμόζεται κατά τη χρονική στιγμή τ, είναι:

$$h(t,\tau) = \boldsymbol{S}[\delta(t-\tau)]$$

2.2. Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε ΓΧΑ Συστήματα

- Αποδεικνύεται ότι η έξοδος $y(t)$ ενός **ΓΧΑ συστήματος** που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία και έχει κρουστική απόκριση $h(t)$, όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το σήμα $x(t)$, δίνεται από:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

- Το ολοκλήρωμα ονομάζεται **συνέλιξη** (convolution) ή δίπλωση ή συνελικτικό ολοκλήρωμα μεταξύ των συναρτήσεων $x(t)$ και $h(t)$ και συμβολικά γράφεται ως:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Αν το σύστημα εκτός από **ΓΧΑ είναι και αιτιατό** τότε η συνέλιξη απλοποιείται σε:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

2.3. Αναλυτικός Υπολογισμός του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

Αναλυτικός Υπολογισμός

- Ο αναλυτικός υπολογισμός χρησιμοποιείται όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ μπορούν να παρασταθούν από απλές αναλυτικές εκφράσεις.
- Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ είναι ασυνεχείς ή διαθέτουν διαφορετική αναλυτική παράσταση για διάφορα διαστήματα χρόνου.
- Αν δοθούν δύο συναρτήσεις $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ που ορίζονται αντίστοιχα στα διαστήματα $\{L_1, U_1\}$ και $\{L_2, U_2\}$, εκλέγουμε σαν κάτω όριο ολοκλήρωσης το $max(L_1, L_2)$ και σαν άνω όριο ολοκλήρωσης το $max(U_1, U_2)$.
- Τα όρια L_1 και U_1 της συνάρτησης $x(\tau)$ δεν μεταβάλλονται, ενώ αντίθετα τα όρια της συνάρτησης $h(t-\tau)$ μεταβάλλονται καθώς μεταβάλλεται το t.
- Η γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων βοηθά στην εύρεση των σωστών ορίων ολοκλήρωσης.

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος **μέσης τιμής**:

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

<u>Απάντηση</u>: Η κρουστική απόκριση του συστήματος μέσης τιμής $h(t)$ είναι ίση με την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η συνάρτηση $\delta(t)$, δηλαδή:

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} du(\tau) = \frac{1}{T}u(t)\Big|_{t-T}^{\;t} = \frac{1}{T}[u(t) - u(t-T)]$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι:

$$\delta(\tau) = \frac{du(\tau)}{d\tau}$$

Άσκηση 11

Το σύστημα που ονομάζεται **διαμορφωτής** περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου-εξόδου:

$$y(t) = \boldsymbol{S}[x(t)] = x(t)\,cos(\omega_0 t)$$

Να εξετάσετε αν ο διαμορφωτής είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και αιτιατό σύστημα και κατόπιν υπολογίσετε την κρουστική απόκρισή του.

<u>Απάντηση</u>: (α) Έλεγχος γραμμικότητας: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του διαμορφωτή, τότε η έξοδος του είναι $y_1(t) = \boldsymbol{S}[x_1(t)] = x_1(t)\,cos(\omega_0 t)$ και αν είσοδος είναι το $x_2(t)$ τότε η έξοδος είναι $y_2(t) = \boldsymbol{S}[x_2(t)] = x_2(t)\,cos(\omega_0 t)$. Αν η είσοδος του συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $\alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)$, τότε η έξοδος είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\,cos(\omega_0 t) \\ &= [\alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)]\,cos(\omega_0 t) \\ &= \alpha_1[x_1(t)\,cos(\omega_0 t)] + \alpha_2[x_2(t)\,cos(\omega_0 t)] \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

Επομένως ότι το σύστημα είναι **γραμμικό**.

Άσκηση 11(συνέχεια)

(β) Έλεγχος χρονικής μεταβλητότητας: Αν το σήμα $x(t)$ είναι η είσοδος του διαμορφωτή τότε η έξοδος είναι $y(t) = x(t)\ cos(\omega_0 t)$. Η απόκριση του συστήματος στο σήμα $x(t - t_0)$ είναι $y_1(t) = x(t - t_0) cos(\omega_0 t)$. Παρατηρούμε ότι γενικά ισχύει $y_1(t) \neq y(t - t_0)$, δηλαδή ο διαμορφωτής είναι σύστημα **χρονικά μεταβαλλόμενο**.

(γ) Έλεγχος αιτιότητας: Ο διαμορφωτής είναι **αιτιατό** σύστημα εφόσον η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου του.

Επειδή το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση της συνέλιξης , επειδή αυτή ισχύει μόνο για ΓΧΑ συστήματα.

Επομένως θα υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του διαμορφωτή από τη γενικότερη σχέση $h_\tau(t) = \boldsymbol{S}[\ \delta(t - \tau)\ ]$, οπότε έχουμε:

$$h_\tau(t) = \delta(t - \tau)\ cos(\omega_0 t) = \delta(t - \tau)\ cos(\omega_0 \tau)$$

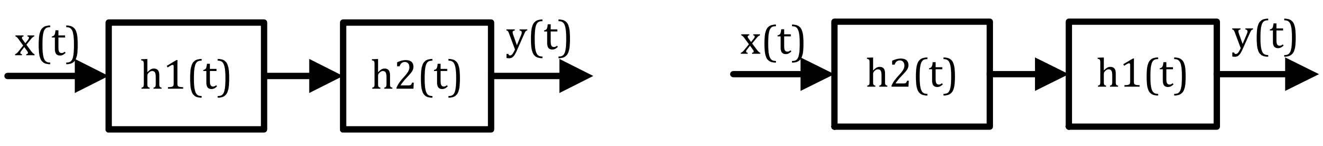
2.4. Ιδιότητες της Συνέλιξης

Αντιμεταθετική ιδιότητα

Η αντιμεταθετική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

Η φυσική σημασία της ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, από το οποίο προκύπτει πως αν δύο συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά τότε μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά σύνδεσής τους χωρίς να αλλάξει η τελική έξοδος $y(t)$.



Προσεταιριστική ιδιότητα

Η προσεταιριστική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

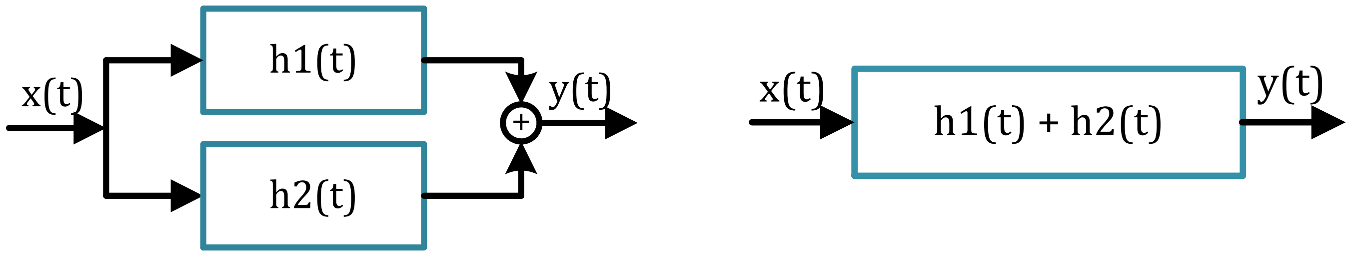
Η φυσική σημασία της προσεταιριστικής ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, από το οποίο προκύπτει πως όταν δύο συστήματα συνδέονται σε σειρά μπορούν να αντικατασταθούν με ένα τρίτο σύστημα, το οποίο έχει κρουστική απόκριση ίση με τη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των δύο σε σειρά συνδεμένων συστημάτων.

Επιμεριστική ιδιότητα

Η επιμεριστική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας, αν δύο συστήματα συνδεθούν παράλληλα τότε μπορούν να αντικατασταθούν από ένα τρίτο σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων.



Ταυτοτική ιδιότητα

Η ταυτοτική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Η ταυτοτική ιδιότητα υποδηλώνει ότι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ είναι το **ουδέτερο στοιχείο** της πράξης της συνέλιξης.

Κατ' αναλογία, ισχύει και η ακόλουθη ιδιότητα, η οποία χρησιμοποιείται στη διαδικασία της διαμόρφωσης:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Λοιπές Ιδιότητες

- Η **ιδιότητα της ομογένειας** περιγράφεται από τη σχέση:

$$[a\, x(t)] * h(t) = a[x(t) * h(t)] = x(t) * [a\, h(t)]$$

- Η **ιδιότητα του εύρους** αναφέρει ότι η χρονική διάρκεια της συνέλιξης $z(t) = x(t) * y(t)$ δύο σημάτων συνεχούς χρόνου $x(t)$ και $y(t)$ με διάρκεια T_1 και T_2, αντίστοιχα, ισούται με το άθροισμα των χρόνων $T_1 + T_2$.

Άσκηση 12

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ και $y(t) = e^{-\beta t}u(t)$. Θεωρήστε $\alpha \neq \beta, \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

<u>Απάντηση</u>: Η συνέλιξη των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}\, u(\tau)\, e^{-\beta(t-\tau)}\, u(t-\tau)\, d\tau$$

όπου οι βηματικές συναρτήσεις $u(\tau)$ και $u(t-\tau)$ ορίζονται ως:

$$u(\tau) = \begin{cases} 1\ \gamma\iota\alpha\ \tau > 0 \\ 0\ \gamma\iota\alpha\ \tau < 0 \end{cases} \text{ και } u(t-\tau) = \begin{cases} 1\ \gamma\iota\alpha\ \tau < t \\ 0\ \gamma\iota\alpha\ \tau > t \end{cases}$$

Στη γενική περίπτωση το παραπάνω ολοκλήρωμα θα πρέπει να υπολογισθεί στο άπειρο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Ωστόσο, η ύπαρξη των δύο βηματικών συναρτήσεων περιορίζει τον υπολογισμό στην περιοχή $0 < \tau < t$, αφού οι βηματικές συναρτήσεις είναι και οι δύο διάφορες του μηδενός (και ίσες με τη μονάδα) μόνο στο διάστημα $0 < \tau < t$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού.

Άσκηση 12(συνέχεια)

Με βάση τη διαπίστωση αυτή, βρίσκουμε ότι:

$$z(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}\, e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau = e^{-\beta t} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{-\beta t} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha}\right]_0^t = \frac{e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}\left[e^{(\beta-\alpha)t} - 1\right] = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για την περιοχή τιμών $t > 0$ και επειδή για $t < 0$ είναι $z(t) = 0$ μπορούμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω περιπτώσεις σε μία απλή εξίσωση γράφοντας:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} & \gamma\iota\alpha\ t > 0 \\ 0 & \gamma\iota\alpha\ t < 0 \end{cases} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} u(t)$$

3. Γραφική Μέθοδος Υπολογισμού του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

Γραφικός Υπολογισμός

Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια της συνέλιξης $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- **Ανάκλαση της $\boldsymbol{h(\tau)}$**. Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση $h(\tau)$ και παράγουμε την $h(-\tau)$.
- **Χρονική μετατόπιση της $\boldsymbol{h(-\tau)}$ κατά $\boldsymbol{t}$**. Μετατοπίζουμε την $h(-\tau)$ κατά t και έτσι προσδιορίζουμε την $h(t-\tau)$.
- **Πολλαπλασιασμός της $\boldsymbol{h(t-\tau)}$ με την είσοδο $\boldsymbol{x(\tau)}$** ώστε να υπολογίσουμε το γινόμενο $x(\tau)\, h(t-\tau)$.
- **Ολοκλήρωση** ή Εμβαδομέτρηση. Ολοκληρώνουμε το γινόμενο αυτό (ή υπολογίζουμε το εμβαδό του σήματος που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου). Το αποτέλεσμα είναι ίσο με την έξοδο του συστήματος $y(t)$ κατά τη χρονική στιγμή t, δηλ. κατά την ποσότητα της μετατόπισης στο βήμα 2.
- **Επανάληψη**. Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για τις διάφορες τιμές του χρόνου t, δηλ. $-\infty < t < +\infty$.

Άσκηση 13

Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος δίνεται από τη σχέση: $h(t) = e^{-t}u(t)$. Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος, όταν η είσοδός του είναι το σήμα $x(t) \; = \; u(t) \; - \; u(t-2)$.

<u>Απάντηση</u>: Με τη βοήθεια του σχήματος παρατηρούμε ότι $h(t-\tau)\, x(\tau) = 0$ για κάθε $t < 0$. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι: $y(t) = 0$ όταν $t < 0$

Στο σχήμα (ε) η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης $h(t-\tau)$ έχει μετατοπιστεί κατά $0 \le t \le 2$. Η έξοδος του συστήματος είναι:

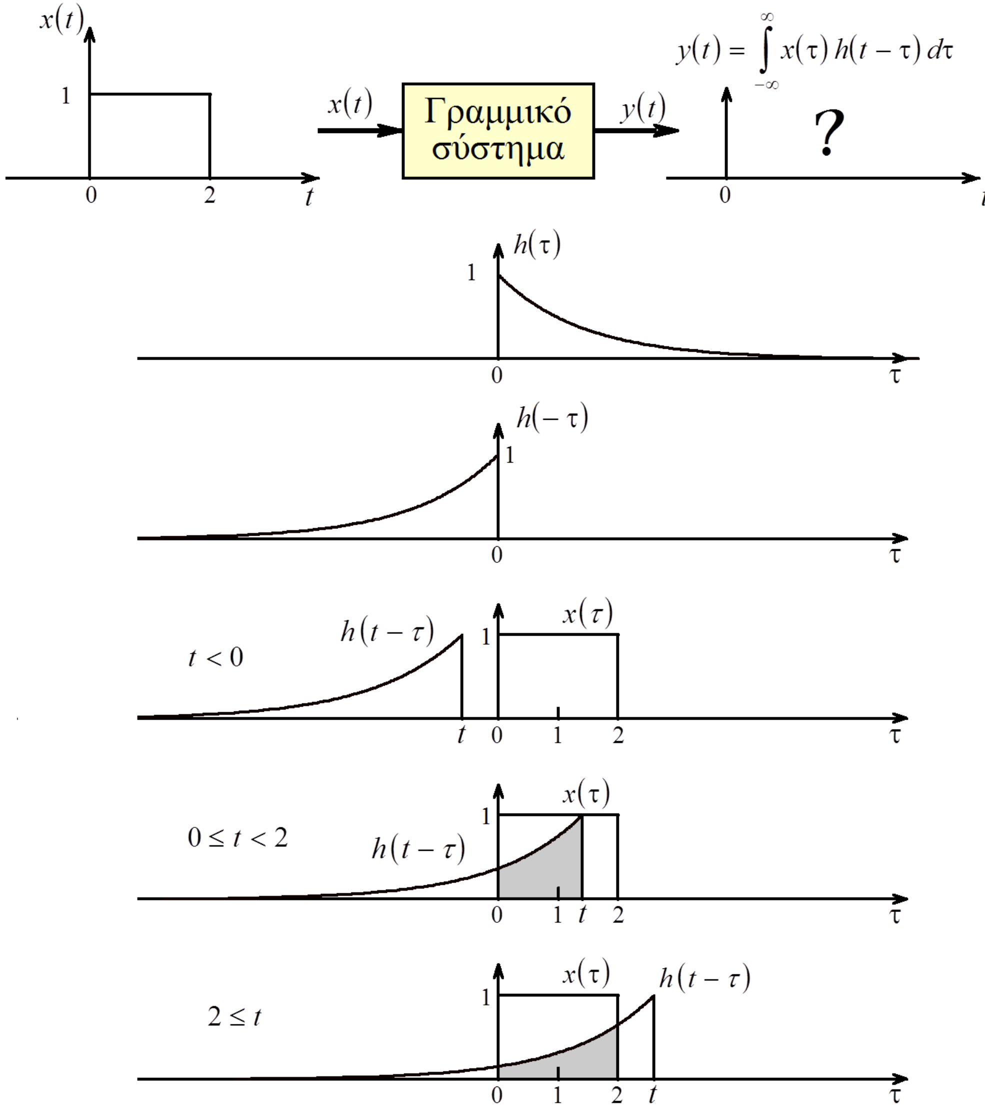
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)dt$$

και επειδή, όταν $\tau < 0$ είναι $x(\tau) = 0$, ενώ όταν $\tau > t$ είναι $h(t-\tau) = 0$, τα όρια του ολοκληρώματος γίνονται:

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)dt = \int_{0}^{t} 1.\, e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{\tau-t}\Big|_{0}^{t} = 1 - e^{-t}, \qquad 0 \le t \le 2$$

που είναι ίσο με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου σχήματος, στο σχήμα (ε).

Άσκηση 13(συνέχεια)



Άσκηση 13(συνέχεια)

Όταν $t > 2$, με τη βοήθεια του σχήματος (στ), βρίσκουμε:

$$y(t) = \int_0^2 1.\, e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{\tau-t}\Big|_0^2 = e^{2-t} - e^{-t} = (e\rrbracket^2 - \llbracket 1)e^{-t}, t > 2$$

Επομένως, η έξοδος $y(t)$ του συστήματος είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \leq t < 2 \\ (e^2 - 1)e^{-t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση 18

Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση:

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το σήμα:

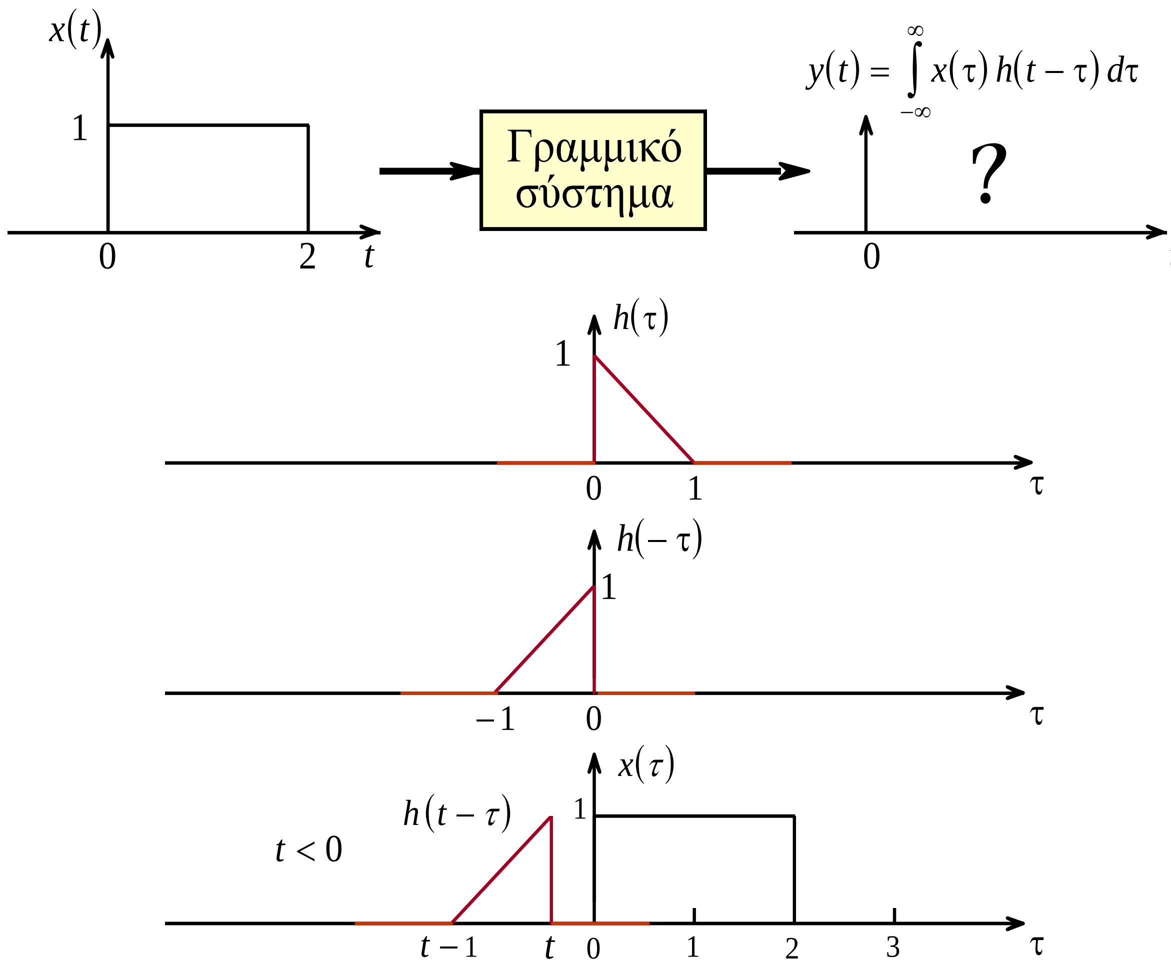
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Το ΓΧΑ σύστημα και η είσοδος του περιγράφονται στο σχήμα (α).

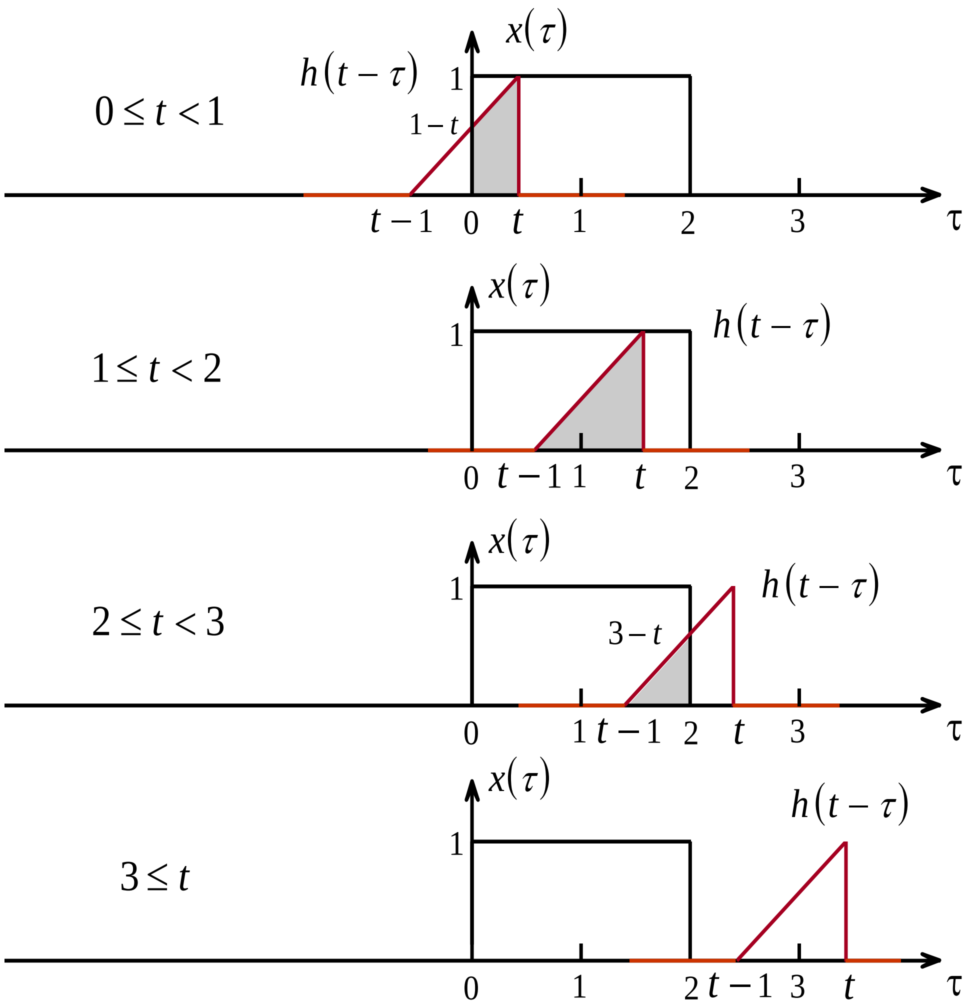
Στο σχήμα (β) δίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος, στο σχήμα (γ) δίνεται η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, $h(-\tau)$, στο σχήμα (δ) η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $t < 0, h(t-\tau)$.

Παρατηρούμε ότι $h(t-\tau)\, x(\tau) = 0$ για $t < 0$. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι $y(t) = 0$ όταν $t < 0$. Στο σχήμα (ε) η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης $h(t-\tau)$ έχει μετατοπιστεί κατά $0 \leq t \leq 1$.

Άσκηση 18 (συνέχεια)



Άσκηση 13(συνέχεια)



Άσκηση 13(συνέχεια)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που περιγράφουν την είσοδο $x(t)$ και την κρουστική απόκριση $h(t)$, η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) = \int_{0}^{t} 1\, h(t-\tau) = t - \frac{t^2}{2}, \qquad \text{όταν } 0 < t < 1$$

και είναι ίση με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο σχήμα (ε).

Στο σχήμα (στ) η $h(t-\tau)$ έχει μετατοπιστεί κατά $1 \le t \le 2$. Η έξοδος του συστήματος είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου στο σχήμα (στ) και δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} 1\, h(t-\tau) = \frac{1}{2} \ \text{ όταν } 1 \le t \le 2$$

Άσκηση 13(συνέχεια)

Στο σχήμα (ζ) η $h(t-\tau)$ έχει μετατοπιστεί κατά $2 \leq t \leq 3$. Η έξοδος του συστήματος τώρα είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου του σχήματος (ζ) και ισούται με:

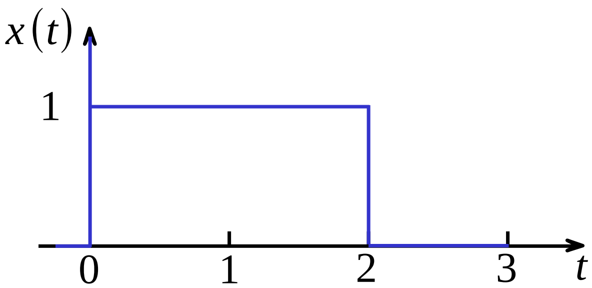
$$y(t) = \int_{t-1}^{2} 1\, h(t-\tau) = \frac{1}{2}(3-t)^2 \ \text{όταν}\ 2 \leq t \leq 3$$

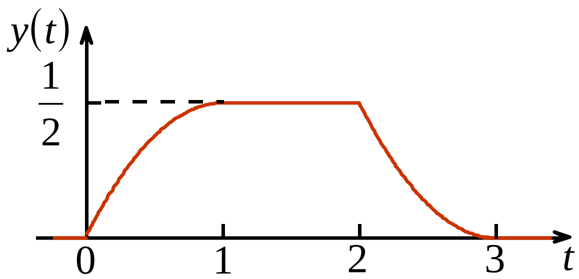
Όπως παρατηρούμε στο σχήμα (η) το γινόμενο $h(t-\tau)\, x(\tau)$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του χρόνου t μεγαλύτερη από 3. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι $y(t) = 0$ όταν $3 < t$.

Η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t) = \begin{cases} t - t^2/2 & \text{όταν}\ 0 \leq t < 1 \\ 1/2 & \text{όταν}\ 1 \leq t < 2 \\ (3-t)^2/2 & \text{όταν}\ 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 13(συνέχεια)





(α) Η είσοδος και (β) η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος

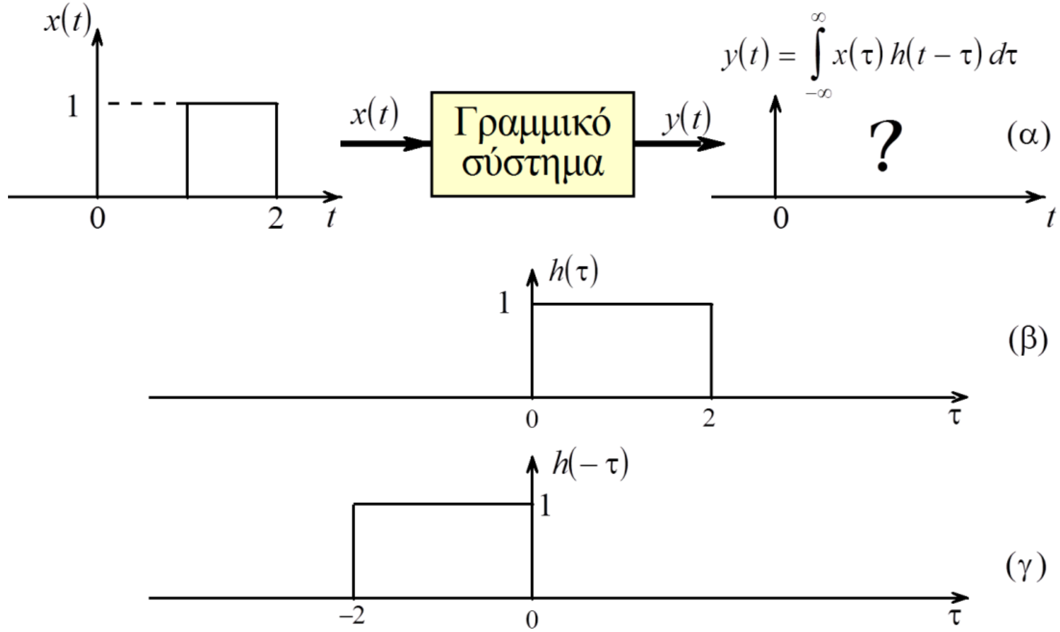
Άσκηση 14

Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $h(t) = u(t) - u(t-2)$. Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι $x(t) = u(t-1) - u(t-2)$.

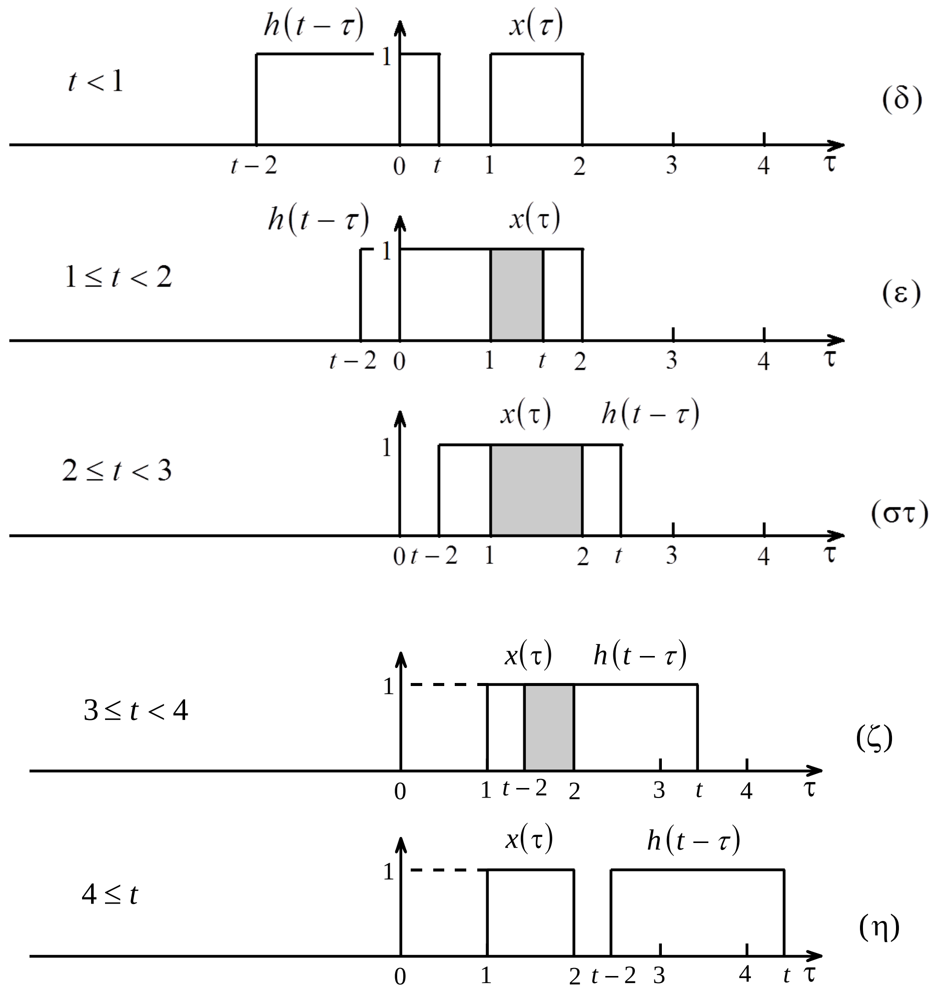
<u>Απάντηση</u>: Ακολουθώντας ίδια διαδικασία επίλυσης με τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος, η οποία είναι:

$$y(t) = \begin{cases} t-1 & \text{όταν } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{όταν } 2 \leq t < 3 \\ 4-t & \text{όταν } 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 14(συνέχεια)

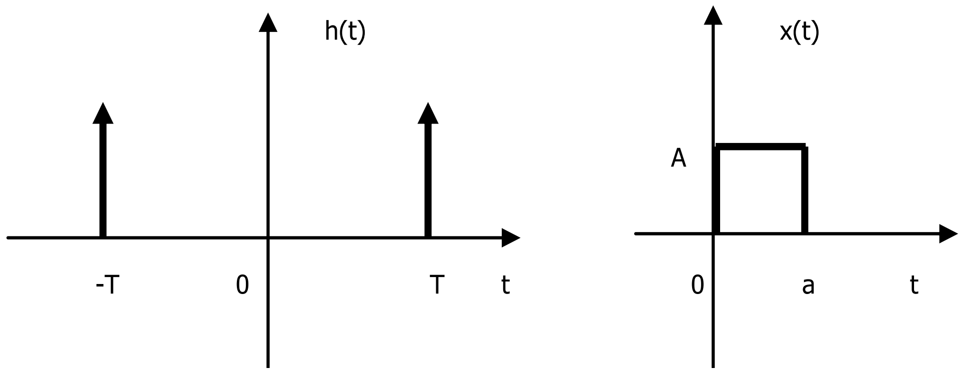


Άσκηση 14(συνέχεια)



Άσκηση 15

Να βρεθεί η συνέλιξη των συναρτήσεων του σχήματος:



<u>Απάντηση</u>: Από το σχήμα προκύπτει ότι η συνάρτηση $h(t)$ γράφεται ως $h(t) = \delta(t - T) + \delta(t + T)$. Άρα η συνέλιξη των δύο σημάτων είναι:

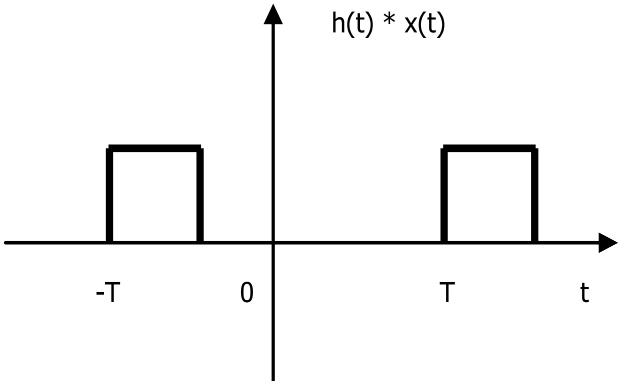
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)]\, x(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - T)\, x(t - \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau + T)\, x(t - \tau)\, d\tau$$

$$= x(t - T) + x(t + T)$$

Άσκηση 15(συνέχεια)

Το αποτέλεσμα, δηλαδή η συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$ δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι με τη συνέλιξη οποιασδήποτε συνάρτησης και κρουστικής συνάρτησης $\delta(t)$, επανασχηματίζεται η αρχική συνάρτηση, η θέση της όμως καθορίζεται από την τετμημένη της κρουστικής συνάρτησης.