

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα II

Διάλεξη 1: Χωρητικότητα Καναλιών Το θεώρημα Shannon - Hartley

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ατζέντα

1. Δυαδική σηματοδοσία
2. Μορφές δυαδικής σηματοδοσίας
3. Σηματοδοσία πολλών επιπέδων
4. Συμβολισμός πολλών επιπέδων
5. Υπολογισμός χωρητικότητας καναλιού
6. Θεώρημα Shannon - Hartley

Δυαδική Σηματοδοσία

Στη δυαδική σηματοδοσία (binary signaling) χρησιμοποιούνται δύο στάθμες τάσης (χαμηλή και υψηλή).

- **Δυαδική σηματοδοσία με ένα καλώδιο**

Ο ρυθμός εκπομπής περιορίζεται από το εύρος ζώνης του καναλιού. Αυτό, επειδή ο ρυθμός εκπομπής καθορίζεται από το πόσο γρήγορα μπορεί να μεταβάλλεται η τάση, πριν το φασματικό περιεχόμενο γίνει τόσο μεγάλο ώστε το αναπόφευκτο φιλτράρισμα από το κανάλι θα παραμορφώνει την υπερβολικά την πληροφορία.



- **Δυαδική σηματοδοσία με πολλά καλώδια**

Χρησιμοποιώντας πολλά καλώδια αυξάνουμε τη χωρητικότητα της σύνδεσης ανάλογα με τον αριθμό των καλωδίων.

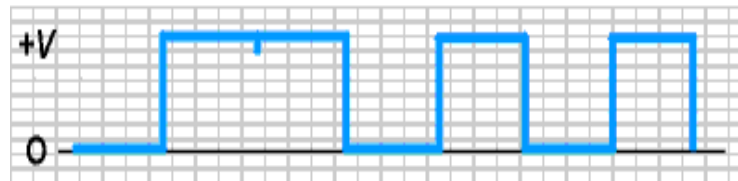
Εναλλακτικά, μπορεί να διατηρηθεί η χωρητικότητα της προηγούμενης περίπτωσης και να χρησιμοποιηθούν καλώδια με μικρότερο εύρος ζώνης (πιο φθηνά).



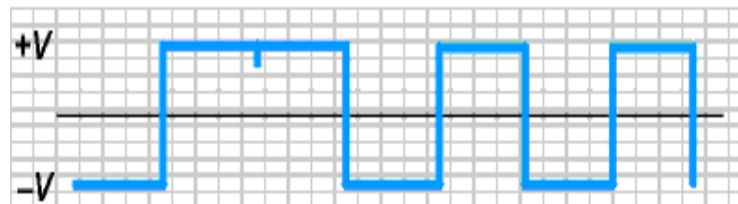
Μορφές Δυναδικής Σηματοδοσίας

- Η Μονοπολική Σηματοδοσία ([unipolar encoding](#)) χαρακτηρίζεται από δύο στάθμες τάσης, που είναι 0 και $+V$ volts, για την αναπαράσταση των ψηφίων 0 και 1. Έχει μία συνιστώσα DC στο ανάπτυγμά της σε σειρά Fourier (έχει μη μηδενική μέση τιμή).
- Η Διπολική Σηματοδοσία ([bipolar encoding](#)), χαρακτηρίζεται από δύο στάθμες τάσης, που είναι $+V$ και $-V$ volts, για την αναπαράσταση των ψηφίων 0 και 1. Έχει μηδενική DC μέση τιμή.

Unipolar



Bipolar



Σηματοδοσία Πολλών Επιπέδων (1/4)

Στη σηματοδοσία πολλών επιπέδων (multilevel signaling) χρησιμοποιούνται πολλές στάθμες τάσης (θεωρητικά απεριόριστο πλήθος).

- **Σηματοδοσία πολλών επιπέδων με ένα καλώδιο**

Με π.χ. 4 επίπεδα τάσης μπορούμε να κωδικοποιήσουμε 4 bits (00=επίπεδο A, 01=επίπεδο B, 10=επίπεδο C, 11=επίπεδο D). Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά που αλλάζει η κατάσταση μεταφέρονται 2 bits πληροφορίας, αντί του ενός που μεταφέρεται στα δυαδικά. Άρα αυξάνει ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας.



- **Σηματοδοσία πολλών επιπέδων με πολλά καλώδια**

Χρησιμοποιώντας πολλά καλώδια αυξάνουμε τη χωρητικότητα της σύνδεσης ανάλογα με τον αριθμό των καλωδίων.



Σηματοδοσία Πολλών Επιπέδων (2/4)

Στα σύγχρονα ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας δεν χρησιμοποιείται πλέον η δυαδική σηματοδοσία, αλλά η **σηματοδοσία πολλών επιπέδων (M-αδική σηματοδοσία)**, π.χ. 1024 καταστάσεων.

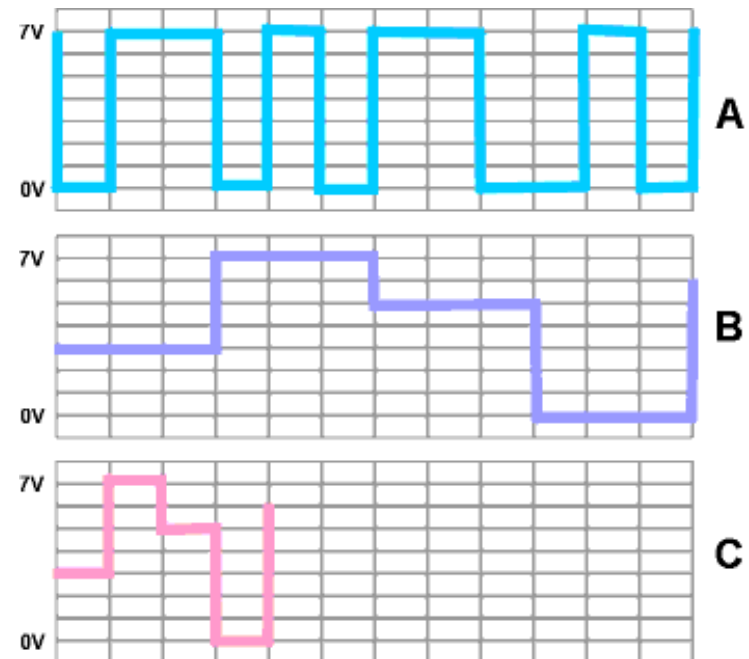
Ο αριθμός των **καταστάσεων σηματοδοσίας (M)** που απαιτείται για να αναπαρασταθεί με μοναδικό τρόπο κάθε σχηματισμός από n bits, δίνεται από τη σχέση $M = 2^n$

Παράδειγμα: Έστω σύστημα με $M=8$ καταστάσεις.

Σχήμα Α: Το **δυαδικό σήμα** που παράγεται από την πηγή και πρέπει να κωδικοποιηθεί σε 8 καταστάσεις.

Σχήμα Β: Το κωδικοποιημένο μήνυμα με **ίδιο ρυθμό μεταφοράς** με το δυαδικό σήμα. Ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η τάση **μειώνεται κατά 3 φορές**, γεγονός που αντιστοιχεί σε **μείωση** του απαιτούμενου για τη μετάδοση **εύρους ζώνης**.

Σχήμα Γ: Ένα σήμα οκτώ επιπέδων με τον ίδιο ρυθμό συμβόλων με το δυαδικό σήμα με το ίδιο εύρος ζώνης, αλλά με **τριπλάσιο ρυθμό μεταφοράς πληροφορίας**.



Σηματοδοσία Πολλών Επιπέδων (3/4)

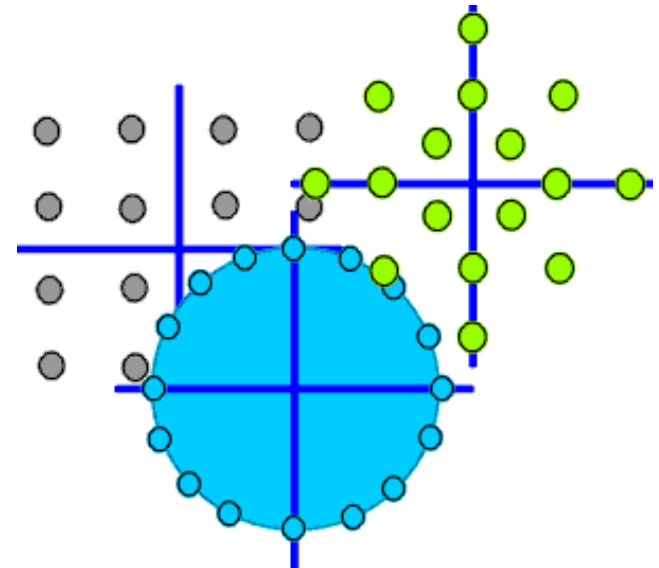
Χρησιμοποιώντας M διαφορετικές καταστάσεις μπορούμε να μεταφέρουμε $\log_2 M = L$ bits πληροφορίας σε μία κατάσταση. Π.χ. αν $M=1024$ τότε $L=10$ bits.

Εναλλακτικά αν επιθυμούμε κάθε κατάσταση να μεταφέρει 20 bits, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $2^{20} = 1.048.576$ καταστάσεις συμβόλων.

Δεν υπάρχει θεωρητικό όριο στο πλήθος M των διαφορετικών καταστάσεων.

Στην πράξη όμως η ικανότητα του δέκτη να διακρίνει με ακρίβεια τις επιμέρους καταστάσεις περιορίζεται πολύ από την ύπαρξη θορύβου και παραμορφώσεων, καθώς και από τις μονάδες πομπού και δέκτη.

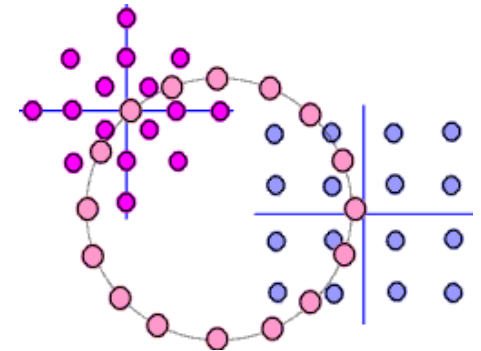
Οι καταστάσεις μπορεί να είναι στάθμες τάσης, συχνότητες, συνδυασμοί πλάτους και φάσης, εντάσεις φωτός, κλπ.



Σηματοδοσία Πολλών Επιπέδων (4/4)

Πλεονεκτήματα

- Είναι εφικτός υψηλότερος ρυθμός μεταφοράς πληροφορίας για δεδομένο ρυθμό συμβόλων και εύρος ζώνης.
- Μπορεί να ληφθεί μικρότερος ρυθμός συμβόλων, που θα οδηγήσει σε μικρότερο εύρος ζώνης για δεδομένο ρυθμό πληροφορίας.



Μειονεκτήματα

- Μειωμένη ανοσία σε θόρυβο, καθώς είναι πιο δύσκολη η διάκριση μεταξύ των διαδοχικών καταστάσεων.
- Περιλαμβάνεται πιο περίπλοκη διαδικασία ανάκτησης συμβόλων στο δέκτη.
- Αυξημένες απαιτήσεις γραμμικότητας και μειωμένης παραμόρφωσης στα κυκλώματα πομπού και δέκτη, αλλά και στο κανάλι.

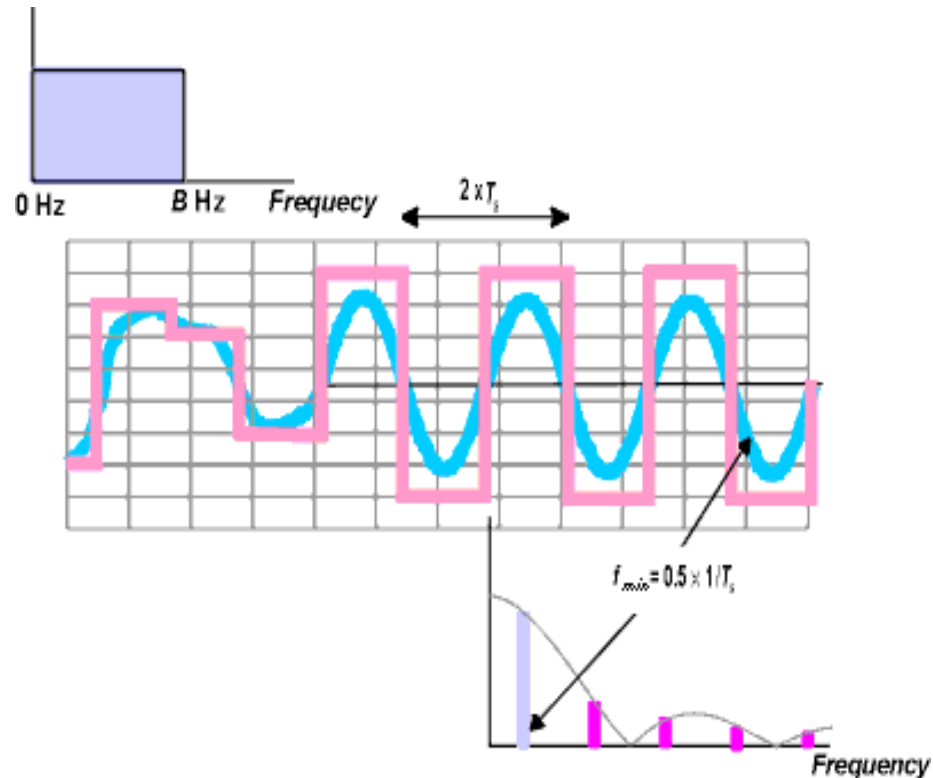
Υπολογισμός Χωρητικότητας Καναλιού (1/2)

Ένα ιδανικό (χωρίς θόρυβο) κανάλι βασικής ζώνης (baseband) λειτουργεί σαν ένα χαμηλοδιαβατό φίλτρο (LPF) με εύρος ζώνης $0 - B$ (Hz).

Ένα σήμα π.χ. 8 επιπέδων μεταβάλλεται μεταξύ ενός κατώτατου και ενός ανώτατου επιπέδου τάσης και εισέρχεται στο κανάλι.

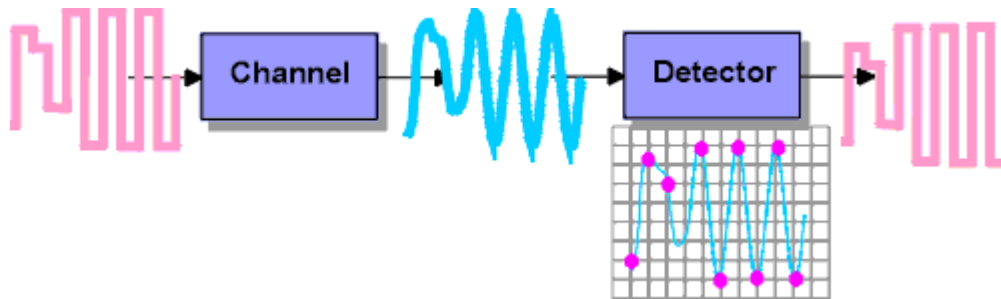
Το σήμα μοιάζει με τετραγωνικό κύμα, του οποίου γνωρίζουμε το ανάπτυγμα Fourier.

Η θεμελιώδης συχνότητά του είναι $0,5 \times \frac{1}{T_s}$, όπου T_s είναι η περίοδος συμβόλου.



Υπολογισμός Χωρητικότητας Καναλιού (2/2)

Έστω ότι το κανάλι έχει εύρος ζώνης $B = 0,5 \times \frac{1}{T_s}$ (Hz) αρκετό μόλις ώστε να περάσει η θεμελιώδης συχνότητα του τετραγωνικού κύματος.



Ο δέκτης μπορεί να ανακτήσει επιτυχώς τα σύμβολα, εφόσον: (α) διατηρούμε σταθερά επίπεδα τάσης στο σύστημα και (β) δειγματοληπτούμε το ανιχνευόμενο σήμα στις σωστές χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια της περιόδου του συμβόλου.

Το τετραγωνικό σήμα αντιστοιχεί στο μέγιστο δυνατό ρυθμό 8-δικής σηματοδότησης και επομένως απαιτεί το μεγαλύτερο δυνατό εύρος ζώνης. Άρα οποιαδήποτε άλλη μορφή του σήματος θα απαιτεί εύρος ζώνης (B) μικρότερο από $0,5 \times \frac{1}{T_s}$ (Hz).

Αν όμως ισχύει $B \leq 0,5 \times \frac{1}{T_s}$, τότε σε κάποιες χρονικές στιγμές θα διακόπτεται η διέλευση του σήματος από το κανάλι.

Χωρητικότητα Καναλιού (1/4)

Το ελάχιστο εύρος ζώνης που απαιτείται για εκπομπή απαλλαγμένη από σφάλματα σε ένα κανάλι βασικής ζώνης, είναι $B_{\text{MIN}} = 0,5 \times \frac{1}{T_s} = \frac{1}{2T_s}$ (Hz), όπου T_s είναι η περίοδος των συμβόλων.

Χωρητικότητα καναλιού (C - Channel Capacity) είναι μέγιστος ρυθμός (Maximum Data Rate) με τον οποίο ένα κανάλι μπορεί να μεταφέρει δεδομένα και προσδιορίζεται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του καναλιού.

Επειδή ο μέγιστος ρυθμός αποστολής συμβόλων μέσα από ένα κανάλι είναι $2B$ symbols/s και επειδή κάθε σύμβολο μεταφέρει $\log_2 M$ bits, προκύπτει το **Θεώρημα Nyquist**, δηλ. ότι ο **θεωρητικά μέγιστος** ρυθμός μετάδοσης (για ιδανικές συνθήκες = απουσία θορύβου), είναι:

$$C = 2 B \log_2 M \quad \text{bits/s}$$

όπου M είναι το πλήθος των επιπέδων (καταστάσεων) της μετάδοσης (π.χ. για δυαδική μετάδοση $M = 2$).

Χωρητικότητα Καναλιού (2/4)

Παράδειγμα: Για κανάλι με εύρος ζώνης $B = 10 \text{ KHz}$ και μετάδοση:

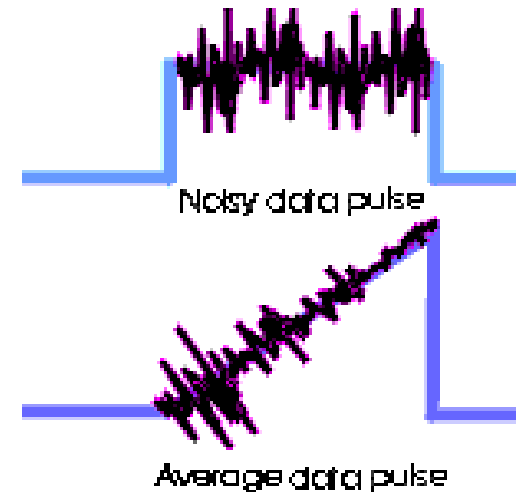
- Δυαδική ($M = 2$): $C = 2 \cdot 10.000 \log_2 2 = 20.000 \text{ bits/sec}$
- Τετραδική ($M = 4$): $C = 2 \cdot 10.000 \log_2 4 = 40.000 \text{ bits/sec}$

Παρατηρούμε ότι η αύξηση των επιπέδων μετάδοσης (M) βελτιώνει τον ρυθμό μετάδοσης.

Χωρητικότητα Καναλιού (3/4)

Κρίσιμοι παράγοντες για τον προσδιορισμό του πλήθους καταστάσεων M για επικοινωνία απαλλαγμένη από σφάλματα:

- Ο λόγος της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του θορύβου (Signal to Noise Ratio, S/N ή SNR), επειδή η ικανότητα του δέκτη να διακρίνει τα σύμβολα μεταξύ τους επηρεάζεται από την ύπαρξη παραμορφώσεων (θόρυβος, παρεμβολές, κλπ).
- Η διάρκεια κάθε συμβόλου, επειδή τα μακρά σύμβολα δίνουν περισσότερο χρόνο στο δέκτη να μετριάσει την επίδραση του θορύβου.



Θεώρημα Shannon - Hartley

Θεώρημα [Shannon - Hartley](#) [ισχύει για ενθόρυβα κανάλια]:

$$C = B \log_2(1 + SNR) \text{ bits/s}$$

Το θεώρημα Shannon – Hartley δίνει ένα θεωρητικό άνω όριο της χωρητικότητας, παρουσία θορύβου και δηλώνει ότι:

- Αν ο ρυθμός μεταφοράς πληροφορίας είναι μικρότερος από το όριο χωρητικότητας (C), τότε είναι δυνατή η μετάδοση χωρίς σφάλματα.
- Αν ο ρυθμός μεταφοράς πληροφορίας είναι μεγαλύτερος από το C , τότε θα υπάρχουν οπωσδήποτε σφάλματα, όσο καλά και αν έχουν σχεδιαστεί οι συσκευές.

Χωρητικότητα Καναλιού (4/4)

Παράδειγμα: Για μετάδοση μέσα από ενθόρυβο κανάλι, εύρους ζώνης **B=10 KHz** και με: (α) **SNR = 31 dB** και (β) **SNR = 63 dB**, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης (χωρητικότητα), σύμφωνα με το θεώρημα Shannon – Hartley, είναι:

$$1) C = 10.000 \log_2(1 + 10^{31}) = 10.000 \times 9,332 = 93.332 \text{ bits/sec}$$

$$2) C = 10.000 \log_2(1 + 10^{63}) = 10.000 \times 18,964 = 189.640 \text{ bits/sec}$$

Παρατηρούμε ότι η ύπαρξη θορύβου στο κανάλι **υποβιβάζει σημαντικά** τον ρυθμό μετάδοσης δεδομένων.

Άσκηση 1

Μία τηλεφωνική ζεύξη διαθέτει χρήσιμο εύρος ζώνης καναλιού από 0 έως 3,1 kHz, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί επίπεδο και απαλλαγμένο από παραμόρφωση. Απαιτείται να μεταβιβάζεται πληροφορία με ρυθμό 28,8 kbps σε αυτό το κανάλι. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός καταστάσεων συμβόλων που απαιτούνται ώστε να υποστηριχθεί αυτός ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων;

Απάντηση:

Η χωρητικότητα (C) καναλιού σε ένα κανάλι βασικής ζώνης (B) (δηλ. αυτό που έχει εύρος ζώνης από 0 Hz μέχρι B Hz), δίνεται από:

$$C = 2B \log_2 M$$

Έτσι, για χωρητικότητα $C = 28,8 \text{ kbps}$ και εύρος ζώνης $B = 3.1 \text{ kHz}$, το πλήθος των απαιτούμενων καταστάσεων συμβόλων (M), είναι:

$$M = \text{antilog}_2 28.800 / (2 \times 3.100) = 22,8 \text{ ή } \mathbf{23} \text{ καταστασεις συμβολων}$$

Άσκηση 2

Ένα modem χρησιμοποιείται σε τηλεφωνική ζεύξη με εύρος ζώνης $B = 3 \text{ kHz}$ και μέσο λόγο σήματος προς θόρυβο $SNR = 30 \text{ dB}$. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός αποστολής δεδομένων άνευ σφαλμάτων που μπορεί να υποστηριχθεί από το κανάλι και πόσες καταστάσεις σηματοδοσίας πρέπει να χρησιμοποιηθούν;

Απάντηση: Εφαρμόζοντας τη σχέση Shannon–Hartley έχουμε:

$$C = 3000 \log_2(10^3 + 1) = 29.9 \text{ kbps}$$

Προσοχή! Ο SNR πρέπει να μετατραπεί από dB σε καθαρό αριθμό, π.χ. τα 30 dB είναι 10^3 .

Για να καθοριστεί το πλήθος των καταστάσεων σηματοδοσίας που απαιτούνται για να υποστηριχθεί αυτός ο ρυθμός δεδομένων, θα εφαρμόσουμε τη σχέση:

$$C = 2B \log_2 M \text{ (για κανάλι βασικής ζώνης)}$$

Έτσι απαιτούνται: $M = 2^{C/2B} = 31.6 \rightarrow \mathbf{32}$ καταστάσεις σηματοδοσίας.

Άσκηση 3

Ένα σύστημα ψηφιακής εκπομπής τηλεόρασης πρέπει να υποστηρίζει ρυθμό δεδομένων 3,5 Mbps μέσα σε ένα εύρος ζώνης μικρότερο από 1,4 MHz. Ποιος είναι ο μέγιστος λόγος σήματος προς θόρυβο σε dB που μπορεί να γίνει ανεκτός εάν το κανάλι πρόκειται να παρέχει επικοινωνία δεδομένων χωρίς σφάλματα;

Απάντηση:

Εφαρμόζοντας τη σχέση Shannon–Hartley έχουμε:

$$3.500.000 = 1.400.000 \log_2(SNR + 1)$$

Έτσι, για μετάδοση απαλλαγμένη από σφάλματα, ο λόγος σήματος προς θόρυβο (SNR) πρέπει να υπερβαίνει τα:

$$SNR = 2^{3.5/1.4} - 1 = 4.656 \text{ ή } 10\log_{10}(4.656) = 6.7 \text{ dB}$$

Απόδοση Ισχύος και Εύρους Ζώνης

Για ένα σύστημα που εκπέμπει στη μέγιστη χωρητικότητα C , η μέση ισχύς σήματος S , που μετριέται στην είσοδο του δέκτη, γράφεται ως $S = E_b C$, όπου E_b είναι η μέση λαμβανόμενη ενέργεια ανά bit.

Η μέση ισχύς θορύβου N μπορεί επίσης να οριστεί ως $N = N_0 B$, όπου N_0 είναι η πυκνότητα ισχύος θορύβου (Watt/Hz).

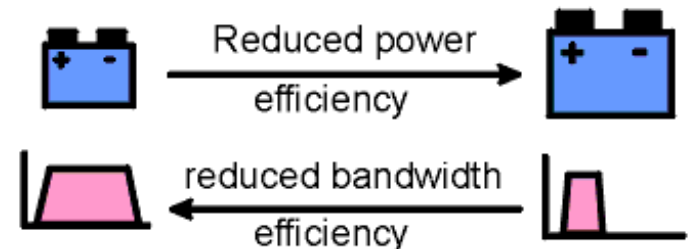
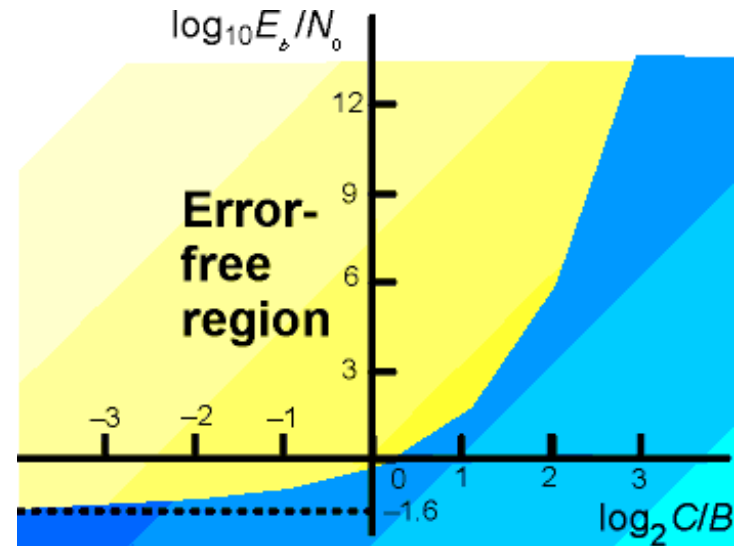
Έτσι, το θεώρημα Shannon – Hartley μπορεί να γραφεί ως:

$$C/B = \log_2 \left(1 + \frac{E_b C}{N_0 B} \right)$$

- Ο όρος C/B αντιπροσωπεύει τη φασματική απόδοση (bit/s/Hz) του συστήματος.
- Ο λόγος E_b/N_0 αποτελεί μέτρο της απόδοσης ισχύος του συστήματος. Όσο μικρότερος είναι, τόσο λιγότερη ενέργεια χρησιμοποιείται από κάθε bit (και από κάθε σύμβολο), ώστε αυτό να ανιχνευθεί σωστά παρουσία μίας δεδομένης ποσότητας θορύβου.

Γραφική Απεικόνιση Θεωρήματος Shannon - Hartley

- Η φασματική απόδοση σχετίζεται και άρα μπορεί να ανταλλαχθεί με την απόδοση ισχύος, και αντίστροφα.
- Το θεώρημα Shannon – Hartley θεωρεί ότι ο θόρυβος που συνυπάρχει με το σήμα, είναι λευκός, προσθετικός και γκαουσιανής μορφής ([Additive White Gaussian Noise - AWGN](#)).
- Αυτό γενικά ισχύει αν το εύρος ζώνης λειτουργίας ενός συστήματος επικοινωνίας είναι μικρό σε σύγκριση με την κεντρική συχνότητα του καναλιού.
- Στην πράξη, κανένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνιών δεν μπορεί να επιτύχει τη χωρητικότητα που προβλέπεται από την εξίσωση Shannon, και τα περισσότερα υπολείπονται κατά 3 dB ή περισσότερο.



Άσκηση 4

Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνιών λειτουργεί με φασματική απόδοση 4 bit/s/Hz, για να χωρά ικανό αριθμό χρηστών.

A) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του λόγου E_b/N_0 ώστε να εξασφαλιστεί ότι οι χρήστες στις παρυφές της περιοχής κάλυψης θα έχουν επικοινωνία απαλλαγμένη από σφάλματα;

B) Αν είναι επιθυμητός ο διπλασιασμός των χρηστών, πόσο περισσότερη ισχύ θα πρέπει να ακτινοβολεί ο σταθμός βάσης και οι συσκευές των χρηστών, ώστε να διατηρηθεί η υπάρχουσα κάλυψη και η επικοινωνία να είναι απαλλαγμένη από σφάλματα;

Απάντηση:

A) Θέτουμε $C/B = 4$ στη σχέση Shannon – Hartley και έχουμε $4 = \log_2(1 + 4E_b/N_0)$. Λύνουμε ως προς E_b/N_0 και βρίσκουμε:

$$E_b/N_0 = (2^4 - 1)/4 = 3,75 \text{ ή } 5,74 \text{ dB}$$

B) Για να διπλασιαστεί ο αριθμός χρηστών στο δίκτυο για το ίδιο εύρος ζώνης λειτουργίας, θα πρέπει να αυξηθεί η φασματική απόδοση σε 8 bit/s/Hz. Επομένως:

$$E_b/N_0 = (2^8 - 1)/8 = 31,87 \text{ ή } 15,03 \text{ dB}$$

Άρα η εκπεμπόμενη ισχύς θα πρέπει να αυξηθεί κατά $15,03 - 5,74 = 9,29 \text{ dB}$.

Άσκηση 5

Μια υποθαλάσσια τηλεπικοινωνιακή σύνδεση πάσχει από πολύ υψηλή απώλεια σήματος ανά μικρή απόσταση, έτσι ώστε η μέγιστη εφικτή τιμή για το λόγο E_b/N_0 να είναι μόλις $-0,6$ dB. Ποια είναι η μέγιστη φασματική απόδοση που μπορεί να αναμένεται από αυτή τη ζεύξη στην ακραία περίπτωση και ποιος είναι ο ρυθμός αποστολής πληροφορίας που μπορεί να επιτευχθεί σε εύρος ζώνης 3.400 Hz;

Απάντηση: Το θεώρημα Shannon–Hartley μπορεί να γραφεί ως:

$$C/B = \log_2[1 + E_b C/N_0 B]$$

Για $E_b/N_0 = -0,6$ dB ο λόγος E_b/N_0 είναι $10^{0,6/10} = 0,871$

Η φασματική απόδοση C/B που μπορεί να υποστηρίξει αυτό είναι:

$$C/B = \log_2[1 + 0,871 C/B]$$

Οπότε $C/B = 0,6$ bits/s/Hz (προσεγγιστικά).

Με εύρος ζώνης 3.400 Hz, το σύστημα μπορεί να παρέχει ρυθμό μεταφοράς πληροφορίας ίσο με $3.400 \times 0,6 = 2.040$ bps