Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 10: Γραμμικά Φίλτρα

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Γραμμικά Φίλτρα

1. Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα
   – Ιδανικό Κατωδιαβατό Φίλτρο
   – Ιδανικό Ανωδιαβατό Φίλτρο
   – Ιδανικό Ζωνοδιαβατό Φίλτρο
   – Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο
2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων
3. Συνθήκη αιτιότητας (Paley – Wiener)
4. Εύρος Ζώνης Φίλτρων
5. Πρακτικά Φίλτρα

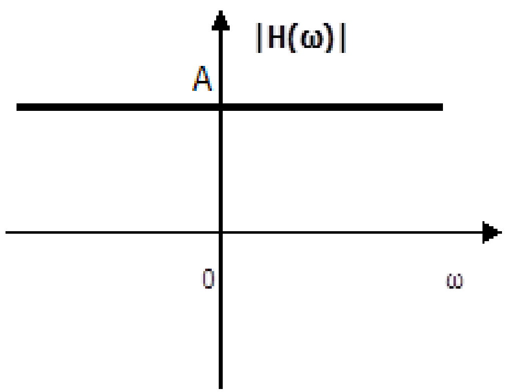
1. Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα

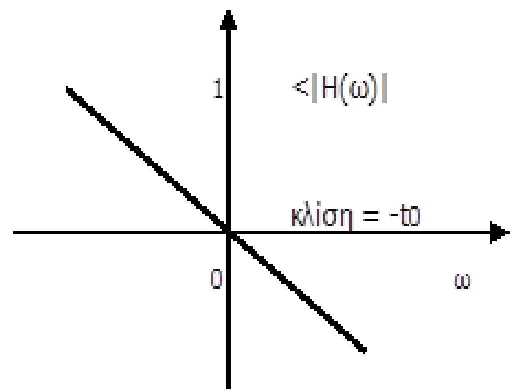
1. Ιδανικά Γραμμικά Φίλτρα

1. Ιδανικό Κατωδιαβατό Φίλτρο
2. Ιδανικό Ανωδιαβατό Φίλτρο
3. Ιδανικό Ζωνοδιαβατό Φίλτρο
4. Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

Ιδανικό Φίλτρο

- Ο όρος **φίλτρο** περιγράφει γραμμικά συστήματα που έχουν χαρακτηριστική πλάτους $|H(\omega)|$ **αμελητέα** σε ορισμένες περιοχές συχνοτήτων.
- Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να **απομακρύνουν** συγκεκριμένες συνιστώσες συχνοτήτων από ένα σήμα ή απλώς να «σταθμίζουν» τις διάφορες συνιστώσες της κυματομορφής.
- Ένα **ιδανικό φίλτρο** έχει κρουστική απόκριση $h(t) = A\,\delta(t - t_0)$ και απόκριση συχνότητας $H(\omega) = A\,e^{-j\omega t_0}$.



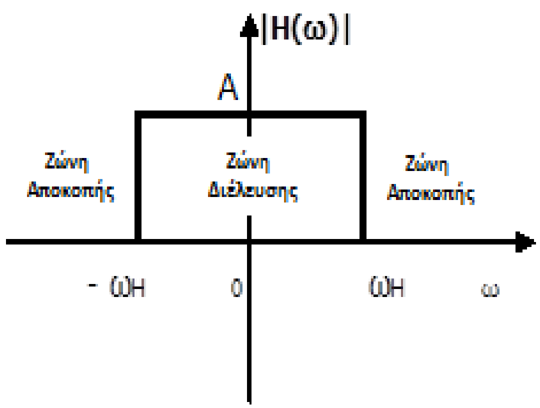


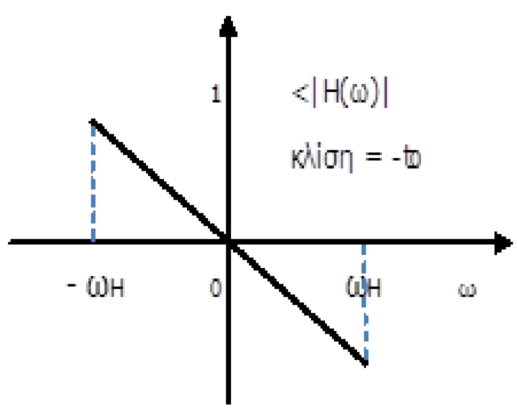
- Τα ιδανικά φίλτρα δεν είναι πρακτικά υλοποιήσιμα επειδή η κρουστική τους απόκριση είναι μη αιτιατή συνάρτηση και επιπλέον έχει άπειρο μήκος.

Ιδανικό Κατωδιαβατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο** (ή χαμηλοποερατό, Low Pass Filter – LPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό (χωρίς παραμόρφωση) φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες άνω της **συχνότητας αποκοπής** (ω_H) του φίλτρου.
- Η συνάρτηση μεταφοράς και τα φάσματα του κατωδιαβατού φίλτρου είναι:

$$H(\omega) = \begin{cases} A\, e^{-j\omega t_0}, & |\omega| \leq \omega_H \\ 0, & |\omega| > \omega_H \end{cases}$$

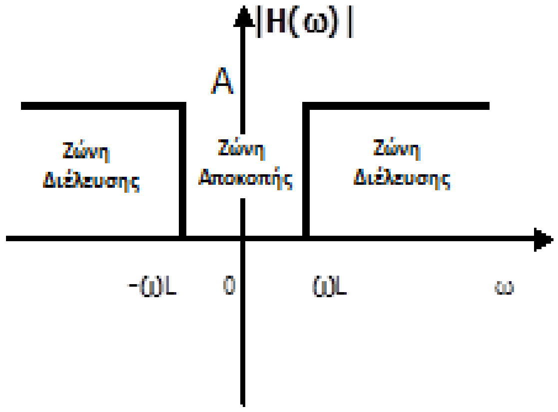


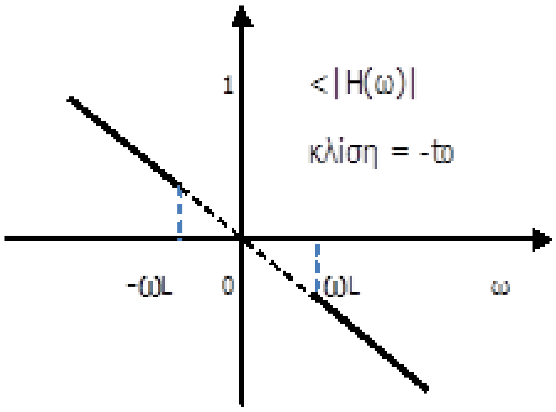


Ιδανικό Ανωδιαβατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό ανωδιαβατό φίλτρο** (ή υψηλοπερατό, High Pass Filter – HPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες κάτω από την **συχνότητα αποκοπής** ω_L του φίλτρου.
- Η συνάρτηση μεταφοράς και τα φάσματα του ανωδιαβατού φίλτρου είναι:

$$H(\omega) = \begin{cases} A\, e^{-j\omega t_0}, & |\omega| \geq \omega_L \\ 0, & |\omega| < \omega_L \end{cases}$$

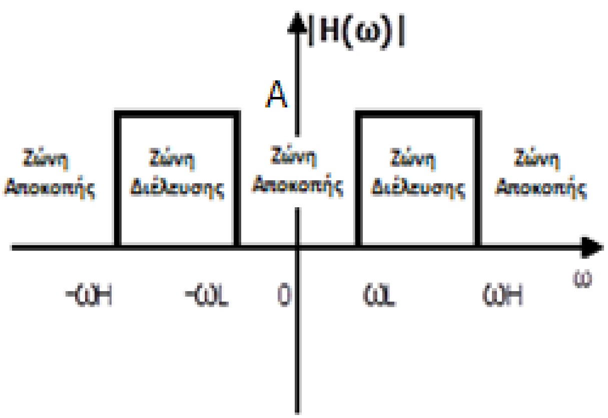


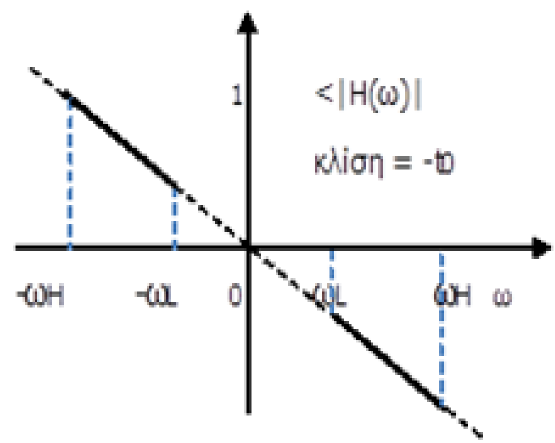


Ιδανικό Ζωνοδιαβατό Φίλτρο

- Το **ιδανικό ζωνοδιαβατό φίλτρο** (ή ζωνοπερατό, Band Pass Filter – BPF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες έξω από τη «ζώνη διέλευσης» του φίλτρου.
- Αν η ζώνη αυτή είναι το διάστημα συχνοτήτων $\omega_L < \omega < \omega_H$, η συνάρτηση μεταφοράς και τα φάσματα του ζωνοδιαβατού φίλτρου είναι:

$$H(\omega) = \begin{cases} A\, e^{-j\omega t_0}, & \omega_L \le |\omega| \le \omega_H \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

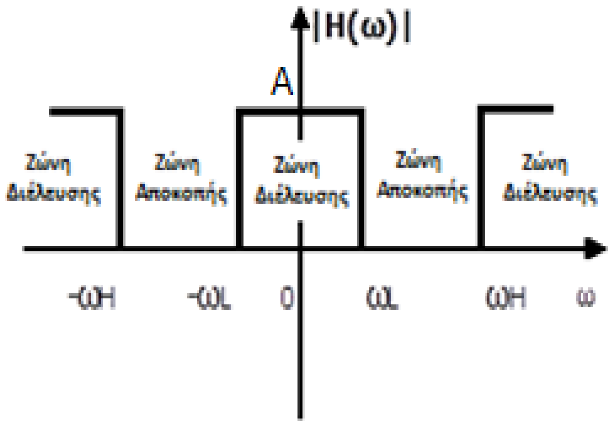


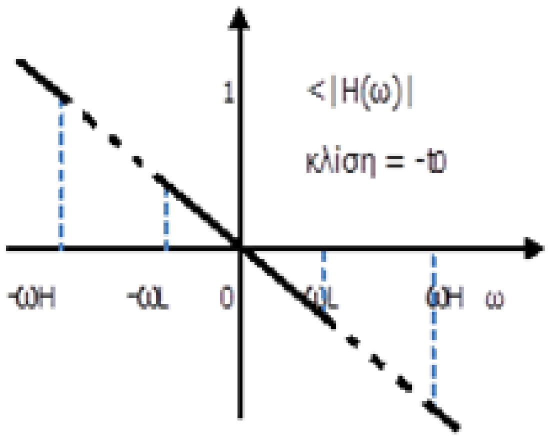


Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο

- Το **ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο** (Band Stop Filter – BSF) είναι ένα γραμμικό σύστημα που λειτουργεί σαν ένα ιδανικό (χωρίς παραμόρφωση) φίλτρο, με την προϋπόθεση ότι το σήμα εισόδου δεν περιέχει συχνότητες μέσα στη «ζώνη αποκοπής» του φίλτρου.
- Αν η ζώνη αυτή είναι το διάστημα συχνοτήτων $\omega_L < \omega < \omega_H$, η συνάρτηση μεταφοράς του ζωνοφρακτικού φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_L < |\omega| < \omega_H \\ A\, e^{-j\omega t_0}, & \text{αλλού} \end{cases}$$





2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων

Χαρακτηριστικές ιδιότητες ιδανικών φίλτρων

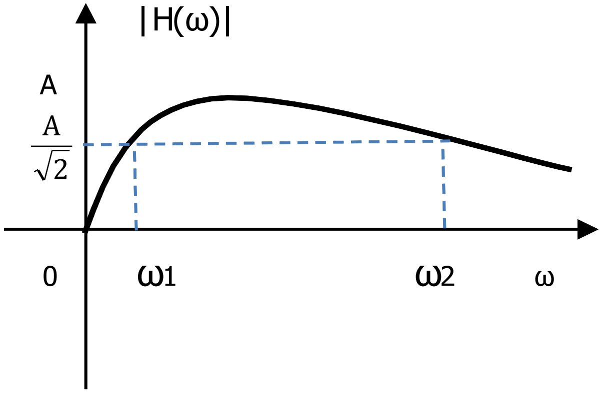
Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι ένα ιδανικό φίλτρο έχει τις ακόλουθες χαρακτηριστικές ιδιότητες:

1) Έχει κέρδος **ίσο με τη μονάδα στη ζώνη διέλευσης** και **ίσο με το μηδέν στη ζώνη αποκοπής**.
2) Η **μετάβαση** από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής (και αντίστροφα) γίνεται **ακαριαία**.

4. Εύρος Ζώνης Φίλτρων

Εύρος Ζώνης Φίλτρων

Το **εύρος ζώνης** συχνοτήτων (bandwidth) περιγράφει τη σημαντική ζώνη συχνοτήτων σε μία απόκριση συχνότητας ενός φίλτρου ή ενός συστήματος.



Ορισμός εύρους ζώνης : Έστω ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$, όπου $|H(\omega)|_{\max} = A$. Ως εύρος ζώνης (BW) του φίλτρου ορίζεται το διάστημα μεταξύ των συχνοτήτων ω_1 και $\omega_2 (\omega_1, \omega_2 > 0)$, δηλαδή $BW = \omega_2 - \omega_1$, έτσι ώστε:

$$|H(\omega_1)| = |H(\omega_2)| = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Το εύρος ζώνης ορίζεται για εκείνη τη διαφορά συχνοτήτων στο φάσμα του φίλτρου κατά την οποία το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς έχει μειωθεί στο $\sqrt{2} = 0{,}707$ από την μέγιστη τιμή.

5. Πρακτικά Φίλτρα

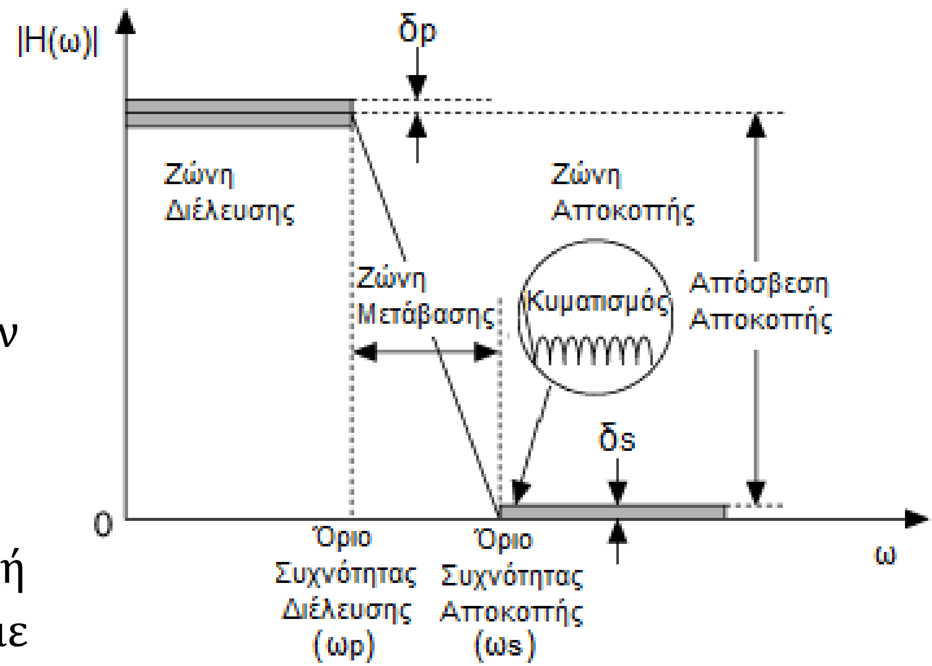
Πρακτικά Φίλτρα

- Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των ιδανικών φίλτρων δεν αντιστοιχούν σε φυσικά πραγματοποιήσιμες δομές επειδή έχουν:
  - Μοναδιαίο κέρδος στη ζώνη διέλευσης και μηδέν στη ζώνη αποκοπής
  - Ακαριαία μετάβαση από τη ζώνη διέλευσης στη ζώνη αποκοπής.
- Προσεγγίζουμε την ιδανική απόκριση με ένα μη-ιδανικό αλλά **πρακτικό** (δηλαδή, φυσικά πραγματοποιήσιμο) φίλτρο.
- Στα πρακτικά φίλτρα τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά δεν ισχύουν.
- Για το σχεδιασμό πρακτικών φίλτρων έχουν αναπτυχθεί πολλές μέθοδοι, όπως Butterworth, Chebyshef, Bessel, κλπ.

Απόκριση συχνότητας πρακτικού κατωδιαβατού φίλτρου

Σε ένα πρακτικό φίλτρο συμβαίνουν τα εξής:

- Μεταξύ της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής μεσολαβεί μια πεπερασμένη περιοχή συχνοτήτων, η οποία ονομάζεται **ζώνη μετάβασης**. Στη ζώνη μετάβασης, το κέρδος του φίλτρου αλλάζει σταδιακά από ένα (εντός της ζώνης διέλευσης) σε μηδέν (στη ζώνη αποκοπής). Η ζώνη μετάβασης έχει εύρος $\omega_p - \omega_s$.



- Η απόκριση συχνότητας στην περιοχή διέλευσης δεν είναι επίπεδη και ίση με ένα, αλλά εμφανίζει έναν **κυματισμό** εύρους δ_p εκατέρωθεν της τιμής 1. Αντίστοιχα, και στην περιοχή αποκοπής η απόκριση δεν είναι επίπεδη και ίση με μηδέν, αλλά εμφανίζει έναν κυματισμό εύρους δ_s άνω της τιμής 0.

Άσκηση 1

Ένα φίλτρο έχει κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-at}u(t), a \in R$. Να ευρεθεί τι είδους φίλτρο είναι.

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζουμε την απόκριση συχνότητας του φίλτρου. Είναι:

$$H(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty}$$

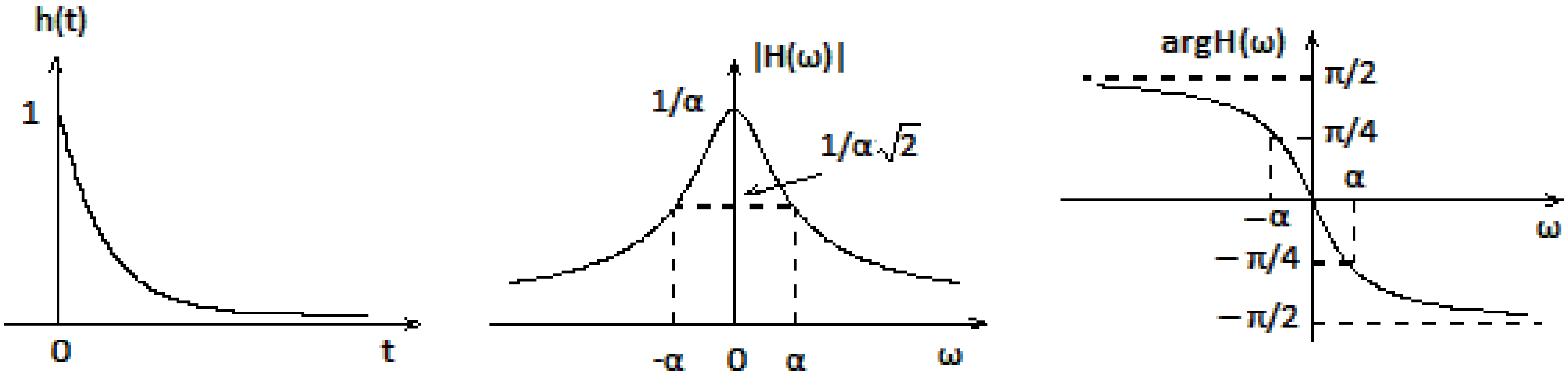
$$= -\frac{1}{a+j\omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-(a+j\omega)t} - e^0\right] = -\frac{1}{a+j\omega}\left[\lim_{t\to\infty}\left(e^{-\alpha t}\, e^{-j\omega t}\right) - 1\right]$$

$$= -\frac{1}{a+j\omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-at}(\cos\omega t - j sin\ \omega t) - 1\right] = -\frac{1}{a+j\omega}[0-1]$$

$$\text{Αρα } H(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Στο ακόλουθο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ και του μέτρου και της φάσης της απόκρισης συχνότητας.



Παρατηρούμε ότι το μέτρο αποσβένει στις υψηλές συχνότητες, δηλαδή

$\lim_{|\omega|\to\infty} |\mathrm{H}(\omega)| = 0$, επομένως είναι ένα **πρακτικό κατωδιαβατό** φίλτρο.

Άσκηση 2

Ένα σήμα $x(t) = e^{-2t}u(t)$ περνάει από ένα ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο, που έχει συχνότητα αποκοπής $\omega_H = 1\ rad$ / sec. Να βρεθεί ο λόγος της ενέργειας εξόδου προς την ενέργεια εισόδου (Για το φίλτρο να ληφθεί Α=1).

<u>Απάντηση</u>: Ο MF του $x(t)$ είναι $X(\omega) = 1/(2 + j\omega)$. Επομένως, το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος $x(t)$ είναι:

$$S_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = \left|\frac{1}{2 + j\omega}\right|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 4}$$

Επειδή το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του δοθέντος κατωδιαβατού φίλτρου δίνεται από τη σχέση:

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1\,, & |\omega| < \omega_H = 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

βρίσκουμε το φάσμα πυκνότητας ενέργειας του σήματος εξόδου, ως:

$$S_y(\omega) = |X(\omega)|^2\,|H(\omega)|^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega^2 + 4}\,, & |\omega| < 1 \\ 0\,, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Για να βρούμε την ολική ενέργεια του σήματος εξόδου $y(t)$ ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση (θεώρημα Parseval):

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{\omega^2+4}d\omega = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ομοίως, η ενέργεια του σήματος εισόδου $x(t)$ είναι:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-4t}dt = \frac{1}{4}$$

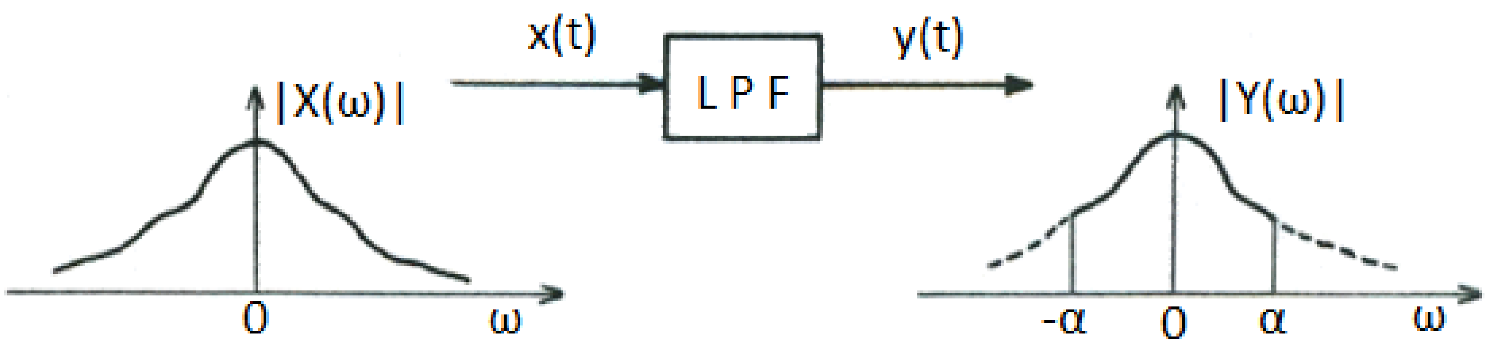
Διαιρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, βρίσκουμε τον ζητούμενο λόγο, ως:

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}29$$

Παρατηρούμε ότι ποσοστό 71% της ενέργειας εισόδου απορροφάται από το ιδανικό φίλτρο και μόνο το 29% φθάνει στην έξοδο.

Άσκηση 3

Σε ένα ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο (LPF) εισέρχεται ένα γνωστό σήμα $x(t)$ με φάσμα Fourier $|X(\omega)|$. Στην έξοδο κόβονται οι υψηλές συχνότητες, δηλαδή αυτές για τις οποίες ισχύει $|\omega| > a$. Τα φάσματα εισόδου $X(\omega)$ και εξόδου $Y(\omega)$ του LPF φίλτρου δείχνονται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογιστεί το σήμα εξόδου $y(t)$.



<u>Απάντηση</u>: Το σήμα εξόδου $y(t)$ θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier επί του φάσματος εξόδου $Y(\omega)$. Το φάσμα της εξόδου $Y(\omega)$ του φίλτρου LPF υπολογίζεται από τη σχέση $Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega)$, ενώ το σήμα εξόδου $y(t)$ είναι $y(t) = x(t) * h(t)$.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Το $X(\omega)$ θεωρείται γνωστό, άρα και το $x(t)$. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ του φίλτρου είναι τετραγωνικής μορφής και η κρουστική απόκρισή της $h(t)$ του φίλτρου είναι:

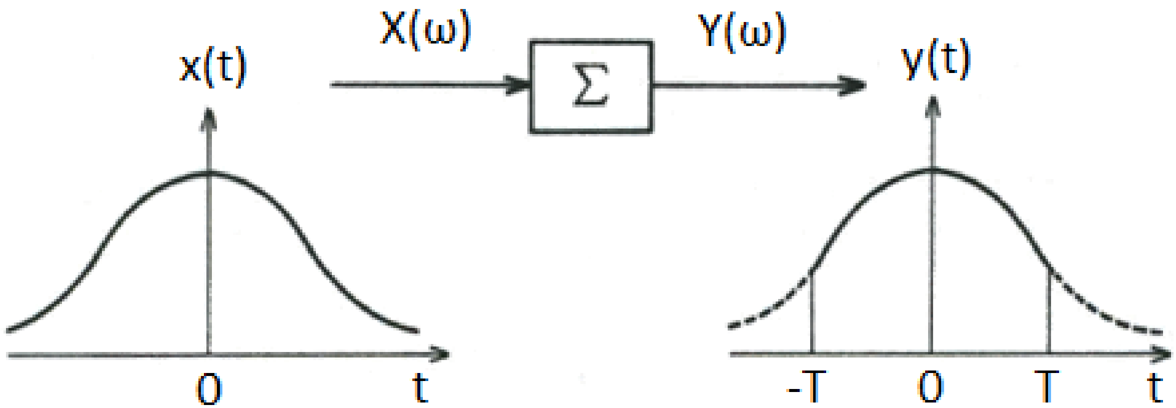
$$h(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$$

Επομένως η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται από τη συνέλιξη της εισόδου $x(t)$ με την κρουστική απόκριση $h(t)$, δηλ.:

$$y(t) = x(t) * \frac{\sin at}{\pi t}$$

Άσκηση 4

Σε ένα φίλτρο Σ εισέρχεται ένα γνωστό σήμα $x(t)$. Στην έξοδο κόβεται το $x(t)$ για $|t| > T$, όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier $Y(\omega)$ της εξόδου.



<u>Απάντηση</u>: Η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται από τη σχέση $y(t) = x(t)\,\Pi_T(t)$ όπου $\Pi_T(t)$ ο τετραγωνικός παλμός που δίνεται από τη σχέση:

$$〖\Pi〗\_T\ (t) = \begin{cases} 1, & \gamma\iota\alpha\ \ t < |T| \\ 0, & \gamma\iota\alpha\ \ t > |T| \end{cases}$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $\Pi_T(t)$ είναι:

$$\Pi_T(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin\omega T}{\omega}$$

Επομένως ισχύει:

$$Y(\omega) = F\{y(t)\} = F\{\, x(t)\, \Pi_T(t)\, \}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * \frac{2\sin\omega T}{\omega}\right]$$