Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Θεωρία Πληροφορίας

Διάλεξη 6: Διακριτά κανάλια επικοινωνίας

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ατζέντα

- Διακριτά κανάλια επικοινωνίας χωρίς μνήμη
- Διακριτά κανάλια επικοινωνίας με μνήμη

Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

- Η πληροφορία, κατά τη διάδοση μέσα από ένα κανάλι, μπορεί να αλλοιωθεί εξαιτίας του **θορύβου** στο κανάλι.
- Ένα **διακριτό κανάλι** περιγράφεται πλήρως από ένα σύνολο πιθανοτήτων p_i και p_{ij}, όπου:
  - $\boldsymbol{p_i}$ η πιθανότητα να έχουμε στην είσοδο του καναλιού το i-οστό σύμβολο του κωδικού αλφαβήτου, και
  - $\boldsymbol{p_{ij}}$ η πιθανότητα το i-οστό σύμβολο στην είσοδο να ληφθεί στην έξοδο σαν j-οστό σύμβολο.
- Η υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας (εντροπία) Η(Χ/Υ) καλείται και **αβεβαιότητα** και εκφράζει το πόσο αβέβαιοι είμαστε ως προς το σύμβολο της εισόδου x, αν στην έξοδο γνωρίζουμε ότι έχει ληφθεί το y. Δηλαδή, η **υπό συνθήκη εντροπία** είναι ένα μέτρο της μέσης αβεβαιότητας ως προς Χ, όταν είναι γνωστό το Υ.
- Το Η(Υ/Χ) μπορεί να ορισθεί ως η μέση αβεβαιότητα ως προς το y, αν το x είναι γνωστό, η οποία οφείλεται στην επενέργεια του θορύβου.

Διακριτά Κανάλια Επικοινωνίας

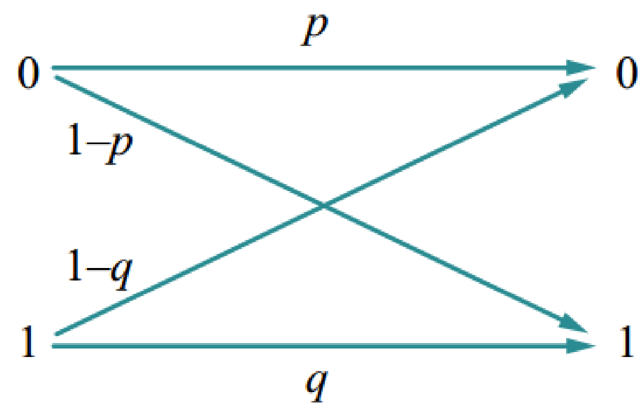
- Η **αμοιβαία πληροφορία** $I(X;Y)$ μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού μπορεί να θεωρηθεί ως η αβεβαιότητα ως προς το σύμβολο x πριν από τη λήψη του y, μειωμένη κατά την αβεβαιότητα που παραμένει ως προς x μετά τη λήψη y και με δεδομένο το y.

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

- Οι πιθανότητες p_{ij} $p(y_j/x_i)$, $p(x_i/y_j)$ αντιπροσωπεύουν την **επίδραση του θορύβου στο κανάλι επικοινωνίας** και είναι αυτές ακριβώς που το χαρακτηρίζουν.
- Οι πιθανότητες αυτές σχηματίζουν τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης του καναλιού που ονομάζεται και **πίνακας μετάβασης του καναλιού**.

Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι

- Είσοδος – έξοδος: δυαδικές τυχαίες μεταβλητές X και Y. Κωδικό σύμβολο x_i, κωδικό σύμβολο εξόδου y_j, όπου $i, j = 1, 2$ και $x_1 = y_1 = 0$ και $x_2 = y_2 = 1$.
- $p(x_i)$ και $p(y_j)$: οι πιθανότητες να έχουμε στην είσοδο την τιμή x_i και στην έξοδο την τιμή y_j.
- Οι οριζόντιες διασυνδέσεις δείχνουν πως το κωδικό σύμβολο εισόδου εξέρχεται **αναλλοίωτο** από το κανάλι.



- Οι διαγώνιες διασυνδέσεις δείχνουν ότι το κωδικό σύμβολο εισόδου **αλλοιώνεται** στο κανάλι και εξέρχεται από αυτό με διαφορετική τιμή.
- $p_{ij} = p(y_j/x_i) = p(x_i/y_j)$ είναι η πιθανότητα το i–οστό σύμβολο στην είσοδο του καναλιού να εξέρχεται από αυτό ως το j–οστό κωδικό σύμβολο.
- Ισχύει: $p_{11} = p, p_{12} = (1 - p), p_{21} = (1 - q)$ και $p_{22} = q$.
- Το κανάλι ονομάζεται **συμμετρικό** όταν ισχύει: $p = q$.

Εντροπία & Συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας

- **Εντροπία εισόδου**:

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\ \log\ p(x_i)$$

- **Εντροπία εξόδου**:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p\left(y_j\right)\ \log\ p\left(y_j\right)$$

Οι εντροπίες αυτές αντιπροσωπεύουν τον μέσο αριθμό bits ανά σύμβολο που απαιτούνται για την κωδικοποίηση της εισόδου και της εξόδου, αντίστοιχα.

- **Συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας**:

$$H(\mathrm{X}, Y) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_i)\ \log\ p(x_i, y_i) =$$

$$= H(X)\ +\ H(Y/X)\ =\ H(Y)\ +\ H(X/Y)$$

Υπό συνθήκη ποσότητες πληροφορίας

- **Υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας της εισόδου, δεδομένης της εξόδου**:

$$H(\mathrm{X}/Y) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_i)\ \log\ p(x_i/y_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(y_i)\, p(x_i/y_j\,)\log\ p\big(x_i/y_j\big)$$

Είναι η **αβεβαιότητα** ως προς την είσοδο αν γνωρίζουμε την έξοδο.

- **Υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας της εξόδου, δεδομένης της εισόδου**:

$$H(\mathrm{Y}/\mathrm{X}) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i, y_i)\ \log\ p\big(y_j/x_i\big) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(x_i)\, p(y_j/x_i\,)\log\ p\big(y_j/x_i\big)$$

Είναι η **αβεβαιότητα** ως προς την έξοδο αν γνωρίζουμε την είσοδο.

- **Η αβεβαιότητα οφείλεται στον θόρυβο.**

Αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας

- **Αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας**:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = H(X) - H(X/Y)$$

  – Η **αμοιβαία πληροφορία** μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού μπορεί να θεωρηθεί ως η αβεβαιότητα ως προς το σύμβολο x πριν από τη λήψη του y, μειωμένη κατά την αβεβαιότητα που παραμένει ως προς x μετά τη λήψη και με δεδομένο το y.

  – Η αβεβαιότητα συμβόλου ή μηνύματος που έχει εισέλθει στο κανάλι αλλά δεν έχει ληφθεί ακόμα στην έξοδο είναι ίση με $H(X)$. Μετά τη λήψη στην έξοδο, η αβεβαιότητα ενός συμβόλου ή μηνύματος που μεταδόθηκε είναι ίση $H(X/Y)$. Επομένως, το πληροφορικό περιεχόμενο που μεταδόθηκε μέσω του καναλιού είναι ίσο με τη διαφορά $H(X) - H(X/Y)$.

  – Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας σχετίζεται με την **ποσότητα πληροφορίας** που μεταφέρει το κανάλι.

Αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας

– Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας $I(X;Y)$ εξαρτάται (επίσης) από τις πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εισόδου $p(x_i)$. Επομένως, είναι διαφορετική για διαφορετικές πιθανότητες εμφάνισης των συμβόλων εισόδου σε ένα δεδομένο κανάλι.

– Σε **κανάλι χωρίς θόρυβο** ισχύει:

$$H(Y/X) = H(X/Y) = 0$$

και η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της:

$$I(X;Y) = H(X)$$

- **Ρυθμός μετάδοσης καναλιού:**

$$r = I(X;Y)$$

Χωρητικότητα καναλιού χωρίς μνήμη

- Η **χωρητικότητα του ενθόρυβου καναλιού** είναι το μέγιστο πληροφορικό περιεχόμενο που μπορεί να μεταδοθεί από το κανάλι.
- Η χωρητικότητα ενός διακριτού ενθόρυβου καναλιού χωρίς μνήμη είναι:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)}\{H(X) - H(X/Y)\}$$

$$= \max_{p(x)}\{H(Y) - H(Y/X)\} \quad \text{bits/symbol}$$

- Η μέγιστη τιμή προσδιορίζεται από τη σύγκριση όλων των δυνατών κατανομών εισόδου $p(x)$.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου ενός δυαδικού συμμετρικού καναλιού με πιθανότητες $p(x_1 = 0) = a$, $p(y_1 = 0) = b$ και $p(0/0) = p(1/1) = p$.

Απάντηση: Οι πιθανότητες να έχουμε στην είσοδο και στην έξοδο το σύμβολο «1» είναι:

$$p(x_2 = 1) = 1 - a, \qquad p(y_2 = 1) = 1 - b$$

Οι πιθανότητες εμφάνισης σφάλματος είναι: $p(1/0) = p(0/1) = 1 - p$.

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας μεταξύ εισόδου και εξόδου καναλιού είναι:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = \beta \log \beta - (1-\beta)\log(1-\beta) =$$
$$= -\alpha\mathrm{p} \log p - \alpha(1-p)\log(1-p) - (1-a)(1-p)\log(1-p) - (1-a)p \log p$$
$$= \beta \log \beta - (1-\beta)\log(1-\beta) - (1-p)\log(1-p) - p \log p.$$

Παρατηρούμε ότι στο αποτέλεσμα δεν περιλαμβάνεται η παράμετρος α αφού το συμμετρικό δυαδικό κανάλι χαρακτηρίζεται πλήρως από τις παραμέτρους β και p.

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού της άσκησης 1 όταν ο ρυθμός μετάδοσης είναι $r = 1\ symbol/\text{sec}$.

<u>Απάντηση</u>: Από τα δεδομένα $p(x_1 = 0) = a,\ \ p(x_2 = 1) = 1 - a$ και $p(0/0) = p(1/1) = p$ υπολογίζουμε τις πιθανότητες εμφάνισης σφάλματος $p(1/0) = p(0/1) = 1\text{–}\,p$.

Επίσης, έχουμε $p(y_1 = 0) = b$, και επομένως $p(y_2 = 1) = 1 \text{ – } b$.

Αφού $p(y1) = p(x1)\,p(0/0) + p(x2)\,p(1/0)$, ισχύει $b = a(1 \text{ – } p) + (1 \text{ – } a)p$

Η αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του καναλιού είναι:

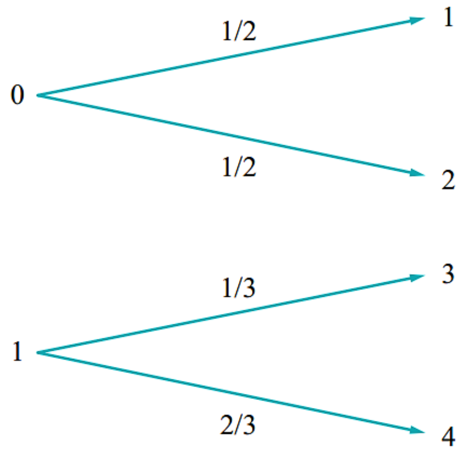
$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y/X) \\ &= \beta \log \beta - (1-\beta)\log(1-\beta) + p \log p + (1-p)\log(1-p) \end{aligned}$$

Η χωρητικότητα είναι:

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)\, r = 1 + p \log p + (1-p)\log(1-p) \qquad \text{(bits/sec)}$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του καναλιού, του οποίου καθεμία από τις δύο δυνατές εισόδους μπορεί να ληφθεί στην έξοδο ως μία από δύο διαφορετικές τιμές, όταν ο ρυθμός μετάδοσης είναι $r = 1\ symbol/\mathrm{sec}$.



<u>Απάντηση</u>: Αν και το κανάλι αυτό εμφανίζεται να είναι ενθόρυβο, στην πραγματικότητα δεν είναι, αφού από το σύμβολο της εξόδου μπορούμε να συμπεράνουμε με βεβαιότητα το σύμβολο της εισόδου. Επομένως, η χωρητικότητα αυτού του καναλιού είναι επίσης ίση με 1 bit/μετάδοση.

Η χωρητικότητα είναι ίση με τη μέγιστη τιμή του $H(X)$, αφού η ποσότητα πληροφορίας $H(X/Y)$ ισούται με το 0.

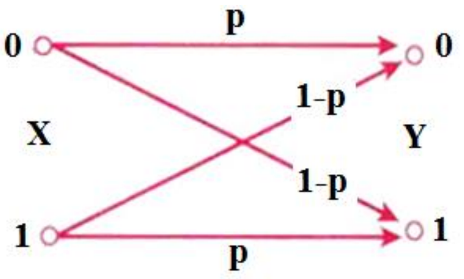
Η μέγιστη τιμή $H(X)$ λαμβάνεται για ισοπίθανα σύμβολα εισόδου, δηλαδή για $p(x_1 = 0) = 1/2$ και $p(x_2 = 1) = 1/2$.

Η χωρητικότητα του καναλιού είναι :

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)\, r = \max_{p(x)} \{H(X) - H(X/Y)\} r \qquad \text{bits/sec}$$

Άσκηση 4

Δίνεται το δυαδικό συμμετρικό κανάλι του σχήματος. Βρείτε το ρυθμό μετάδοσης πληροφορίας με το κανάλι αυτό όταν p=0.9, 0.8 και 0.6. Δεχθείτε ότι ο ρυθμός συμβόλων (ή bits) είναι 1000/sec, και ότι $P(X=0)=P(x=1)=1/2$.



Απάντηση:

- $H(X)=\frac{1}{2}log_2 2+\frac{1}{2}log_2 2=1bit/symbol$
- $D_{in}=r_s H(X)=1000bits/sec$

Για να βρούμε το D_t χρειάζονται οι υποσυνθήκη πιθανότητες $P(X|Y)$, των $X,Y=0{,}1$. Αυτές μπορούν να υπολογισθούν ως:

$$P(X=0|Y=0)=\frac{P(Y=0|X=0)\;P(X=0)}{P(Y=0)}$$

$$P(Y=0)=P(Y=0|X=0)P(X=0)+P(Y=0|X=1)P(X=1)=p\left(\frac{1}{2}\right)+(1-p)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=0|Y=0)=p$$

Ανάλογα:

- $P(X=1|Y=0)=1-p$
- $P(X=1|Y=1)=p$
- $P(X=0|Y=1)=1-p$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Απ' όπου:

$$H(X|Y) = -P(X=0, Y=0)\log_2 P(X=0|Y=0)$$
$$-P(X=0, Y=1)\log_2 P(X=0|Y=1)$$
$$-P(X=1, Y=0)\log_2 P(X=1|Y=0)$$
$$-P(X=1, Y=1)\log_2 P(X=1|Y=1)$$
$$= -\left[\frac{1}{2}p\,\log_2 p + \frac{1}{2}(1-p)\log_2(1-p) + \frac{1}{2}p\,\log_2 p + \frac{1}{2}(1-p)\log_2(1-p)\right]$$
$$= -[p\,\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)]$$

Και αφού ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας με το κανάλι δίνεται από:

- $D_t = [H(X) - H(X|Y)]r_s bits/sec$

Αντικαθιστώντας το p=0.9, 0.8 και 0.6, βρίσκουμε τις τιμές του D_t:

p	0.9	0.8	0.6
D_t	531 bits/s	278 bits/s	29 bits/s

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Οι τιμές αυτές δείχνουν καθαρά ότι ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας μέσα από το κανάλι μειώνεται πολύ γρήγορα καθώς η πιθανότητα σφάλματος $1-p$ πλησιάζει την τιμή ½.

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός δεδομένων και ο ρυθμός πληροφορίας είναι δύο εντελώς διαφορετικά μεγέθη.

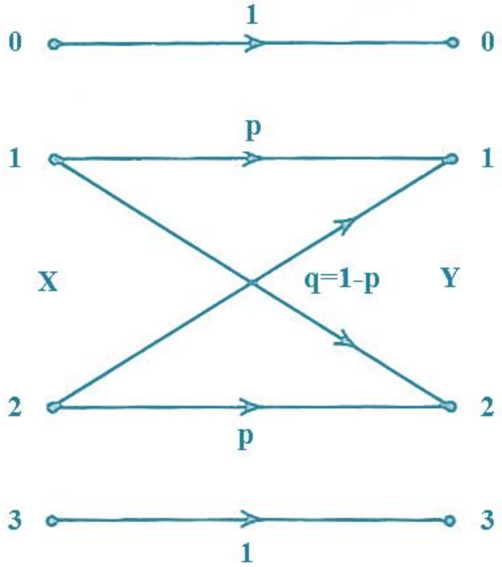
Συγκεκριμένα, στην άσκηση αυτή αναφέραμε τον ρυθμό r_b μεταπτώσεων bit στην είσοδο του καναλιού ως ρυθμό δεδομένων εισόδου ή απλά ως ρυθμό bits. Αυτός είναι διαφορετικός από τον ρυθμό πληροφορίας D_{in} στην είσοδο του καναλιού.

Το D_{in} εξαρτάται από το r_b και από τις πιθανότητες των συμβόλων (των bits).

Επίσης, ο ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας από το κανάλι (D_t) δεν εξαρτάται μόνο από το D_{in} αλλά και από τις πιθανότητες μεταφοράς (ή μετάπτωσης) p_{ij} των συμβόλων του καναλιού.

Άσκηση 5

Υπολογίστε τη χωρητικότητα του διακριτού καναλιού του σχήματος. Δεχθείτε παροχή πηγής $r_s = 1\ symbol/sec$ και $P(X=0) = P(X=3) = P$ και $P(X=1) = P(X=2) = Q$.



<u>Απάντηση</u>: Έστω $a = -[p\log p + q\log q]$. Από τον ορισμό της χωρητικότητας καναλιού και επειδή $2P + 2Q = 1$ έχουμε $C = \max_{\mathrm{P,Q}}[H(X) - H(X|Y)]$. Από τον ορισμό των $H(X)$ και $H(X|Y)$ παίρνουμε:

- $H(X) = -2P\log_2 P - 2Q\log_2 Q$
- $H(X|Y) = -2Q(p\ \log_2 p + q\log_2 q) = 2Q_a$

Οπότε ο μέσος ρυθμός μετάδοσης είναι:

- $D_t = -2P\ \log_2 P - 2Q\log_2 Q - 2Qa$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε το D_t ως προς τα P και Q, έτσι ώστε $2P + 2Q = 1$. Θέτουμε $Q = 1/2 - P$ και βρίσκουμε:

- $D_t = -2P\log_2 P - 2\left(\frac{1}{2} - P\right)\log_2\left(\frac{1}{2} - P\right) - 2\left(\frac{1}{2} - P\right)a$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Για να βρούμε την τιμή του P που μεγιστοποιεί το D_t, θέτουμε $\frac{dD_t}{dP} = 0$ οπότε:

$$0 = -\log_2 e - \log_2 P + \log_2 e + \log_2\left(\frac{1}{2} - P\right) + a = -\log_2 P + \log_2 Q + a$$

Λύνοντας ως προς P, βρίσκουμε: $P = Q\,2^a = Q\beta$ όπου $\beta = 2^\alpha$. Αντικαθιστώντας το $P = Q\beta$ στην $2P + 2Q = 1$, παίρνουμε τις άριστες τιμές των P και Q:

$$P = \frac{\beta}{2(1+\beta)} \text{ και } Q = \frac{1}{2(1+\beta)}$$

Η χωρητικότητα του καναλιού είναι:

$$\begin{aligned} C &= -2(P\log_2 P + Q\log_2 Q + Q_a) \\ &= -2\left[\frac{\beta}{2(1+\beta)}\log_2\left(\frac{\beta}{2(1+\beta)}\right) + \frac{1}{2(1+\beta)}\log_2\left(\frac{1}{2(1+\beta)}\right) + \frac{1}{2(1+\beta)}\log_2\beta\right] \\ &= \log_2\left(\frac{2(\beta+1)}{\beta}\right)\ bits/sec \end{aligned}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Για $p = 1$, έχουμε ένα κανάλι χωρίς σφάλματα και ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας επιτυγχάνεται όταν τα σύμβολα εισόδου εμφανίζονται ισοπιθανά. Η χωρητικότητα ενός τέτοιου ιδανικού καναλιού είναι 2 bits/sec με ρυθμό συμβόλων 1 symbol/sec με 2 bits/symbol.

- Για την ενθόρυβη περίπτωση $p = 1/2$, η χωρητικότητα του καναλιού είναι $C = \log_2 3$. Το πρώτο και τέταρτο σύμβολο χρησιμοποιούνται συχνότερα από τα άλλα δύο γιατί είναι ελεύθερα από θόρυβο. Επίσης το δεύτερο και τρίτο σύμβολο δεν μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους και δρουν μαζί σαν ένα μόνο σύμβολο. Έτσι, η χωρητικότητα $\log_2 3$ φαίνεται να είναι μια λογική απάντηση.

- Για άλλες τιμές του p, η χωρητικότητα του καναλιού θα είναι μεταξύ $\log_2 3$ και $\log_2 4$ $bits/sec$.