Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

# Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα ΙΙ

## Ενότητα 12: Block Κώδικες


Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

# Ατζέντα

- Τεχνικές Διόρθωσης Λαθών
  - Κώδικες εντοπισμού λαθών
  - Κώδικες εντοπισμού και διόρθωσης λαθών
  - Υβριδικοί κώδικες
- Κωδικοποίηση καναλιού
  - Ιστορική Αναδρομή
  - Βασικές έννοιες
  - Μετρικά
- Γραμμικοί block κώδικες
  - Μαθηματικό υπόβαθρο (πίνακας γεννήτορας, απόσταση hamming, κτλ)
  - Παράδειγμα γραμμικού block κώδικα
    - Κωδικοποίηση
    - Αποκωδικοποίηση
- Κυκλικοί block κώδικες
  - Μαθηματικό υπόβαθρο (πολυώνυμο γεννήτορας, κτλ)
  - Παράδειγμα κυκλικού block κώδικα
    - Κωδικοποίηση
    - Αποκωδικοποίηση
- Κέρδος κωδικοποίησης καναλιού

# Τεχνικές Διόρθωσης Λαθών (1/2)

- Πρόβλημα: Κατά τη μετάδοση ψηφιακών δεδομένων, ο δέκτης λαμβάνει **λανθασμένα** δεδομένα

- Βασική ιδέα: Μπορεί ο δέκτης
  - να εντοπίσει εάν ένα μήνυμα έχει λάθος;
  - να διορθώσει ένα λανθασμένο μήνυμα;

- Λύση
  - Τεχνικές διόρθωσης λαθών

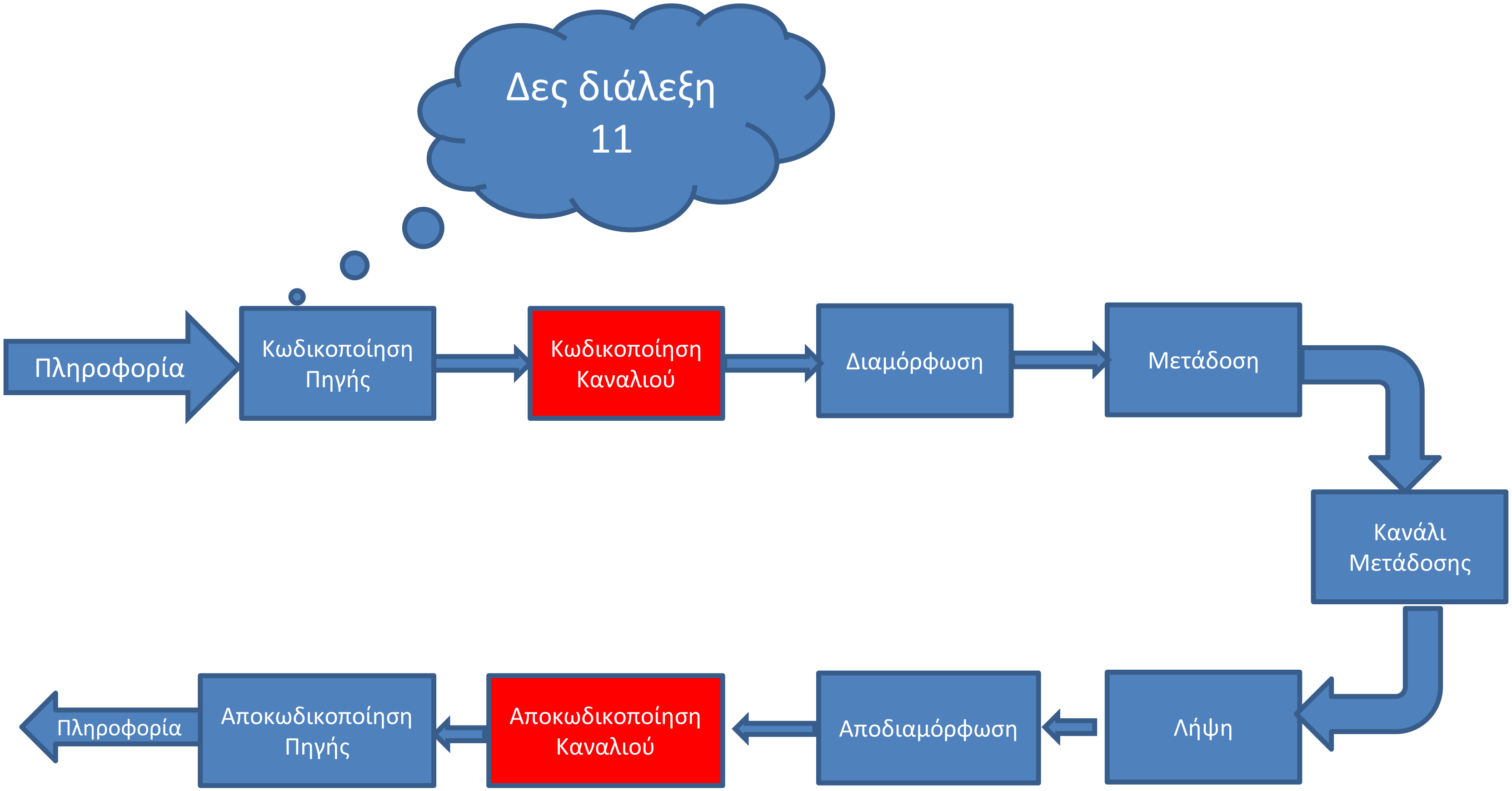
# Τεχνικές Διόρθωσης Λαθών (2/2)

- Forward error-control (FEC)
  - Χρησιμοποιώντας έξτρα bit (bit ισοτιμίας) στα μεταδιδόμενα δεδομένα, μπορούμε να εντοπίσουμε και να διορθώσουμε λάθη κατά την διάρκεια της λήψης.
  - Μονόδρομη επικοινωνία
- Automatic-repeat request (ARQ)
  - Χρησιμοποιούμε έξτρα bit κυρίως για τον εντοπισμό λαθών.
  - Ο δέκτης ενημερώνει τον αποστολέα για την ορθότητα ή μη των λαμβανόμενων δεδομένων (ACK (Acknowledgement) ή NACK (Not-Acknowledgement αντίστοιχα).
  - Ο αποστολέας επαναμεταδίδει δεδομένα για τα οποία έλαβε NACK.
  - Αμφίδρομη επικοινωνία
- Υβριδική ARQ (ARQ+FEC)
  - Αμφίδρομη επικοινωνία
  - Εντοπισμός λαθών και διόρθωση

# Τεχνικές Διόρθωσης Λαθών FEC: Ιστορική Αναδρομή

| | |
|---|---|
| 1948 | • Ο Shannon δημοσιεύει την εργασία του για την θεωρία πληροφορίας |
| 1954 | • Ο Hamming ορίζει τους βασικούς δυαδικούς κώδικες |
| 1959 | • Κώδικες BCH |
| 1961 | • Οι Reed και Solomon προτείνουν την τεχνική ECC |
| 1962 | • Κώδικες LDPC από τον Gallager |
| 1967 | • Αποκωδικοποίηση Viterbi |
| 1968 | • Κώδικες Forney |
| 1969 | • Αλγεβρική αποκωδικοποίηση από τους Berlekamp και Messey |
| 1975 | • Πρώτες υλοποιήσεις κωδίκων RS σε μηχανές |
| 1983 | • Εμφάνιση RS κωδικών σε CD |
| 1988 | • Viterbi κώδικες υλοποιημένοι σε hardware συσκευών |
| 1992 | • Κώδικες turbo (Berrou) |
| 1996 | • Επανεμφάνιση LDPC κωδίκων |
| 2003 | • Υιοθέτηση LDPC στο DVB-S2 |

# Κωδικοποίηση Καναλιού
# Τεχνική FEC

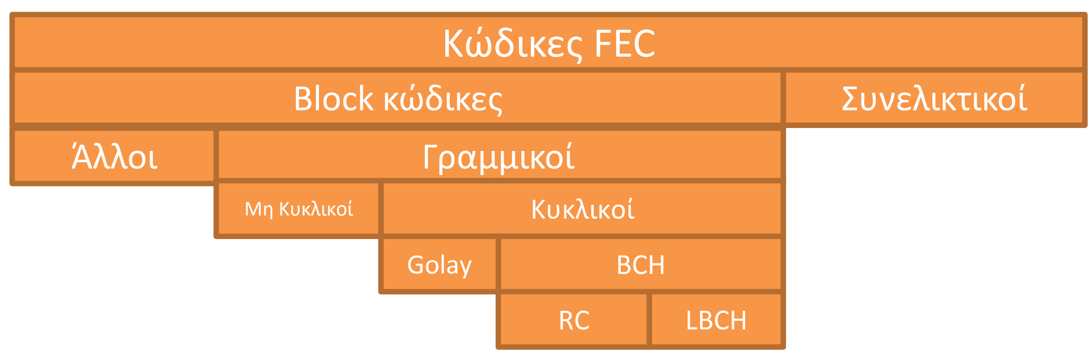


# Forward error-control (FEC)

- Η βασική ιδέα των τεχνικών FEC είναι η μετάδοση ικανού πλήθους έξτρα δεδομένων, έτσι ώστε ο δέκτης να είναι σε θέση να εντοπίσει και να διορθώσει λάθη μετάδοσης.

- Δεν απαιτείται επαναμετάδοση δεδομένων.

- Οι κυριότερες κατηγορίες FEC κωδικών είναι:
  - Κώδικες Block
  - Κυκλικοί κώδικες
  - Συνελικτικοί κώδικες
  - Turbo κώδικες



# Κώδικες Block
# Βασικές Έννοιες (1/2)

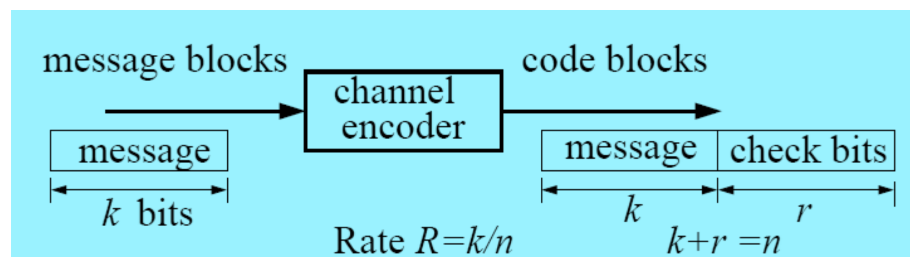

- Η πληροφορία διαιρείται σε blocks μεγέθους ***k***
- Σε κάθε block προστίθενται **r bits ισοτιμίας** (ή ελέγχου)
  - Συνολικό μέγεθος κάθε block

$$n = k + r$$

- Ρυθμός κώδικα:

$$R = \frac{k}{n}$$

- Ο αποκωδικοποιητής αναζητά την κωδική λέξη «πλησιέστερη» στο λαμβανόμενο μήνυμα:
  - λαμβανόμενο μήνυμα = κωδική λέξη + διάνυσμα λάθους
- Αντιστάθμιση μεταξύ:
  - Αποδοτικότητας
  - Αξιοπιστίας
  - Πολυπλοκότητας




- Στην αποκωδικοποίηση μέγιστης πιθανότητας, συγκρίνουμε το λαμβανόμενο μήνυμα με όλα τα πιθανά μεταδιδόμενα μηνύματα και επιλέγουμε αυτό με την μικρότερη **απόσταση**.

# Κώδικες Block
# Βασικές Έννοιες (2/2)

- Υπάρχουν συστηματικοί και μη συστηματικοί κώδικες

- Για την κατηγορία των block κωδίκων, οι συστηματικοί είναι πιο αποδοτικοί.

- Τα k bits πληροφορίας συν τα r bits ισοτιμίας σχηματίζουν την κωδική λέξη $(k + r = \mathrm{n})$

- Όλες οι πιθανές κωδικές λέξεις σχηματίζουν το βιβλίο κωδίκων (codebook)

- Ένας συστηματικός block κώδικας συμβολίζεται με $(n, k)$
  - Για παράδειγμα ένας κώδικας (17, 12) έχει n=17, k=12 και r=5

- Στους συστηματικούς γραμμικούς block αλγόριθμους, τα r bits ισοτιμίας τοποθετούνται στο τέλος του block

# Block Κώδικες - Μετρικά Σύγκρισης (Αποστάσεις)

- Απόσταση Hamming
  - Το πλήθος των bits που δύο κωδικές λέξεις διαφέρουν.
    - π.χ. Οι λέξεις 01101 και 01111 έχουν απόσταση Hamming ίση με 1 (γιατί;)

- Ευκλείδεια Απόσταση
  - Εάν $\hat{x}_1 = [a_1\, a_2\, \ldots a_n]$ και $\hat{x}_2 = [b_1\, b_2\, \ldots b_n]$ δύο κωδικές λέξεις μεγέθους $n$, τότε η Ευκλείδεια απόσταση ορίζεται από την σχέση: $E_{dis} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(|a_i - b_i|^2)}$

- Επιλογή μετρικού:
  - Ανάλογα με το κανάλι μετάδοσης
    - Gaussian με υψηλό SNR → Ευκλείδεια Απόσταση
    - Raleigh Fading → Απόσταση Hamming

# Γραμμικοί Block Κώδικες - Κωδικοποίηση

- Έστω $c$ μία κωδική λέξη με $n$ bits

- Έστω $d$ ένα μήνυμα (προς κωδικοποίηση) με μήνυμα $k$ bits, γραμμένο σε μορφή διανύσματος (π.χ. $d = [011001]$)

- Ένας γραμμικός κώδικας $(n, k)$ ορίζεται από έναν πίνακα **γεννήτορα** $\boldsymbol{G}[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}]$

- Ο πίνακας **G** αναλύεται ως εξής:
  - $\boldsymbol{G} = [\mathbf{I}_{\boldsymbol{k}} | \boldsymbol{P}]$, όπου ο **P** έχει μέγεθος $\mathrm{k} \times (n - k)$ και ορίζεται από τον κώδικα $(n, k)$ και $\mathrm{I}_k$ ο μοναδιαίος πίνακας τάξης $k$

- Κωδικοποίηση: $c = d \cdot \boldsymbol{G}$
  - Όλες οι αριθμητικές πράξεις γίνονται βάση του modulo 2

- ***Παρατήρηση***: Μία δυαδική ακολουθία των $n$ bits έχει $2^n$ διαφορετικές τιμές. Ωστόσο, μόνο $2^k$ από αυτές είναι πιθανό να μεταδοθούν. Γιατί;

# Γραμμικοί Block Κώδικες - Κωδικοποίηση - Παράδειγμα

Έστω κώδικας (6, 3) με πίνακα γεννήτορα and codebook

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 | 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 | 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 | 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το βιβλίο κωδίκων είναι το:

| Μήνυμα | Κωδική Λέξη | |
|---|---|---|
| 000 | 000 | 000 |
| 001 | 001 | 110 |
| 010 | 010 | 101 |
| 011 | 011 | 011 |
| 100 | 100 | 011 |
| 101 | 101 | 101 |
| 110 | 110 | 110 |
| 111 | 111 | 000 |

- Για παράδειγμα, για μήνυμα $d = 110$ , τα bit ισοτιμίας υπολογίζονται ως εξής:
  - $c4 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 + 1 + 0 = 1$
  - $c5 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1 + 0 + 0 = 1$
  - $c6 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 + 1 + 0 = 0$

- Οι αριθμητικές πράξεις είναι δυαδικές (***modulo-2***)

- $2^6 = 64$ , αλλά μόνο $2^3 = 8$ κωδικές λέξεις είναι σωστές. Για παράδειγμα, η λέξη 111111 δεν είναι πιθανή. Άρα, εάν την λάβει ο δέκτης, θα προχωρήσει σε διόρθωση.

# Γραμμικοί Block Κώδικες - Αποκωδικοποίηση

- Κάθε πίνακας γεννήτορας $\boldsymbol{G}$, μεγέθους $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{n}$ με $\boldsymbol{G} = [\mathbf{I}_k | \boldsymbol{P}]$, σχετίζεται με έναν πίνακα ισοτιμίας $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{P}^T | \boldsymbol{I}_{n-k}]$

Για το προηγούμενο παράδειγμα

$$\mathrm{H} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- **Για κάθε έγκυρη κωδική λέξη** $\boldsymbol{c}$, ισχύει $\mathrm{c} \cdot \boldsymbol{H}^T = 0$

- Μία λαμβανόμενη λέξη $r$ μπορεί να γραφεί ως
$$r = c + e$$

- Όλα τα στοιχεία είναι δυαδικά, π.χ. εάν μεταδοθεί το στοιχείο $c_i = 0$ και λάβουμε $r_i = 1$, τότε $e_i = 1$

- Ορίζουμε ως σύνδρομο λάθους s το διάνυσμα γραμμή μεγέθους $n - k$ που προκύπτει από την πράξη
$$s = rH^T = (c + e)H^T = cH^T + eH^T = eH^T$$

- Το $s$ σχετίζεται με το διάνυσμα λάθους $e$ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εντοπισθούν και να διορθωθούν λάθη

# SOFT Αποκωδικοποίηση

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Για κάθε n λαμβανόμενα δείγματα:

1. Υπολογίζουμε τις Ευκλείδειες αποστάσεις ανάμεσα σε όλες τις διαμορφωμένες κωδικές λέξεις και στα δείγματα που λάβαμε.

2. Επιλέγουμε ως κωδική λέξη εκείνη με την ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση.

3. Εκτελούμε την αντίστροφη αντιστοίχιση για να βρούμε τη λέξη πληροφορίας.

# HARD Αποκωδικοποίηση

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

Για κάθε n λαμβανόμενα δείγματα:

1. Εκτελούμε αποδιαμόρφωση των λαμβανόμενων δειγμάτων και καταλήγουμε στα αντίστοιχα δυαδικά δεδομένα

2. Υπολογίζουμε την κωδική λέξη που είναι πλησιέστερα με βάση την απόσταση Hamming. (Συνήθως με χρήση lookup table)

3. Εκτελούμε την αντίστροφη αντιστοίχιση για να βρούμε τη λέξη πληροφορίας

# Γραμμικοί Block Κώδικες
# Δυνατότητα εντοπισμού λαθών και διόρθωσης

- **Βάρος** μίας κωδικής λέξης $c$ είναι ο αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων της $c$

- **Απόσταση Hamming** μεταξύ δύο κωδικών λέξεων $c_1$ και $c_2$ ορίζεται ως το πλήθος των στοιχείων όπου αυτά διαφέρουν

- **Ελάχιστη απόσταση** ενός βιβλίου κωδίκων , $d_{min}$, είναι η ελάχιστη απόσταση Hamming μεταξύ οποιουδήποτε ζευγαριού του βιβλίου κωδίκων

- Η ελάχιστη απόσταση distance $d_{min}$ ενός ***γραμμικού*** block κώδικα είναι το **ελάχιστο βάρο**ς των μη μηδενικών κωδίκων στο βιβλίο

- **Κώδικας με $\boldsymbol{d_{min}}$ μπορεί να ανιχνεύσει μέχρι**

$$\boldsymbol{d_{min} - 1} \text{ **λάθη**}$$

**και να διορθώσει**

$$\boldsymbol{\frac{d_{min}-1}{2}} \text{ **λάθη**}$$

**σε κάθε κωδική λέξη**

# Γραμμικοί Block Κώδικες
# Δημιουργία Hamming κωδίκων


- Για κάθε $m \geq 2$ υπάρχει ένας Hamming κώδικας με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:
  - Μήκος Κωδικής λέξης: $n = 2m - 1$
  - Πλήθος συμβόλων πληροφορίας: $k = 2^m - m - 1$
  - Πλήθος συμβόλων ισοτιμίας $m = n - k$
  - Δυνατότητα διόρθωσης λαθών $t = 1$, αφού $d_{min} = 3$

- Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας $H$ ενός κώδικα Hamming αποτελείται από όλες τις μη μηδενικούς συνδυασμούς μήκους $m$ ως στήλες

# Γραμμικοί Block Κώδικες - Παράδειγμα Hamming κώδικα

- Για παράδειγμα, έστω $m = 3$
  - $m = 3$ bit ισοτιμίας
  - $n = 2^m - 1 = 2^3 - 1 = 7$ bit το μήκος κάθε κωδικής λέξης
  - $k = 2^m - m - 1 = 2^3 - 3 - 1 = 4$ bit πληροφορίας

- Συμβολίζουμε αυτόν τον γραμμικό κώδικα με $(7, 4, 1)$

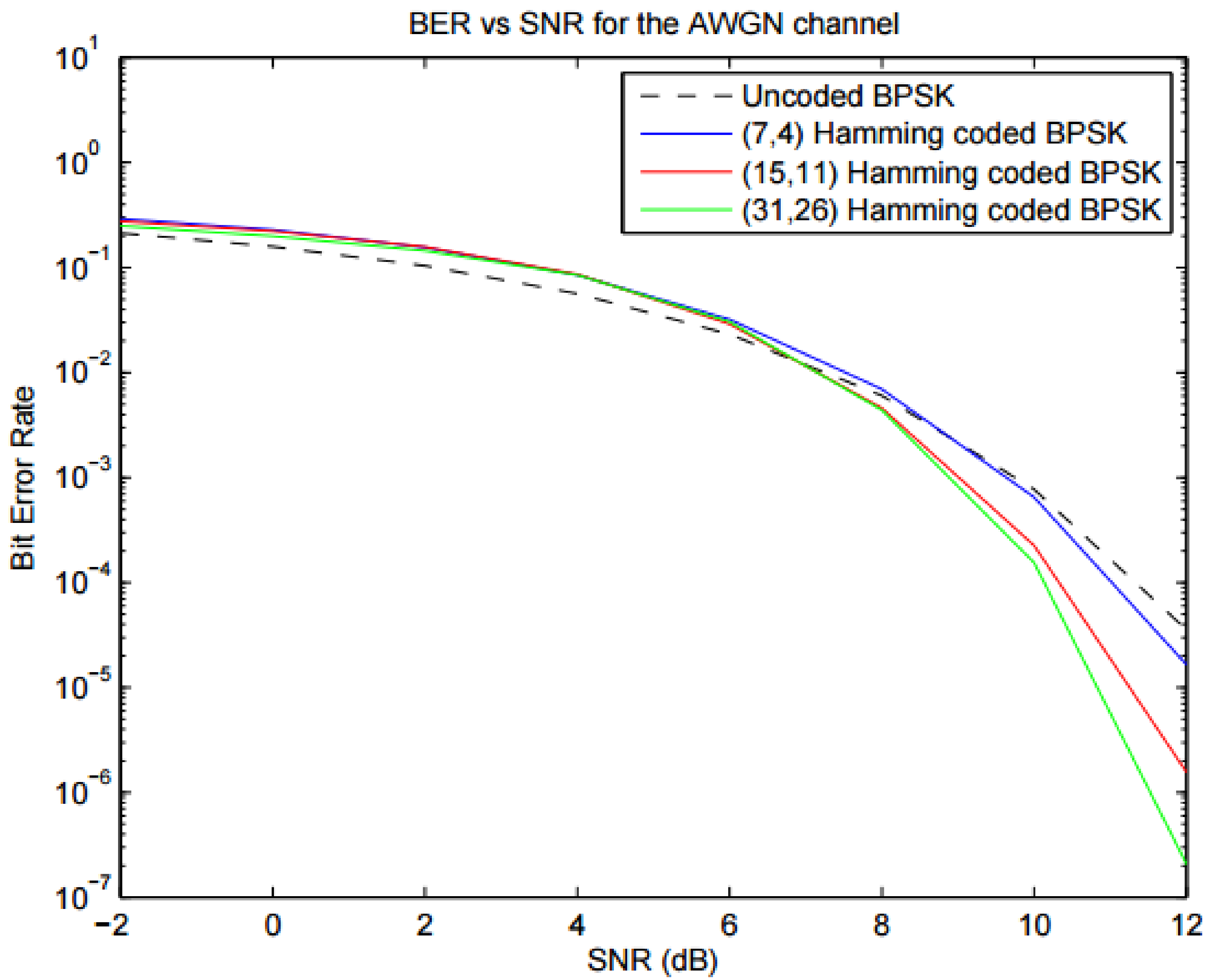
- Ο πίνακας ελέγχου ισοτιμίας **H** αυτού του κώδικα είναι:

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 | 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 | 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 | 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & |1 & 0 & 1 & 1 \\ \mathrm{I}_3 & |1 & 1 & 1 & 0 \\ & |0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathrm{I}_3 | \mathrm{P}^T]$$

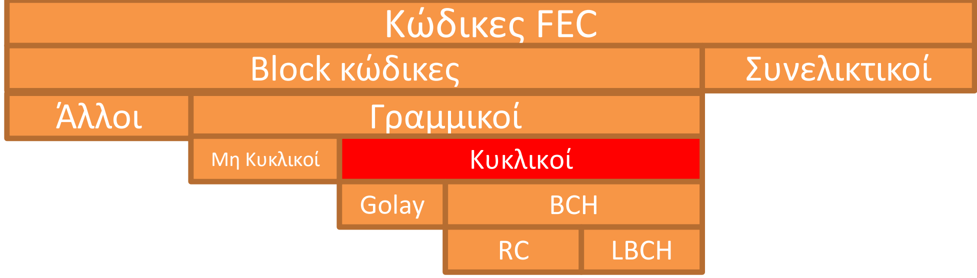
- Συνεπώς ο πίνακας Γεννήτορας του κώδικα μπορεί να κατασκευαστεί ως

$$\boldsymbol{G} = [\mathrm{I}_4 | P]$$

# Γραμμικοί Block Κώδικες - Παράδειγμα Hamming κώδικα



# Κυκλικοί Κώδικες (1/2)




- Οι κυκλικοί (ή πολυωνυμικοί) κώδικες είναι ένα υποσύνολο των γραμμικών κωδίκων.
- Ορισμός: Εάν $c_i = [c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}]$ μία κωδική λέξη τότε η $c_j = [c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-3}, c_{n-2}]$ είναι επίσης μία κωδική λέξη.
- Ένα μήνυμα μήκους $k$ bits: $d = [d_0, d_1, \dots, d_{k-1}]$ μπορεί να περιγραφεί με ένα πολυώνυμο $d(x) = d_0 + d_1 x^1 + d_2 x^2 + \cdots + d_{k-1} x^{k-1}$.
- Ο κώδικας ορίζεται από το πολυώνυμο γεννήτορα $g(x) = g_0 + g_1 x^1 + \cdots + g_r x^r$ με $g_0 = 1$ και $g_r = 1$.
- Μία κωδική λέξη $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]$ για το $d$ μπορεί να περιγραφεί με την βοήθεια πολυωνύμου:

$$c(x) = Rem\left(\frac{x^r d(x)}{g(x)}\right) + x^r d(x)$$

  όπου το υπόλοιπο $Rem\left(\frac{x^r d(x)}{g(x)}\right)$ είναι ένα πολυώνυμο μέχρι τάξης $x^{r-1}$($r$ bits ισοτιμίας) ονομάζεται πολυώνυμο ελέγχου ισοτιμίας τους $d(x)$.

- Όλοι οι υπολογισμοί είναι βάση του modulo-2.

# Κυκλικοί Κώδικες (2/2)


- Παράδειγμα κυκλικού κώδικα (7,4) με πολυώνυμο γεννήτορα

$$g(x) = 1 + x^2 + x^3$$

- Έστω μήνυμα d = 0101. Τότε

$$\mathrm{d}(x) = x^1 + x^3$$
$$x^3\mathrm{d}(x) = x^4 + x^6$$
$$Rem\left(\frac{x^3 d(x)}{g(x)}\right) = 1$$
$$c(x) = 1 + x^4 + x^6$$

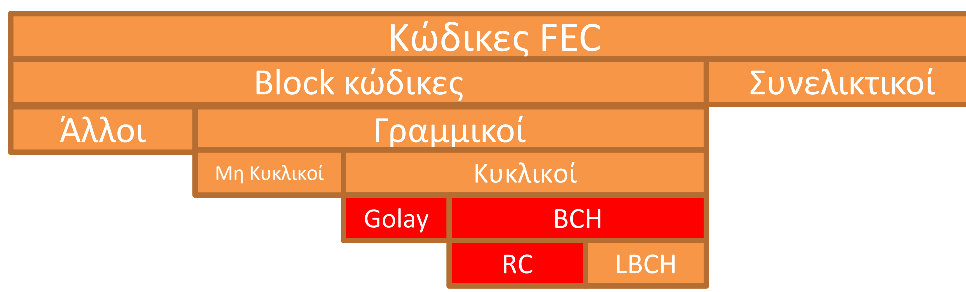
- Συνεπώς $c = 1\ 0\ 0\ \ 0\ 1\ 0\ 1$, με τα 3 πρώτα bits να είναι τα bit ισοτιμίας και τα υπόλοιπα τα bit πληροφορίας
- Στην αποκωδικοποίηση, το λαμβανόμενο $r(x) = c(x) + e(x)$ με τα μη μηδενικά bit του $e(x)$ να υποδεικνύουν τα λάθη και το πολυώνυμο σύνδρομο να υπολογίζεται ως εξής:

$$Rem\left(\frac{c(x) + e(x)}{g(x)}\right) = Rem\left(\frac{e(x)}{g(x)}\right) = s(x)$$

- Εάν το $s(x)$ είναι μηδενικό, τότε το λαμβανόμενο σήμα είτε δεν περιέχει λάθη είτε περιέχει λάθη που δεν μπορούν να ανιχνευθούν
- Εάν το $s(x)$ είναι μη μηδενικό, τότε θα λάθη ανιχνεύονται και διορθώνονται

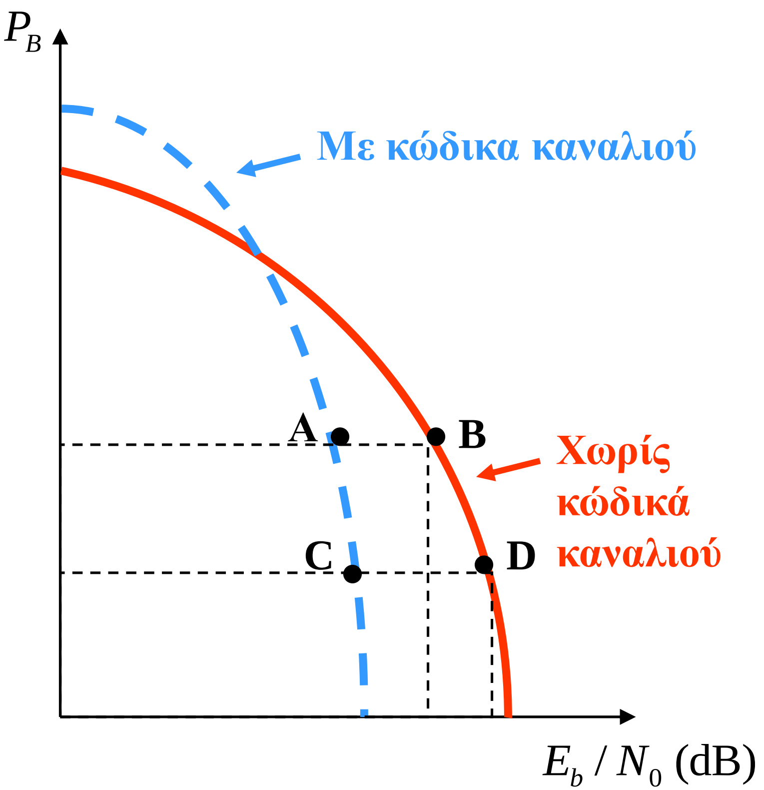
# Άλλοι κώδικες FEC

- Οι BCH είναι ένα υποσύνολο κυκλικών κωδίκων με μεγάλη τιμή $d_{min}$, και συμβολίζονται με $(n, k, d_{min})$. Έχουν μεγάλη χρησιμότητα.
- Οι μη δυαδικές εκδόσεις των BCH ονομάζονται RC (Reed Solomon)
- Κώδικες Golay



# Τι επιτυγχάνει η Κωδικοποίηση Καναλιού

- Απαιτεί λιγότερη ισχύ εκπομπής προκειμένου να πετύχουμε την ίδια πιθανότητα σφάλματος.
- Η μείωση αυτή της ισχύος (σε dB) ονομάζεται «Κέρδος Κωδικοποίησης».
- Ωστόσο, η μετάδοση «πλεονάζουσας πληροφορίας» μειώνει το ρυθμό μετάδοσης της «χρήσιμης» πληροφορίας.



# Άσκηση 1

- Θεωρήστε τον κώδικα Hamming με $m = 3$ και πίνακα γεννήτορα

$$G = \begin{bmatrix} 1000110 \\ 0100011 \\ 0010111 \\ 0001101 \end{bmatrix}$$

  – Να υπολογιστούν τα $n, k$
  – Ποιος ο ρυθμός κωδικοποίησης;
  – Να υπολογιστεί το βιβλίο κωδίκων
  – Για κάθε κώδικα που προέκυψε, να υπολογιστεί η απόσταση Hamming από το λαμβανόμενο σήμα $r = [0000001]$. Ποιος είναι ο κώδικας που θα προτείνει το βιβλίο κωδίκων;

# Λύση

- Αφού ο πίνακας γεννήτορας $G$ είναι διαστάσεων $4x7$, έχουμε $n = 7$ και $k = 4$
- Ρυθμός κωδικοποίησης $R = \frac{k}{n} = \frac{4}{7}$
- Για να υπολογίσουμε το βιβλίο κωδίκων, θα πρέπει να υπολογίσουμε τα γινόμενα $d_i G$, όπου $G$ ο πίνακας γεννήτορας και $d_i$ όλες οι πιθανές λέξεις κλειδιά (οι οποίες είναι $2^k = 2^4 = 16$).
- Για παράδειγμα, εάν $d_i = [1010]$

$$\text{τότε } c_i = d_i G = [1010] \begin{bmatrix} 1000110 \\ 0100011 \\ 0010111 \\ 0001101 \end{bmatrix} = [1010221].$$

- Ωστόσο, στην κωδικοποίηση όλες οι πράξεις είναι modulo 2. Συνεπώς, η κωδική λέξη θα είναι $c_i = [1010001]$.

# Λύση

- Μπορείτε να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα τρέχοντας τον κώδικα matlab:

```
d=[1 0 1 0];
G=[1 0 0 0 1 1 0;0 1 0 0 0 1 1;0 0 1 0 1 1 1;0 0 0 1 1 0 1];
c=mod(d*G, 2);
```

- Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα

| Μήνυμα | Κωδική Λέξη | |
|---|---|---|
| 0000 | 0000 | 000 |
| 0001 | 0001 | 101 |
| 0010 | 0010 | 111 |
| 0011 | 0011 | 010 |
| 0100 | 0100 | 011 |
| 0101 | 0101 | 110 |
| 0110 | 0110 | 100 |
| 0111 | 0111 | 001 |

| Μήνυμα | Κωδική Λέξη | |
|---|---|---|
| 1000 | 1000 | 110 |
| 1001 | 1001 | 011 |
| 1010 | 1010 | 001 |
| 1011 | 1011 | 100 |
| 1100 | 1100 | 101 |
| 1101 | 1101 | 000 |
| 1110 | 1110 | 010 |
| 1111 | 1111 | 111 |

# Λύση

- Θυμίζουμε πώς η απόσταση Hamming δύο σημάτων είναι τα διαφορετικά bits. Συνεπώς, για το προηγούμενο βιβλίο κωδίκων, για $r = [0000001]$ έχουμε:

| Κωδική Λέξη | | Απόσταση Hamming |
|---|---|---|
| 0000 | 000 | 1 |
| 0001 | 101 | 2 |
| 0010 | 111 | 3 |
| 0011 | 010 | 4 |
| 0100 | 011 | 2 |
| 0101 | 110 | 5 |
| 0110 | 100 | 4 |
| 0111 | 001 | 3 |

| Κωδική Λέξη | | Απόσταση Hamming |
|---|---|---|
| 1000 | 110 | 4 |
| 1001 | 011 | 3 |
| 1010 | 001 | 2 |
| 1011 | 100 | 5 |
| 1100 | 101 | 3 |
| 1101 | 000 | 4 |
| 1110 | 010 | 5 |
| 1111 | 111 | 6 |

- Συνεπώς ο κώδικας διορθώσει το λαμβανόμενο σήμα σε $r = [0000000]$