Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

Διάλεξη 2: Ανάλυση Fourier και Γραμμικά Φίλτρα

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μέρος 1: Ανάλυση Fourier

Ανάλυση Fourier

1. Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier
2. Φυσική Σημασία του Μετασχηματισμού Fourier
3. Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier
4. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier
5. Θεώρημα Parceval
6. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος
7. Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με Μετασχηματισμό Fourier

1. Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier

Εισαγωγή

- Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί επέκταση των σειρών Fourier σε **περιοδικά** και **μη-περιοδικά σήματα**.
- Αποδεικνύεται ότι ένα οποιοδήποτε σήμα μπορεί να αναπτυχθεί στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ μέσω του μετασχηματισμού Fourier ως ένας **γραμμικός συνδυασμός απείρων αρμονικών εκθετικών σημάτων**.
- Όπως και στις σειρές Fourier, τα σήματα εκφράζονται με τη βοήθεια μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων διαφόρων συχνοτήτων, όμως στον μετασχηματισμό Fourier οι συχνότητες είναι **συνεχείς** και όχι διακριτές.

Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier (1/2)

Ευθύς Μετασχηματισμός Fourier (MF)

- Ορίζουμε ως **μετασχηματισμό Fourier** μίας συνάρτησης $x(t)$ τη μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $X(\omega)$, που δίνεται από τη σχέση:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

- Επιτρέπει τον υπολογισμό της χρονικής συνάρτησης $x(t)$ όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier (2/2)

Αν αντί της κυκλικής συχνότητας ω, χρησιμοποιήσουμε την **γραμμική συχνότητα** $\boldsymbol{f}$ (όπου $f = \omega/2\pi$), οι ορισμοί του ευθύ και του αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier είναι:

- Ευθύς μετασχηματισμός Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

- Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

Συμβολισμοί Μετασχηματισμού Fourier

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση $X(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- Για να δηλώσουμε ότι η $x(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $X(\omega)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

- Μερικές φορές χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συμβολισμός ως συντομογραφία των δύο συμβολισμών:

Ευθύς μετασχηματισμός Fourier	$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$
Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier	$X(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} x(t)$

- ή απλά $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$

Φάσμα Μετασχηματισμού Fourier

- Ο μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα (περιοδικό ή μη περιοδικό) σήμα $x(t)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ σε ένα **συνεχές φάσμα περιοδικών εκθετικών σημάτων**.

- Το φασματικό περιεχόμενο στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων $[\omega, \omega + d\omega]$ είναι $X(\omega)$.

- Η συνεισφορά των συχνοτήτων στο απειροστό διάστημα $[\omega, \omega + d\omega]$ έχει «πλάτος» $X(\omega)$ $(d\omega/2\pi)$.

- Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier δεν είναι ένα φάσμα πλάτους αλλά η **φασματική πυκνότητα πλάτους**.

2. Φυσική Σημασία του Μετασχηματισμού Fourier

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier (1/2)

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση, άρα γράφεται ως:

$$\mathrm{X}(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

όπου $R(\omega)$ το πραγματικό μέρος και $I(\omega)$ το φανταστικό μέρος του $X(\omega)$.

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση αποδεικνύεται ότι η $R(\omega)$ είναι **άρτια** συνάρτηση, ενώ η $\mathrm{I}(\omega)$ είναι **περιττή** συνάρτηση και δίνονται :

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)\,d\omega$$

$$I(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(\omega t)\,d\omega$$

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier (2/2)

Ο μετασχηματισμός Fourier X(ω) ως μιγαδική συνάρτηση, γράφεται επίσης ως:

$$X(\omega) = |X(\omega)| \; e^{\,j\varphi(\omega)}$$

- $|X(\omega)|$: **φάσμα πλάτους** (amplitude spectrum)
- $\varphi(\omega)$: **φάσμα φάσης** (phase spectrum)

Το φάσμα του MF είναι **συνεχές**, σε αντίθεση με το φάσμα των σειρών Fourier που είναι διακριτό.

Το πλάτος |X(ω)| και η φάση $\varphi(\omega)$ υπολογίζονται από:

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right]$$

3. Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier

Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier

Τα ολοκληρώματα ορισμού του ευθύ και του αντίστροφου MF δεν υπάρχουν πάντα.

Οι ικανές συνθήκες για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος είναι οι συνθήκες Dirichlet.

- **Ικανή Συνθήκη 1**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή να ισχύει:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt < +\infty$$

  ή με άλλα λόγια, το σήμα $x(t)$ να είναι χρονικώς πεπερασμένο δηλ. να είναι σήμα ενέργειας. Η συνθήκη αυτή είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία.

- **Ικανή Συνθήκη 2**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι συνεχής ή να περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, καθεμιά από τις οποίες να είναι πεπερασμένου ύψους.

- **Ικανή Συνθήκη 3**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι φραγμένης κύμανσης, δηλαδή να μπορεί να παρασταθεί με καμπύλη πεπερασμένου μήκους σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

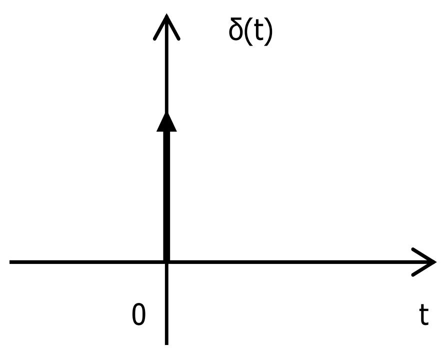
Άσκηση 1

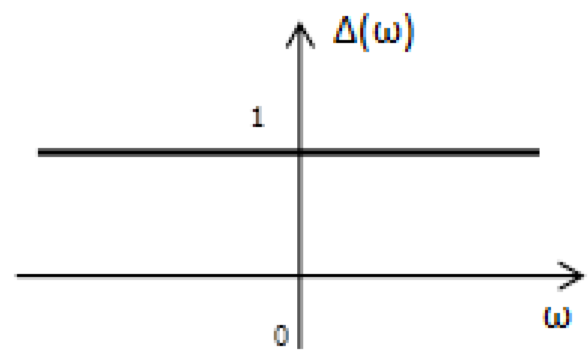
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του κρουστικού παλμού $\delta(t)$.

Απάντηση: Από τον ορισμό του MF έχουμε:

$$\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{0} = 1$$

Χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα ολίσθησης της $\delta(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$





Στο φάσμα $\Delta(\omega)$ υπάρχουν άπειρες συχνότητες με μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση. Αυτό εξηγεί την σπουδαία αξία της κρουστικής απόκρισης στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων.

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$

<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1)e^{-j\omega t}dt$$

Χρησιμοποιούμε τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(t_0)$$

Ως συνάρτηση δοκιμής θεωρούμε την $\varphi(t) = e^{-j\omega t}$, οπότε έχουμε:

$$X(\omega) = e^{-j\omega t}\Big|_{t=-1} + e^{-j\omega t}\Big|_{t=1} = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = \cos(\omega)$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = A\, e^{-\alpha t} u(t)$

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{A}{\alpha + j\omega}$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\, u(t)$

<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier και αντικαθιστώντας το συνημίτονο από τον τύπο του Euler, προκύπτει:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\, t} \left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\, t}\, e^{j\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+j\omega)\, t}\, e^{-j\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha+j(\omega-\omega_0)\right)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha+j(\omega+\omega_0)\right)t} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_0)}\right]$$

$$= \frac{\alpha + j\omega}{\alpha^2 + 2j\omega\alpha + (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού $\Pi_T(t)$ διάρκειας $2T$, δηλαδή:

$$x(t) \equiv \Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή το σήμα είναι μηδέν για $t < -T$ και $t > T$, ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

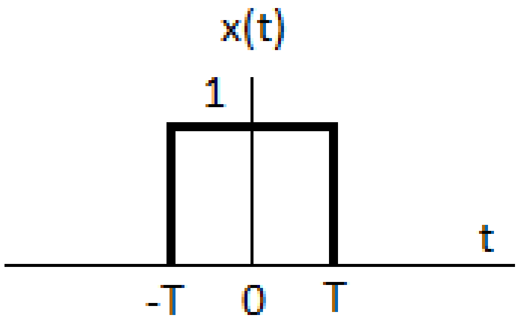
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}\, d(-j\omega t) =$$

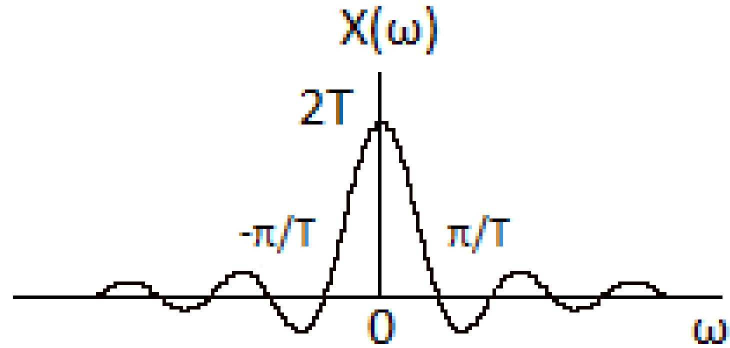
$$= \frac{j}{\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{-T}^{T} = \frac{j}{\omega} \left[e^{-j\omega T} - e^{-j\omega(-T)} \right] = \frac{j}{\omega}\, \left[e^{-j\omega T} - e^{j\omega T} \,\right] = 2\,\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

Στην επίλυση χρησιμοποιήθηκαν οι γνωστές σχέσεις του Euler, δηλ.:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + jsin\theta \;\; \text{και} \;\; e^{-j\theta} = \cos\theta - jsin\theta$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)





Ο τετραγωνικός παλμός διάρκειας 2T και ο μετασχηματισμός Fourier του.

<u>Παρατηρήσεις</u>:

1. Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ γενικά είναι μία μιγαδική συνάρτηση, όμως στην περίπτωση του τετραγωνικού παλμού είναι μια πραγματική συνάρτηση.

2. Η τιμή του μετασχηματισμού Fourier στη συχνότητα μηδέν υπολογίζεται από το παρακάτω όριο:

$$X(0) = \lim_{\omega \to 0} \frac{2\sin(\omega T)}{\omega} = \lim_{\omega \to 0} 2\,T\cos(\omega T) = 2T$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

3. Οι τιμές στις οποίες μηδενίζεται το $X(\omega)$ είναι τα **φασματικά μηδενικά**, δίνονται από την εξίσωση $\sin(\omega T) = 0$ και είναι οι συχνότητες $\omega = k\pi/T$, όπου $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier διέρχεται περιοδικά από το μηδέν και το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώνεται ασυμπτωτικά στο μηδέν.

5. Το φάσμα τείνει στο μηδέν καθώς περνάμε σε υψηλές συχνότητες, δηλαδή όταν $|\omega| \to \infty$.

Η λύση $\mathrm{X}(\omega) = 2\sin(\omega T)/\omega$ είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας $sinc(x)$.

Επομένως, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier του μπορεί να γραφεί και ως:

$$X(\omega) = \frac{2\sin(\omega \mathrm{T})}{\omega} = 2\mathrm{T}\frac{\sin\left(\pi\frac{\omega \mathrm{T}}{\pi}\right)}{\pi\frac{\omega \mathrm{T}}{\pi}} = 2\mathrm{T}sinc\left(\frac{\omega \mathrm{T}}{\pi}\right)$$

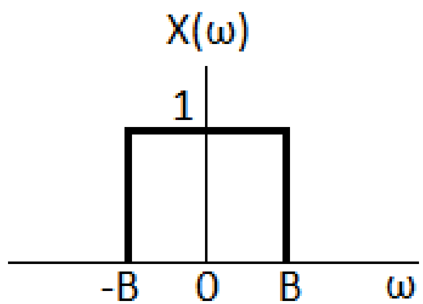
Άσκηση 6

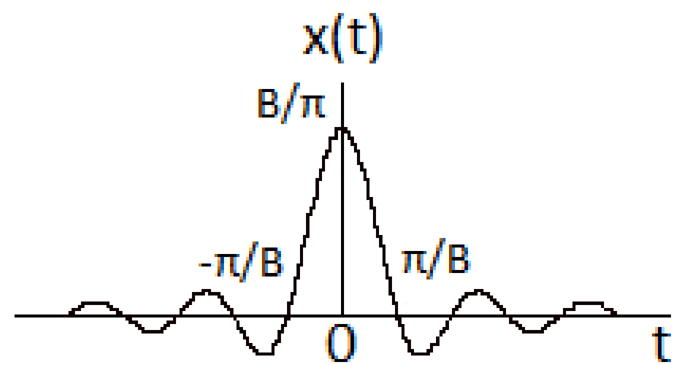
Να βρεθεί το σήμα του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι ορθογώνιο παράθυρο συχνοτήτων με πλάτος B, δηλαδή ισχύει:

$$\mathrm{X}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \mathrm{B} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος είναι ίσος με μηδέν για $\omega < -\mathrm{B}$ και $\omega > \mathrm{B}$, το σήμα θα είναι:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{B}}^{+\mathrm{B}} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi j t} e^{j\omega t}\Big|_{-\mathrm{B}}^{+\mathrm{B}} = \frac{1}{2\pi j t} 2j\sin(\mathrm{B}t) = \frac{\sin(\mathrm{B}t)}{\pi t} = \frac{B}{\pi} sinc\left(\frac{Bt}{\pi}\right)$$





Περιγραφή του $x(t)$ στα πεδία συχνότητας και χρόνου, αντίστοιχα.

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Παρατηρήσεις:

- Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, η λύση περιγράφεται από τη συνάρτηση δειγματοληψίας.
- Συγκρίνοντας την παρούσα και την προηγούμενη άσκηση παρατηρούμε μιας μορφής **συμμετρία**, δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού (στο χρόνο) είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας (στη συχνότητα) και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού (στη συχνότητα) είναι πάλι η συνάρτηση δειγματοληψίας (στο χρόνο).

Άσκηση 7

Να προσδιοριστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \mu\varepsilon \quad \alpha > 0$$

<u>Απάντηση</u>: Για να υπολογίσουμε τα φάσματα πρέπει να βρεθεί ο MF. Το σήμα $x(t)$ γράφεται και ως $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ και είναι γνωστό (άσκηση 3) ότι διαθέτει τον μετασχηματισμό Fourier :

$$X(\omega) = A/(\alpha + j\omega)$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος και τη φάση της συνάρτησης $X(\omega)$ την γράφουμε σε καρτεσιανή μορφή. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με τον όρο $\alpha - j\omega$, οπότε έχουμε:

$$X(\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega} = \frac{A}{\alpha + j\omega} . \frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} = \frac{A\alpha - jA\omega}{\alpha^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j\,\frac{A\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Άσκηση 7(συνέχεια)

Από την παραπάνω μορφή της $X(\omega)$ προκύπτει ότι:

- Φάσμα πλάτους:

$$|X(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{A\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{A\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

- Φάσμα φάσης:

$$\Theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{A\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)}{\left(\frac{A\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Άσκηση 8

Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\omega) = \frac{4 + 10j\omega}{-\omega^2 + 6j\omega + 8}$$

<u>Απάντηση</u>: Μετατρέπουμε τον παρανομαστή σε μορφή γινομένου και στη συνέχεια «σπάμε» το κλάσμα σε δύο επιμέρους κλάσματα, οπότε έχουμε:

$$X(\omega) = \frac{4 + 10j\omega}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)} = -8/(2 + j\omega) + \frac{18}{4 + j\omega}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 3, έχουμε:

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = F^{-1}\left\{-\frac{8}{2 + j\omega}\right\} + F^{-1}\left\{\frac{18}{4 + j\omega}\right\}$$

$$= -8[\![\ e]\!]\text{^}(-2t)\ u(t) + 18\ e^{-4t}u(t)$$

$$= [18\ e^{-4t} - 8\ e^{-2t}]\ u(t)$$

4. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

1. Γραμμικότητα
2. Ολίσθηση στο Χρόνο
3. Ολίσθηση στη Συχνότητα
4. Αλλαγή Κλίμακας στο Χρόνο
5. Αλλαγή Κλίμακας στη Συχνότητα
6. Ανάκλαση
7. Συζυγία
8. Συμμετρία
9. Παραγώγιση
10. Ολοκλήρωση
11. Ιδιότητα της Συνέλιξης
12. Πολλαπλασιασμός
13. Άρτιο/Περιττό Μέρος Σήματος Πραγματικό/Φανταστικό Μέρος Φάσματος

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (1/10)

1. Γραμμικότητα

Αν $x_i(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_i(\omega)$ και c_i αυθαίρετη (πραγματική ή μιγαδική) σταθερά και $i = 1,2, \dots n$, τότε ισχύει:

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega) + \cdots + c_n X_n(\omega)$$

Η σχέση δηλώνει ότι ο ΜF ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων επιμέρους ΜF για κάθε συνάρτηση.

2. Ολίσθηση στο Χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0}\, X(\omega) = \ |X(\omega)|\ e^{j\varphi(\omega) - \omega t_0}$$

Η σχέση δείχνει πως αν το σήμα μετατοπιστεί στο χρόνο κατά t_0, τότε το φάσμα του πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $e^{-j\omega t_0}$. Έτσι το φάσμα ενός σήματος ολισθημένου στο χρόνο έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό σήμα, ενώ η φάση του αλλάζει γραμμικά.

Άσκηση 9

Να αποδειχθεί η ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης του μετασχηματισμού Fourier.

<u>Απάντηση</u>: Σύμφωνα με τον ορισμό, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t-t_0)$ είναι:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t}\, dt$$

Θέτοντας $\lambda = t - t_0$, έχουμε:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda}\, e^{-j\omega t_0}\, d\lambda =$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda} d\lambda = e^{-j\omega t_0}\, X(\omega)$$

Άσκηση 10

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \Pi_T(t + 2T) + \Pi_T(t - 2T)$$

<u>Απάντηση</u>: Γνωρίζουμε ότι :

$$\Pi_T(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

Με βάση την παρατήρηση αυτή και τις ιδιότητες γραμμικότητας και ολίσθησης στο χρόνο, έχουμε:

$$\mathcal{F}\{\, x(t) \,\} = \mathcal{F}\{\, \Pi_T(t + 2T) \,\} + \mathcal{F}\{\, \Pi_T(t - 2T) \,\} =$$

$$= e^{j2\omega T}\ \frac{2\, sin\, \omega T}{\omega} + e^{-j2\omega T}\frac{2\, sin\, \omega T}{\omega}$$

$$= \frac{2\, sin\, \omega T}{\omega}\left(e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T}\right)$$

$$= \frac{4\, sin\, \omega T}{\omega} cos\, 2\omega T$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (2/10)

3. **Ολίσθηση στη Συχνότητα**

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό ω_0 ισχύει:

$$e^{j\omega_0 t}\, x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$$

Παρατηρούμε πως ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x(t)$ με τον όρο $e^{j\omega_0 t}$ μετατοπίζει το φάσμα του σήματος κατά ω_0.

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική για τις τηλεπικοινωνίες, επειδή ορίζει μαθηματικά τη διαδικασία της **διαμόρφωσης**.

Άσκηση 11

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$.

<u>Απάντηση</u>: Χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler, το σήμα $y(t)$ γράφεται:

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) = x(t)\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,x(t)\,e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$$

Με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης συχνότητας, ο ΜF του $y(t)$ είναι:

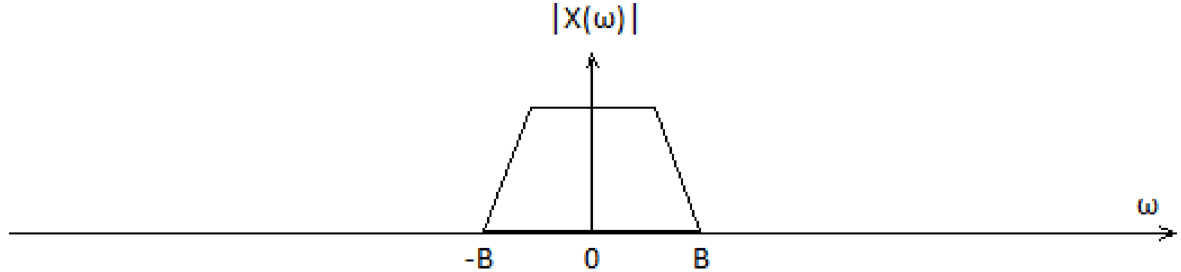
$$Y(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\,x(t)\,e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\right]$$

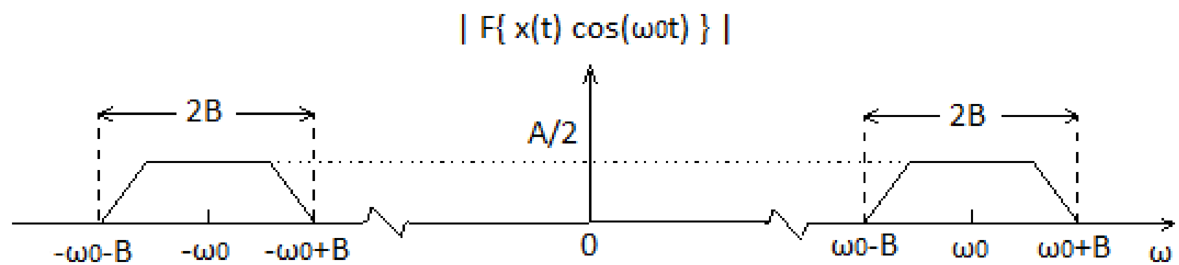
Άσκηση 11(συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι πολλαπλασιασμός του σήματος $x(t)$ με το $\cos(\omega_0 t)$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του $X(\omega)$, απλά το φάσμα $X(\omega)$ του σήματος **μεταφέρεται** στη περιοχή των συχνοτήτων $\pm\omega_0$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **διαμόρφωση**.

Φάσμα αρχικού σήματος



Φάσμα διαμορφωμένου σήματος



Κατά τη διαμόρφωση ένα σήμα $x(t)$ που μεταφέρει χρήσιμη πληροφορία πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας $\cos(\omega_0 t)$, που ονομάζεται **φέρον σήμα**, με σκοπό τη μετάδοσή του μέσα από ένα κανάλι μετάδοσης.

Άσκηση 12

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) \; = \; cos(\omega_0 t)\, u(t)$.

Απάντηση: Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler το σήμα γράφεται:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας και επειδή γνωρίζουμε ότι ισχύει $u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$, βρίσκουμε τον ΜF του σήματος $x(t)$ από τη σχέση:

$$cos(\omega_0 t) u(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega - \omega_0)} + \pi\delta(\omega - \omega_0)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega + \omega_0)} + \pi\delta(\omega + \omega_0)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Άσκηση 13

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \Pi_T(t)\, cos(\omega_0 t)$.

<u>Απάντηση</u>: Από τη σχέση του Euler γνωρίζουμε $cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$

Επομένως, το δοθέν σήμα $x(t)$ γράφεται:

$$x(t) = \Pi_T(t)\left[\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\Pi_T(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\Pi_T(t)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι :

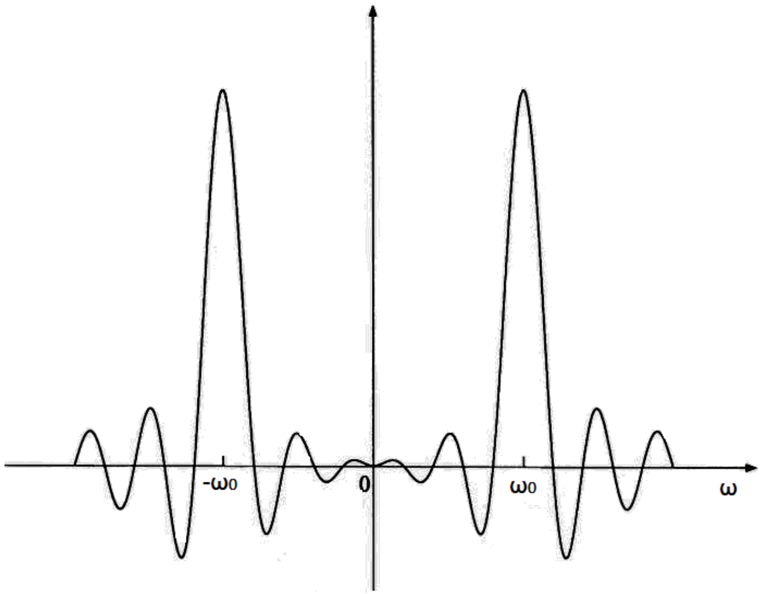
$$\Pi_T(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\, sin(\omega T)}{\omega}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα, έχουμε:

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{sin(\omega - \omega_0)T}{(\omega - \omega_0)} + \frac{sin(\omega + \omega_0)T}{(\omega + \omega_0)}$$

Άσκηση 13(συνέχεια)

- Ο MF αποτελείται από δύο **συναρτήσεις δειγματοληψίας**, τοποθετημένες στις συχνότητες $-\omega_0$ και ω_0.
- Παρατηρείται διάχυση του φάσματος του σήματος σε συχνότητες εκατέρωθεν της συχνότητας $\pm\omega_0$ του συνημιτόνου.
- Το φαινόμενο αυτό είναι ανεπιθύμητο, ειδικά στην περίπτωση που θέλουμε να εντοπίσουμε την ακριβή θέση της συχνότητας περισσοτέρων του ενός συνημιτόνων.



- Η διαπίστωση ότι η παραθύρωση προκαλεί παραμόρφωση στο φάσμα είναι πολύ σημαντική επειδή η παραθύρωση είναι μία συχνά χρησιμοποιούμενη διαδικασία στην επεξεργασία των σημάτων, προκειμένου να λάβουμε και να επεξεργαστούμε τμήματα των σημάτων.
- Η ελαχιστοποίηση της επίδρασης του παραθύρου επιτυγχάνεται με αύξηση της διάρκειας T του παραθύρου, επειδή αυτό οδηγεί στη μείωση της διάρκειας των λοβών της συνάρτησης δειγματοληψίας.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (3/10)

4. Αλλαγή Κλίμακας στο Χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α $(\alpha \neq 0)$, ισχύει:

$$x(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5. Αλλαγή Κλίμακας στη Συχνότητα

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α $(\alpha \neq 0)$, ισχύει:

$$\frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(a\omega)$$

Το σπουδαίο συμπέρασμα των παραπάνω δύο ιδιοτήτων είναι ότι η αλλαγή της κλίμακας του χρόνου επηρεάζει αντιστρόφως ανάλογα την έκταση του μετασχηματισμού Fourier.

Έτσι μπορούμε να «στενεύουμε» ή να «πλατύνουμε» το φάσμα του σήματος με διεύρυνση ή στένευση του χρόνου αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη κλίμακα

Απεικόνιση της αλλαγής κλίμακας στο χρόνο και στη συχνότητα

(α) Σήμα $x(t)$ και το φάσμα του $X(\omega)$.

(β) Σήμα $x_1(t) = x(\alpha t)$ με $\alpha > 1$ και το φάσμα του $X_1(\omega)$.

Αν $\alpha > 1$, το σήμα μεταβάλλεται πιο γρήγορα στο χρόνο, γεγονός που αντιστοιχεί σε υψηλότερες συχνότητες στο πεδίο συχνοτήτων, άρα, το φάσμα του διαστέλλεται (σχήμα β).

(γ) Σήμα $x_2(t) = x(\alpha t)$ με $0 < \alpha < 1$ και το φάσμα του $X_2(\omega)$.

Αντίθετα, όταν $0 < \alpha < 1$, το σήμα μεταβάλλεται πιο αργά στο χρόνο, γεγονός που αντιστοιχεί σε σήμα χαμηλής συχνότητας, άρα το φάσμα του συμπιέζεται (σχήμα γ).

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (4/10)

6. Ανάκλαση

Αν στην ιδιότητα αλλαγής κλίμακας στο χρόνο θέσουμε $\alpha = -1$, προκύπτει η ιδιότητα της ανάκλασης:

$$x(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(-\omega)$$

7. Συζυγία

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε ισχύει:

$$x^*(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(-\omega) \text{ και } x^*(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(\omega)$$

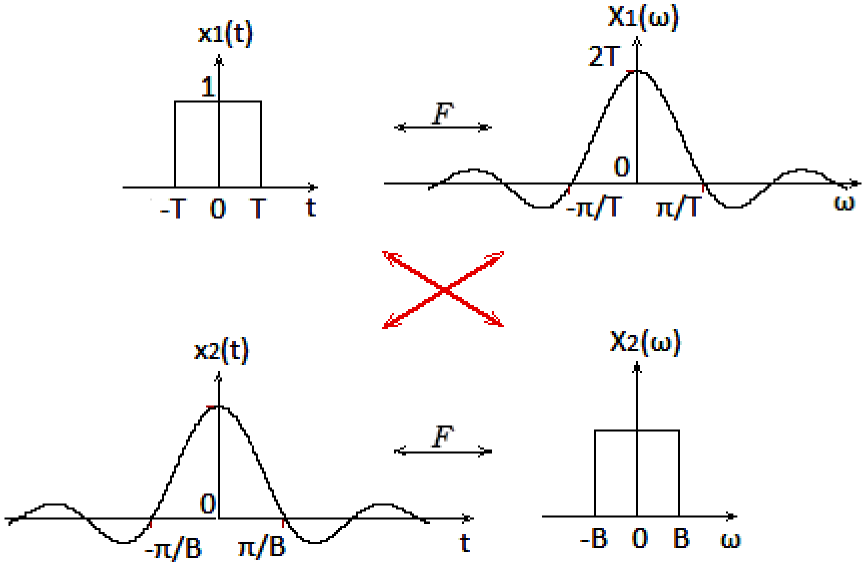
Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (5/10)

8. **Συμμετρία (δυϊσμός)**

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε το σήμα $y(t) = X(t)$ έχει MF: $Y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$

<u>Επεξήγηση</u>: Αν ο MF της $x(t)$ είναι η X(ω), τότε ο MF μίας συνάρτησης $X(t)$ είναι η $2\pi x(-\omega)$.

Ο συμβολισμός $X(t)$ σημαίνει ότι δημιουργούμε μία συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή t, η οποία έχει όμως τη μορφή και τη μαθηματική έκφραση της $X(\omega)$.



Επίσης $2\pi x(-\omega)$ σημαίνει ότι έχουμε μία συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή ω (για την ακρίβεια $-\omega$), η οποία έχει όμως τη μορφή της $x(t)$.

Άσκηση 14

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{j\alpha t}$

Απάντηση: Α' τρόπος - Από την εξίσωση ορισμού του MF βρίσκουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha t}\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\alpha-\omega)t}\, dt = 2\pi\, \delta(\omega - \alpha)$$

Β' τρόπος – Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα, δηλ. $F\left\{e^{j\omega_0 t} x(t)\right\} = X(\omega - \omega_0)$ και το αποτέλεσμα $F\{1\} = 2\pi\, \delta(\omega)$ της προηγούμενης άσκησης.

Ορίζοντας τη συνάρτηση $y(t) = 1 \cdot x(t) = e^{j\alpha t} \cdot 1$ θα έχουμε:

$$Y(\omega) = F\left\{e^{j\alpha t} \cdot 1\right\} = F\{1\}_{\omega \to \omega - \alpha} = 2\pi\, \delta(\omega - \alpha)$$

Καταλήγουμε έτσι στο ίδιο αποτέλεσμα που προέκυψε από την τετριμμένη μέθοδο υπολογισμού.

Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε ότι $F\{e\hat{}(-j\alpha t)\,\} = 2\pi\, \delta(\omega + \alpha)$.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (6/10)

9. **Παραγώγιση**

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ και ο MF της παραγώγου $d^n x(t)/dt^n$ υπάρχει, τότε αυτός υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\omega X(\omega)$$

ή γενικότερα:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n X(\omega)$$

και για το πεδίο συχνοτήτων:

$$(-jt)^k x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{d^k X(\omega)}{d\omega^k}$$

Άσκηση 15

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης μοναδιαίου τριγωνικού παλμού διάρκειας 2T, που δίνεται από τη σχέση:

$$\Lambda\_\mathrm{T}\,(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\mathrm{T}}, & t < |\mathrm{T}| \\ 0, & t > |\mathrm{T}| \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Η συνάρτηση μοναδιαίου τριγωνικού παλμού μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συναρτήσεων μοναδιαίας κλίσης (ράμπας), σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Lambda_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}\,[r(t+T) - 2r(t) + r(t-T)]$$

Υπολογίζουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης:

$$\Lambda'_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}[u(t+T) - 2u(t) + u(t-T)]$$

$$\Lambda''_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)]$$

Άσκηση 15(συνέχεια)

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier της $\Lambda_{\mathrm{T}}(t)$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης, δηλαδή:

$$F\{\Lambda_{\mathrm{T}}(t)\} = F\left\{\frac{1}{(j\omega)^2}\Lambda_{\mathrm{T}}(t)\right\} = F\left\{\frac{1}{(j\omega)^2}\left[\frac{1}{T}\left[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)\right]\right]\right\}$$

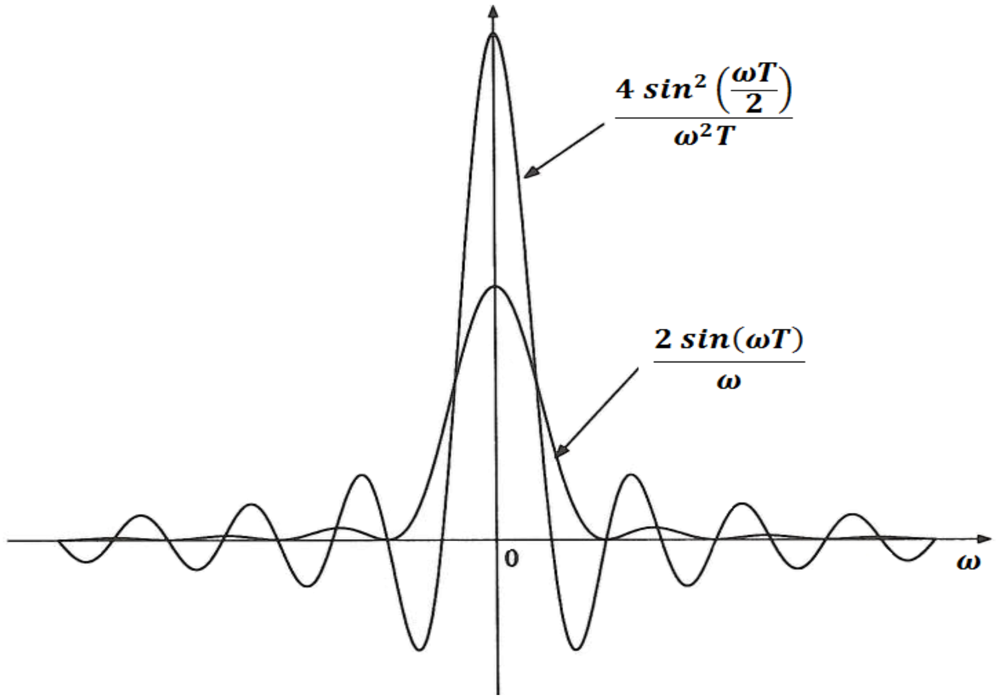
$$= \frac{1}{\omega^2 \mathrm{T}}\left(2 - e^{j\omega\mathrm{T}} - e^{-j\omega\mathrm{T}}\right) = \cdots = 4\,\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2\mathrm{T}}$$

Θυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού διάρκειας 2Τ είναι:

$$\Pi_{\mathrm{T}}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

Άσκηση 15(συνέχεια)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι μετασχηματισμοί Fourier του τετραγωνικού και του τριγωνικού παλμού (παραθύρου).



Φασματική αναπαράσταση τετραγωνικού και τριγωνικού παραθύρου

Στην περίπτωση του τριγωνικού παλμού, ο κεντρικός λοβός είναι μεγαλύτερου πλάτους ενώ οι δευτερεύοντες λοβοί είναι μικρότερου πλάτους.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (7/10)

10. Ολοκλήρωση

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}\,\mathrm{X}(\omega) + \pi\, X(0)\,\delta(\omega)$$

11. Συνέλιξη

Σύμφωνα με αυτή, ο ΜF της συνέλιξης δύο ΓΧΑ σημάτων ισούται με το γινόμενο των επιμέρους ΜF των σημάτων.

Συγκεκριμένα, αν $x_1(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$ και $x_1(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$, τότε:

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)\, X_2(\omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (8/10)

Σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$, το οποίο διεγείρεται από είσοδο $x(t)$, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνέλιξης:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ και $h(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} H(\omega)$, τότε από την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το φάσμα της απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος όταν γνωρίζουμε το φάσμα του σήματος εισόδου $X(\omega)$ και το φάσμα $H(\omega)$ της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος.

Επομένως, η υπολογιστικά δύσκολη σχέση της συνέλιξης μετασχηματιζόμενη κατά Fourier καταλήγει σε ένα απλό γινόμενο συναρτήσεων.

Επιπλέον, η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική επειδή αποτελεί τη βάση για το σχεδιασμό ΓΧΑ συστημάτων στο πεδίο συχνοτήτων (αναλογικά φίλτρα).

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (9/10)

12. Πολλαπλασιασμός

Ανάλογη ιδιότητα ισχύει και προς την αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή για τη συνέλιξη των MF $X(\omega)$ και $Y(\omega)$ των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$.

Συγκεκριμένα, αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ και $y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(\omega)$ και $Z(\omega) = X(\omega) * Y(\omega)$, τότε ισχύει:

$$x(t)\, y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * Y(\omega)\right]$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (10/10)

13. Άρτιο/Περιττό Μέρος Σήματος - Πραγματικό/Φανταστικό Μέρος Φάσματος

Είναι γνωστό ότι κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου $x_e(t)$ και ενός περιττού σήματος $x_o(t)$. Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε ισχύει:

$$x_e(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Re\{X(\omega)\}$$

$$x_o(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} j\ Im\{X(\omega)\}$$

Όπου η συνάρτηση $Re\{\ \}$ επιστρέφει το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης Χ(ω) και η συνάρτηση $Im\{\ \}$ το φανταστικό.

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier (1/2)

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Γραμμικότητα	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Ολίσθηση στο χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Ολίσθηση στη συχνότητα	$e^{j\omega t_0}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Συμμετρία. Αν $(t)\overset{F}{\leftrightarrow}X(\omega)$	$y(t) = X(t)$	$Y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$
Πολλαπλασιασμός (Διαμόρφωση)	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$
Συνέλιξη	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)\, X_2(\omega)$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}\, X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\omega)$

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier (2/2)

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega)\delta(\omega)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$t\, x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Άρτιο μέρος σήματος Πραγματικό μέρος φάσματος	$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(-t)]$	$Re\{X(\omega)\}$
Περιττό μέρος σήματος Φανταστικό μέρος φάσματος	$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x^*(-t)]$	$jIm\{X(\omega)\}$
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\omega)$

6. Θεώρημα Parceval

Θεώρημα Parceval (1/2)

- Το θεώρημα εκφράζει τη **διατήρηση της ενέργειας στο πεδίο των συχνοτήτων**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- Η ολική ενέργεια ενός σήματος μπορεί να υπολογιστεί ισοδύναμα είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο της συχνότητας.

- Στο πεδίο του χρόνου υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα χρονικού διαστήματος $|x(t)|^2$ και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε για όλο τη διάρκεια του σήματος.

- Στο πεδίο της συχνότητας υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα κυκλικής συχνότητας $|X(\omega)|^2/2\pi$ και κατόπιν ολοκληρώνουμε για όλες τις συχνότητες.

Θεώρημα Parceval (2/2)

- Η συνάρτηση $S_x(\omega) = |X(\omega)|^2$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ενέργειας** (energy density spectrum) του σήματος $x(t)$ και εκφράζει την **ενέργεια ανά εύρος ζώνης ενός rad** του σήματος για διάφορες συχνότητες.

- Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που συνεισφέρουν οι συχνότητες από f_1 έως f_2 αρκεί να ολοκληρώσουμε την $|X(\omega)|^2$ μεταξύ αυτών των δύο συχνοτήτων, δηλαδή:

$$E_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{f_1}^{f_2} |X(\omega)|^2 d\omega$$

7. Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\ \delta(\omega)$
A	$2\pi A\ \delta(\omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\ \delta(\omega - \omega_0)$
$cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$sin(\omega_0 t)$	$-\pi j\ [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T \\ 0, & \lvert t\rvert > T \end{cases}$	$2\dfrac{\sin(\omega T)}{\omega}$
$\dfrac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$	$\begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_0 \\ 0, & \lvert\omega\rvert > \omega_0 \end{cases}$
$e^{-\alpha t}u(t), \quad Re(\alpha) > 0$	$\dfrac{1}{\alpha + j\omega}$
$te^{-\alpha t}u(t), \quad Re(\alpha) > 0$	$\dfrac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t), \quad Re(\alpha) > 0$	$\dfrac{1}{(\alpha + j\omega)^n}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$

8. Απόκριση Συχνότητας

1. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος

Ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα σε αρχική ηρεμία, περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση $h(t)$, και μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος για οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$ μέσω της συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Λύνοντας ως προς $H(\omega)$, έχουμε:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Η συνάρτηση $H(\omega)$ ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς** ή **απόκριση συχνότητας** του συστήματος και είναι ο MF της κρουστικής απόκρισης $h(t)$:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

Εναλλακτικός Υπολογισμός Εξόδου ΓΧΑ Συστήματος

Όταν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την είσοδο $x(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος και ζητείται η εύρεση της εξόδου $y(t)$, είναι υπολογιστικά απλούστερο (αντί της συνέλιξης) να υπολογιστούν:

- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ με MF στην $h(t)$
- Η συνάρτηση $Y(\omega)$ από τη σχέση $Y(\omega) = X(\omega) * H(\omega)$
- Η έξοδος $y(t)$ με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην $Y(\omega)$.

Ανάλογα πράττουμε αν γνωρίζουμε την είσοδο $x(t)$ και την έξοδο $y(t)$ και ζητείται η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή είναι υπολογιστικά απλούστερο να υπολογιστούν:

- Τα $X(\omega)$ και $Y(\omega)$
- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ από τη σχέση $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$
- Η κρουστική απόκριση $h(t)$ με αντίστροφο MF στην $H(\omega)$

2. Αναπαράσταση πλάτους – φάσης

Επειδή η απόκριση συχνότητας $H(\omega)$ ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία μιγαδική συνάρτηση, μπορεί να γραφεί σε **πολική μορφή** ως:

$$H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\theta_{\mathrm{H}}(\omega)}$$

όπου $|H(\omega)|$ είναι το **μέτρο ή κέρδος** του συστήματος και $\theta_{\mathrm{H}}(\omega)$ είναι η **φάση** του.

Οι γραφικές παραστάσεις των $|H(\omega)|$ και $\theta_{\mathrm{H}}(\omega)$ ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης** του συστήματος, αντίστοιχα.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)|\, |X(\omega)|$$

$$\theta_Y(\omega) = \theta_H(\omega) + \theta_X(\omega)$$

Η επίδραση ενός ΓΧΑ συστήματος σε ένα σήμα εισόδου, είναι:

- ο πολλαπλασιασμός του μέτρου του MF του σήματος εισόδου επί το μέτρο της απόκρισης συχνότητας (συνάρτηση μεταφοράς)
- η μετατόπιση της φάσης του MF του σήματος εισόδου κατά τη φάση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

9. Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με Μετασχηματισμό Fourier

Περιγραφή Γ.Δ.Ε . με MF (1/2)

Η περιγραφή της συμπεριφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος μέσω της συνέλιξης αποτελεί έναν **έμμεσο τρόπο** περιγραφής, ο οποίος **αδυνατεί** να περιγράψει την εσωτερική δομή του συστήματος.

Συχνά χρησιμοποιούμε μία **γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές** που **συσχετίζει** τα σήματα εισόδου – εξόδου:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} \beta_m \frac{d^m y(t)}{dt^m}$$

όπου τα α_n, b_m είναι πραγματικές σταθερές.

Περιγραφή Γ.Δ.Ε . με MF (2/2)

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγου $F\{x^n(t)\} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n X(\omega)$ του MF σε κάθε μέλος της Δ.Ε. έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} \left[\sum_{n=0}^{N} a_n (j\omega)^n \right] Y(\omega)$$

$$\sum_{m=0}^{M} \beta_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} \overset{F}{\longleftrightarrow} \left[\sum_{m=0}^{M} \beta_m (j\omega)^m \right] X(\omega)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τα β' μέλη, βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} \beta_m (j\omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n (j\omega)^n}$$

Η εξίσωση είναι μοναδικά ορισμένη ακόμα και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης. Αυτό συμβαίνει επειδή ο MF υπολογίζεται από το $-\infty$, στο οποίο θεωρούμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία, δηλαδή ότι οι αρχικές συνθήκες που συνοδεύουν τη διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης είναι μηδενικές.

Άσκηση 16

Να υπολογιστεί το μέτρο και η φάση για ένα γραμμικό και χρονικό αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα, του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$$

<u>Απάντηση</u>: Από την εξίσωση ορισμού της απόκρισης συχνότητας βρίσκουμε το μέτρο και την φάση της. Είναι:

$$|H(\omega)| = \frac{|1 - j\omega|}{|1 + j\omega|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1$$

$$\measuredangle H(\omega) = \measuredangle H\{1 - j\omega\} - \measuredangle H\{1 + j\omega\} = \tan^{-1}(-\omega) - \tan^{-1}(\omega) = 2\tan^{-1}(\omega)$$

Άσκηση 17

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς (απόκριση συχνότητα) που δίνεται από τη σχέση:

$$H(\omega) = \frac{5 + j\omega}{6 + 5j\omega - \omega^2}$$

1) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα.
2) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση h(t) του συστήματος.
3) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδο εφαρμοστεί το σήμα $x(t) = e^{-5t}u(t)$.

Απάντηση: 1) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Άσκηση 17(συνέχεια)

Από τον ορισμό της συνάρτησης μεταφοράς έχουμε:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{5 + j\omega}{6 + 5j\omega - \omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(\omega)(6 + 5j\omega - \omega^2) = X(\omega)(5 + j\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2\, Y(\omega) + 5j\omega\, Y(\omega) + 6\, Y(\omega) = j\omega\, X(\omega) + 5\, X(\omega)$$

Μετατρέπουμε την παραπάνω σχέση σε διαφορική εξίσωση λαμβάνοντας υπόψη ότι από την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier, ισχύει:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = (j\omega)^2 Y(\omega), \qquad F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = (j\omega)Y(\omega), \qquad F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = (j\omega)X(\omega)$$

οπότε λαμβάνουμε τη σχέση:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 5F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 6y(t) = F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 5\, x(t)$$

Άσκηση 17(συνέχεια)

Επομένως η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5\,x(t)$$

2) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμού Fourier στη δοθείσα συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$.

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο του αθροίσματος σε απλά κλάσματα, και έχουμε:

$$H(\omega) = \frac{5 + j\omega}{6 + 5j\omega - \omega^2} = \frac{5 + j\omega}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} = \frac{3}{2 + j\omega} - \frac{2}{3 + j\omega}$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, βρίσκουμε:

$$h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\} = 3\,F^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j\omega}\right\} - 2\,F^{-1}\left\{\frac{1}{3 + j\omega}\right\} = (3e^{-2t} - 2e^{-3t})\,u(t)$$

Άσκηση 17(συνέχεια)

3) Για τον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$, εργαζόμαστε στο πεδίο της συχνότητας λόγω υπολογιστικής απλότητας. Αρχικά υπολογίζουμε τον MF της εισόδου $X(\omega)$:

$$X(\omega) = F\{e^{-5t}u(t)\} = \frac{1}{5 + j\omega}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εξόδου $Y(\omega)$:

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega) = \frac{5 + j\omega}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} \frac{1}{(5 + j\omega)} = \frac{1}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)}$$

$$= \frac{1}{(2 + j\omega)} - \frac{1}{(3 + j\omega)}$$

Τέλος, με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ανακτούμε την έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = F^{-1}\{Y(\omega)\} = \cdots = (e^{-2t} - e^{-3t}\,)\, u(t)$$

Μέρος 2: Γραμμικά Φίλτρα

Γραμμικά Φίλτρα

1. Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα
   – Ιδανικό Κατωδιαβατό Φίλτρο
   – Ιδανικό Ανωδιαβατό Φίλτρο
   – Ιδανικό Ζωνοδιαβατό Φίλτρο
   – Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο
2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων
3. Εύρος Ζώνης Φίλτρων
4. Πρακτικά Φίλτρα

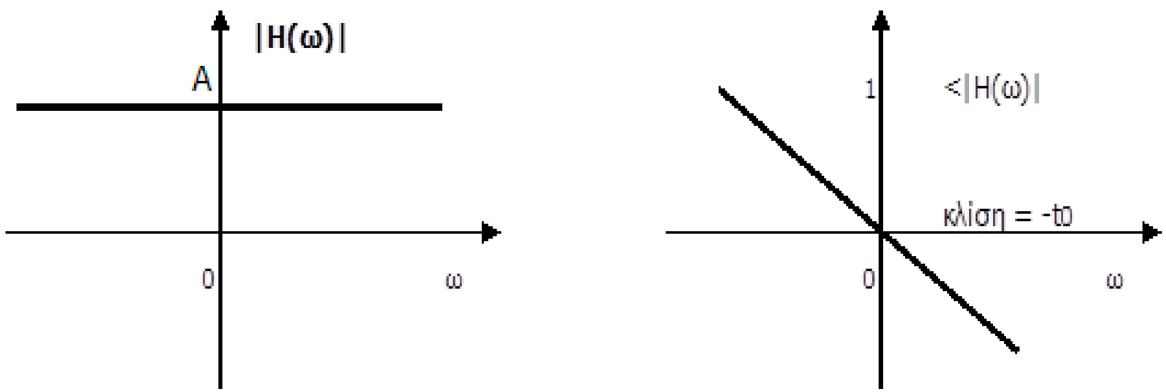
1. Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα

1. Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα

1. Ιδανικό Κατωδιαβατό Φίλτρο
2. Ιδανικό Ανωδιαβατό Φίλτρο
3. Ιδανικό Ζωνοδιαβατό Φίλτρο
4. Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

Ιδανικό Φίλτρο

- Ο όρος **φίλτρο** περιγράφει γραμμικά συστήματα που έχουν χαρακτηριστική πλάτους $|H(\omega)|$ **αμελητέα** σε ορισμένες περιοχές συχνοτήτων.
- Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να **απομακρύνουν** ανεπιθύμητες συνιστώσες συχνοτήτων από ένα σήμα ή απλώς να «σταθμίζουν» τις διάφορες συνιστώσες της κυματομορφής.
- Ένα **ιδανικό φίλτρο** έχει κρουστική απόκριση $h(t) = A\,\delta(t - t_0)$ και συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega) = A\,e^{-j\omega t_0}$.



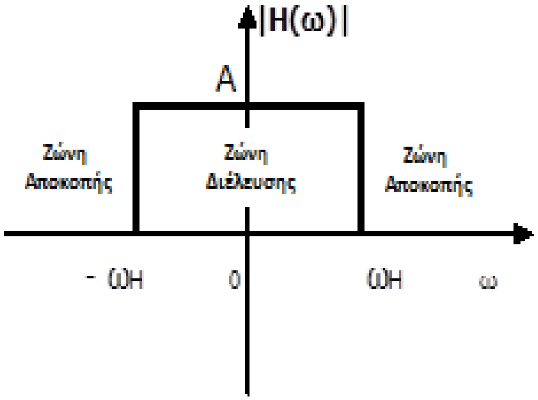
- Τα ιδανικά φίλτρα δεν είναι πρακτικά υλοποιήσιμα επειδή η κρουστική τους απόκριση είναι μη αιτιατή συνάρτηση και επιπλέον έχει άπειρο μήκος.

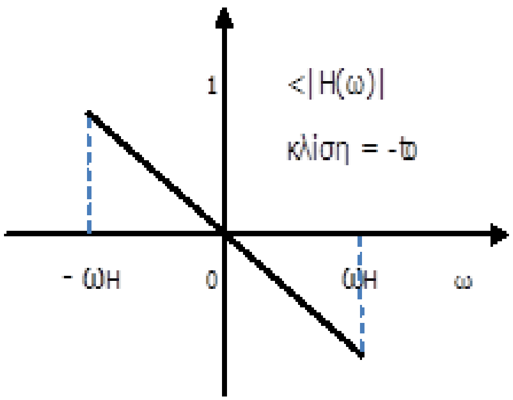
Ιδανικό Κατωδιαβατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο** (ή χαμηλοποερατό, Low Pass Filter – LPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό (χωρίς παραμόρφωση) φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες άνω της **συχνότητας αποκοπής** (ω_H) του φίλτρου.

- Η συνάρτηση μεταφοράς και τα φάσματα του κατωδιαβατού φίλτρου είναι:

$$H(\omega) = \begin{cases} A\, e^{-j\omega t_0}, & |\omega| \leq \omega_H \\ 0, & |\omega| > \omega_H \end{cases}$$

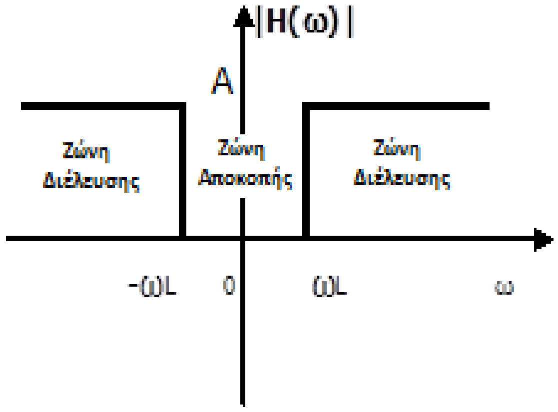


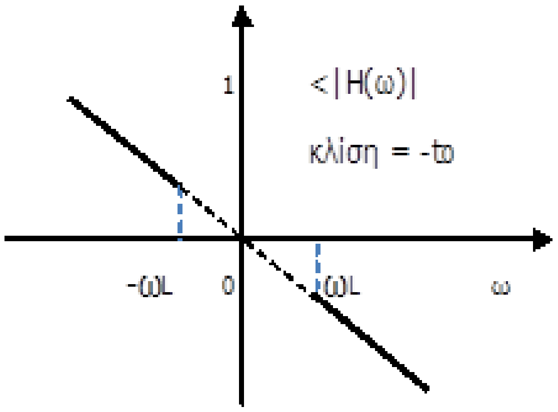


Ιδανικό Ανωδιαβατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό ανωδιαβατό φίλτρο** (ή υψηλοπερατό, High Pass Filter – HPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες κάτω από την **συχνότητα αποκοπής** ω_L του φίλτρου.
- Η συνάρτηση μεταφοράς και τα φάσματα του ανωδιαβατού φίλτρου είναι:

$$H(\omega) = \begin{cases} A\, e^{-j\omega t_0}, & |\omega| \geq \omega_L \\ 0, & |\omega| < \omega_L \end{cases}$$



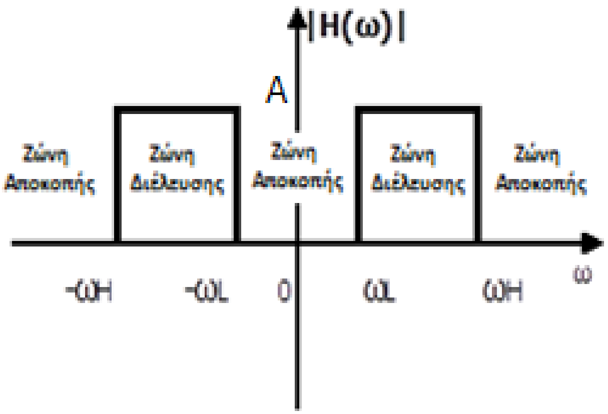


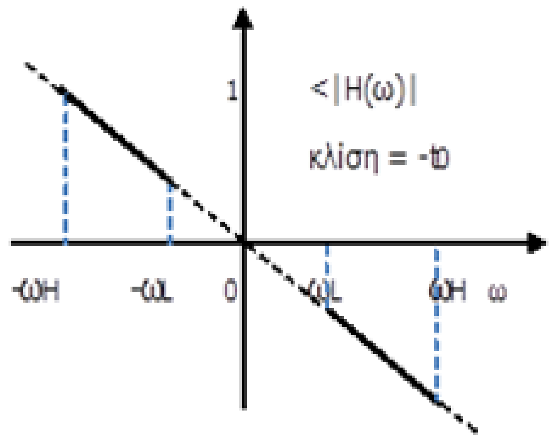
Ιδανικό Ζωνοδιαβατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό ζωνοδιαβατό φίλτρο** (ή ζωνοπερατό, Band Pass Filter – BPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες έξω από τη «ζώνη διέλευσης» του φίλτρου.

- Αν η ζώνη αυτή είναι το διάστημα συχνοτήτων $\omega_L < \omega < \omega_H$, η συνάρτηση μεταφοράς και τα φάσματα του ζωνοδιαβατού φίλτρου είναι:

$$H(\omega) = \begin{cases} A\, e^{-j\omega t_0}, & \omega_L \leq |\omega| \leq \omega_H \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

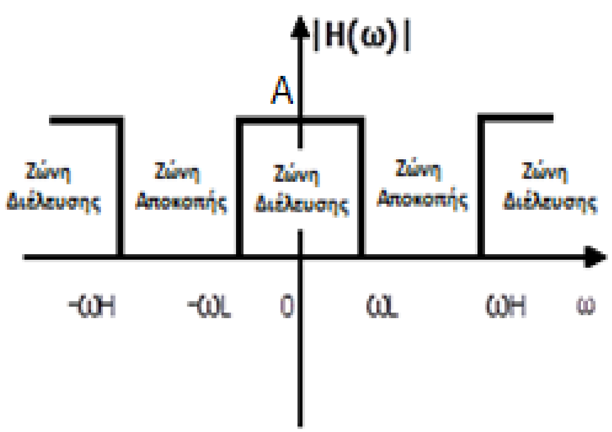


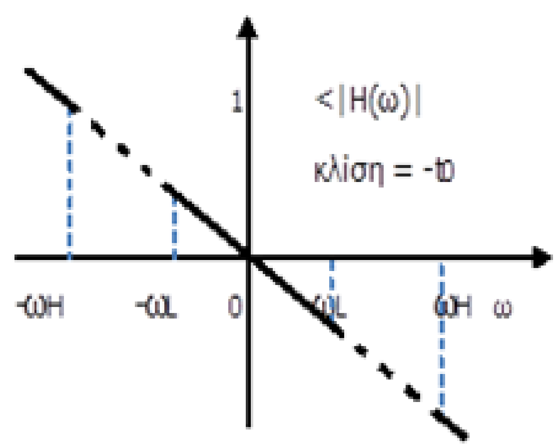


Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

- Το **ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο** (Band Stop Filter – BSF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό (χωρίς παραμόρφωση) φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες μέσα στη «ζώνη αποκοπής» του φίλτρου.
- Αν η ζώνη αυτή είναι το διάστημα συχνοτήτων $\omega_L < \omega < \omega_H$, η συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοφρακτικού φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_L < |\omega| < \omega_H \\ A\, e^{-j\omega t_0}, & \text{αλλού} \end{cases}$$





2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων

Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων

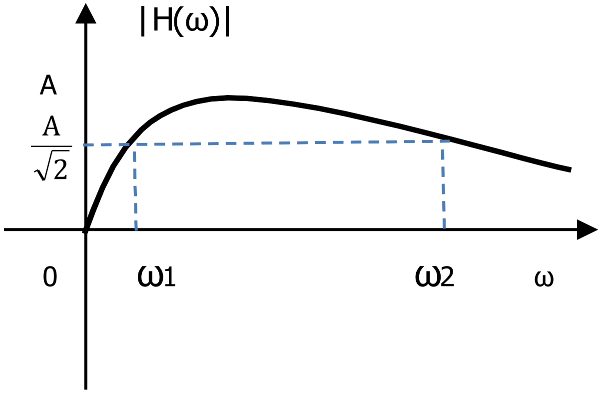
Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι ένα ιδανικό φίλτρο έχει τις ακόλουθες χαρακτηριστικές ιδιότητες:

1) Έχει κέρδος **ίσο με την μονάδα στη ζώνη διέλευσης** και **ίσο με το μηδέν στη ζώνη αποκοπής**.
2) Η **μετάβαση** από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής (και αντίστροφα) γίνεται **ακαριαία**.

3. Εύρος Ζώνης Φίλτρων

Εύρος Ζώνης Φίλτρων

Το **εύρος ζώνης** συχνοτήτων (bandwidth) περιγράφει τη σημαντική ζώνη συχνοτήτων σε μία απόκριση συχνότητας ενός φίλτρου ή ενός συστήματος.



Ορισμός εύρους ζώνης : Έστω ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$, όπου $|H(\omega)|_{\max} = A$. Ως εύρος ζώνης (BW) του φίλτρου ορίζεται το διάστημα μεταξύ των συχνοτήτων ω_1 και $\omega_2 (\omega_1, \omega_2 > 0)$, δηλαδή $BW = \omega_2 - \omega_1$, έτσι ώστε:

$$|H(\omega_1)| = |H(\omega_2)| = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Το εύρος ζώνης ορίζεται για εκείνη τη διαφορά συχνοτήτων στο φάσμα του φίλτρου κατά την οποία το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς έχει μειωθεί στο $\sqrt{2} = 0{,}707$ από την μέγιστη τιμή.

4. Πρακτικά Φίλτρα

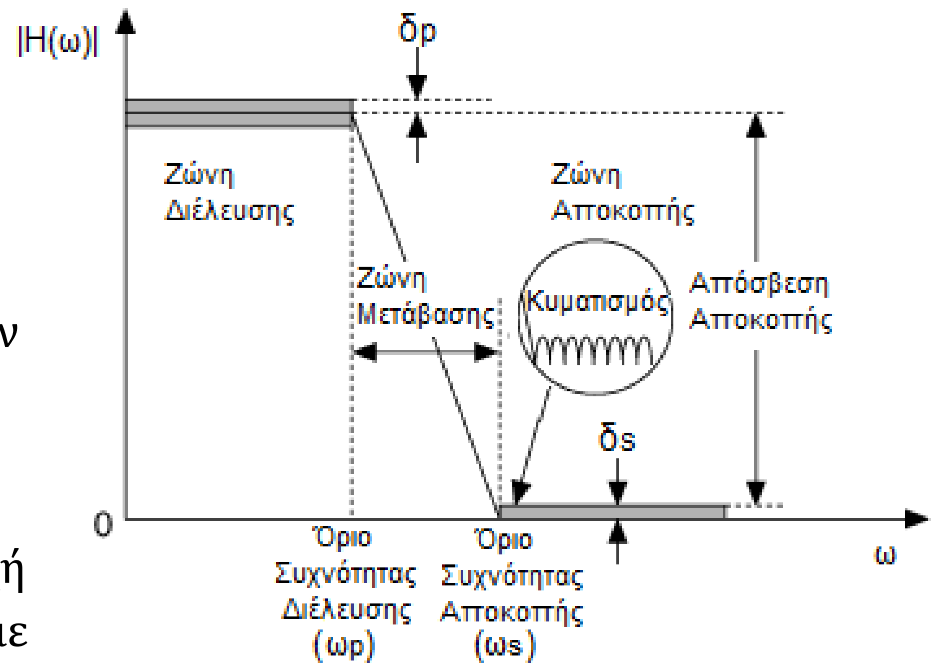
Πρακτικά Φίλτρα

- Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των ιδανικών φίλτρων δεν αντιστοιχούν σε φυσικά πραγματοποιήσιμες δομές:
  - Μοναδιαίο κέρδος στη ζώνη διέλευσης και μηδέν στη ζώνη αποκοπής
  - Ακαριαία μετάβαση από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής.
- Προσεγγίζουμε την ιδανική απόκριση με ένα μη-ιδανικό, αλλά **πρακτικό** (δηλαδή, φυσικά πραγματοποιήσιμο) φίλτρο.
- Στα πρακτικά φίλτρα τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά δεν ισχύουν.
- Για το σχεδιασμό πρακτικών φίλτρων έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι, όπως Butterworth, Chebyshef, Bessel, κλπ.

Απόκριση συχνότητας πρακτικού κατωδιαβατού φίλτρου

Σε ένα πρακτικό φίλτρο συμβαίνουν τα εξής:

- Μεταξύ της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής μεσολαβεί μια πεπερασμένη περιοχή συχνοτήτων, η οποία ονομάζεται **ζώνη μετάβασης**. Στη ζώνη μετάβασης, το κέρδος του φίλτρου αλλάζει σταδιακά από ένα (εντός της ζώνης διέλευσης) σε μηδέν (στη ζώνη αποκοπής). Η ζώνη μετάβασης έχει εύρος $\omega_p - \omega_s$.



- Η απόκριση συχνότητας στην περιοχή διέλευσης δεν είναι επίπεδη και ίση με ένα, αλλά εμφανίζει έναν **κυματισμό** εύρους δ_p εκατέρωθεν της τιμής 1. Αντίστοιχα, και στην περιοχή αποκοπής η απόκριση δεν είναι επίπεδη και ίση με μηδέν, αλλά εμφανίζει έναν κυματισμό εύρους δ_s άνω της τιμής 0.

Άσκηση 1

Ένα φίλτρο έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-at}u(t), a \in R$. Να ευρεθεί τι είδους φίλτρο είναι.

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζουμε την συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου. Είναι:

$$H(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$$

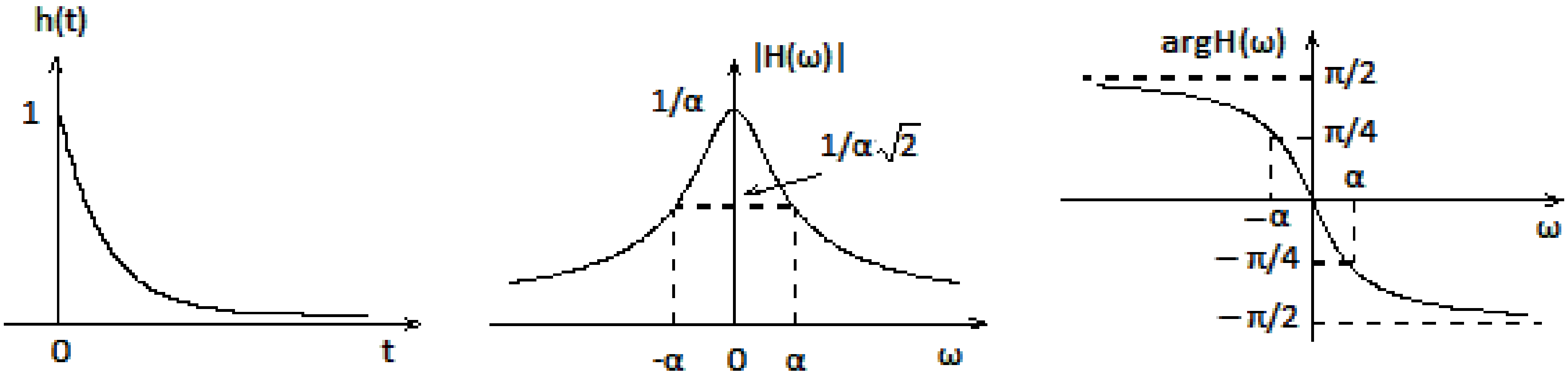
$$= -\frac{1}{a+j\omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-(a+j\omega)t} - e^0\right] = -\frac{1}{a+j\omega}\left[\lim_{t\to\infty}\left(e^{-\alpha t}\, e^{-j\omega t}\right) - 1\right]$$

$$= -\frac{1}{a+j\omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-at}(\cos\omega t - jsin\ \omega t) - 1\right] = -\frac{1}{a+j\omega}[0-1]$$

$$\text{Αρα } H(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Στο ακόλουθο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ και του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας.



Παρατηρούμε ότι το μέτρο αποσβένει στις υψηλές συχνότητες, δηλαδή

$\lim_{|\omega|\to\infty} |\mathrm{H}(\omega)| = 0$, επομένως είναι ένα **πρακτικό κατωδιαβατό** φίλτρο.

Άσκηση 2

Ένα σήμα $x(t) = e^{-2t}u(t)$ περνάει από ένα ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο, που έχει συχνότητα αποκοπής $\omega_H = 1\ rad$ / sec. Να βρεθεί ο λόγος της ενέργειας εξόδου προς την ενέργεια εισόδου (Για το φίλτρο να ληφθεί A=1).

<u>Απάντηση</u>: Ο MF του $x(t)$ είναι $X(\omega) = 1/(2 + j\omega)$. Επομένως, το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος $x(t)$ είναι:

$$S_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = \left|\frac{1}{2 + j\omega}\right|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 4}$$

Επειδή το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του δοθέντος κατωδιαβατού φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1\,, & |\omega| < \omega_H = 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

βρίσκουμε το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος εξόδου, ως:

$$S_y(\omega) = |X(\omega)|^2\ |H(\omega)|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega^2 + 4}\,, & |\omega| < 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Για να βρούμε την ολική ενέργεια του σήματος εξόδου $y(t)$ ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση (θεώρημα Parceval):

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\omega^2+4}d\omega = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ομοίως, η ενέργεια του σήματος εισόδου $x(t)$ είναι:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-4t}dt = \frac{1}{4}$$

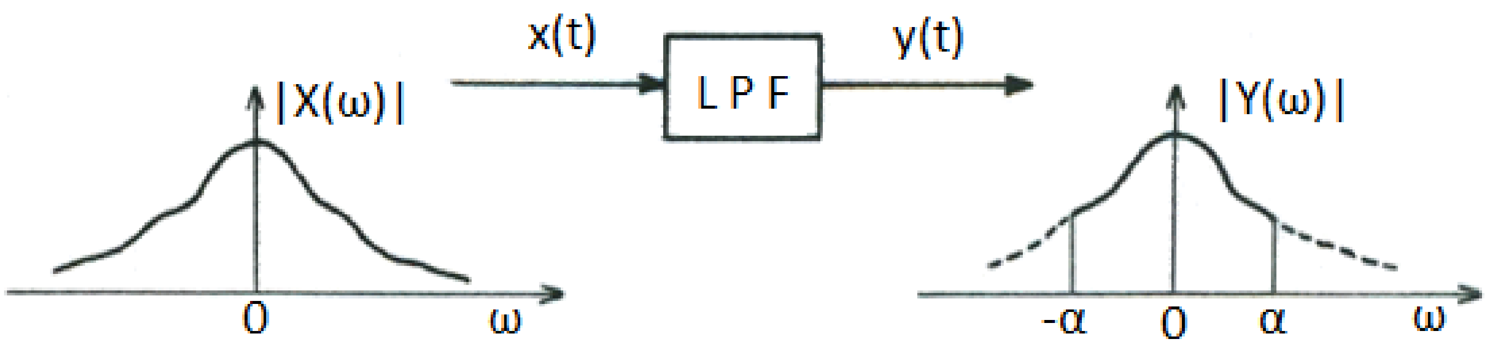
Διαιρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, βρίσκουμε τον ζητούμενο λόγο, ως:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}29$$

Παρατηρούμε ότι ποσοστό 71% της ενέργειας εισόδου απορροφάται από το ιδανικό φίλτρο και μόνο το 29% φθάνει στην έξοδο.

Άσκηση 3

Σε ένα ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο (LPF) εισέρχεται ένα γνωστό σήμα $x(t)$ με φάσμα Fourier $|X(\omega)|$. Στην έξοδο κόβονται οι υψηλές συχνότητες, δηλαδή αυτές για τις οποίες ισχύει $|\omega| > a$. Τα φάσματα εισόδου $X(\omega)$ και εξόδου $Y(\omega)$ του LPF φίλτρου δείχνονται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογιστεί το σήμα εξόδου $y(t)$.



<u>Απάντηση</u>: Το σήμα εξόδου $y(t)$ θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier επί του φάσματος εξόδου $Y(\omega)$. Το φάσμα της εξόδου $Y(\omega)$ του φίλτρου LPF υπολογίζεται από τη σχέση $Y(\omega) = X(\omega)\ H(\omega)$, ενώ το σήμα εξόδου $y(t)$ είναι $y(t) = x(t) * h(t)$.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Το $X(\omega)$ θεωρείται γνωστό, άρα και το $x(t)$. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ του φίλτρου είναι τετραγωνικής μορφής και η κρουστική απόκρισή της $h(t)$ του φίλτρου είναι:

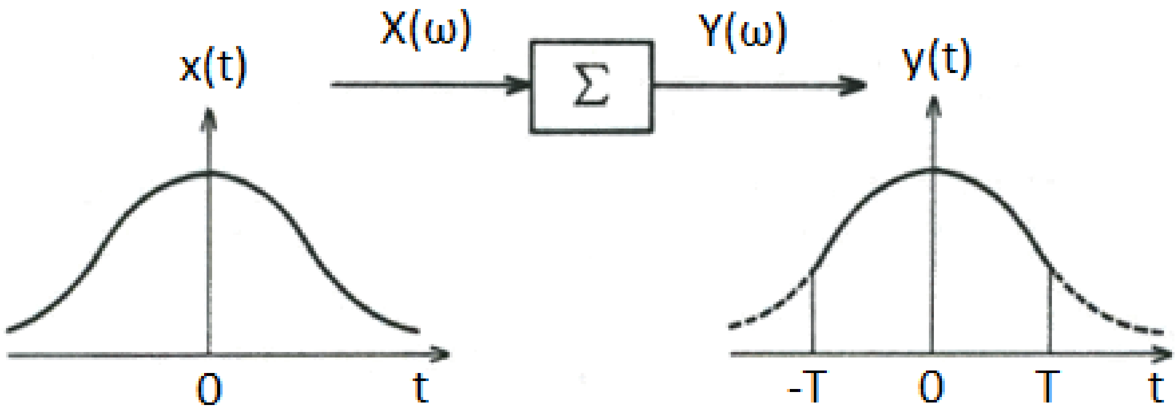
$$h(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$$

Επομένως η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται από τη συνέλιξη της εισόδου $x(t)$ με την κρουστική απόκριση $h(t)$, δηλ.:

$$y(t) = x(t) * \frac{\sin at}{\pi t}$$

Άσκηση 4

Σε ένα φίλτρο Σ εισέρχεται ένα γνωστό σήμα $x(t)$. Στην έξοδο κόβεται το $x(t)$ για $|t| > T$, όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier $Y(\omega)$ της εξόδου.



<u>Απάντηση</u>: Η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται από τη σχέση $y(t) = x(t)\,\Pi_T(t)$ όπου $\Pi_T(t)$ ο τετραγωνικός παλμός που δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & για\ \ t < |T| \\ 0, & για\ \ t > |T| \end{cases}$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $\Pi_T(t)$ είναι:

$$\Pi_T(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin\omega T}{\omega}$$

Επομένως ισχύει:

$$Y(\omega) = F\{y(t)\} = F\{\, x(t)\, \Pi_T(t)\, \}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * \frac{2\sin\omega T}{\omega}\right]$$