Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 3: Συστήματα Διακριτού Χρόνου

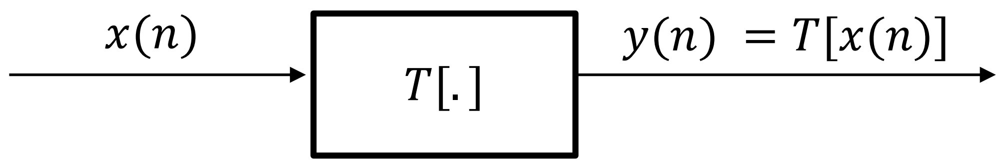
Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- Εισαγωγή στα Συστήματα Διακριτού Χρόνου
- Ταξινόμηση Συστημάτων ΔΧ
- Τεχνικές Ανάλυσης ΓΑΚΜ Συστημάτων
  - Μέθοδος Συνέλιξης
  - Απευθείας Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών
- Το θεώρημα της Συνέλιξης
- Οι Ιδιότητες της Συνέλιξης
- Τρόποι Υπολογισμού Συνέλιξης

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα **σύστημα διακριτού χρόνου** θεωρείται ένας μαθηματικός τελεστής $T[.]$ με τον οποίο ένα σήμα εισόδου [διέγερση] $x(n)$ μετατρέπεται σε ένα σήμα εξόδου [απόκριση] $y(n)$.



Ο συνήθης τρόπος περιγραφής ενός συστήματος είναι μέσω της **σχέσης εισόδου – εξόδου** $y(n) = T[x(n)]$.

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Αρχικές Συνθήκες

Έστω ένα σύστημα με σχέση εισόδου-εξόδου:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) = y(n-1) + x(n)$$

- Για την εύρεση της τιμής του σήματος $y(n)$ για $n \geq n_0$ απαιτείται η γνώση της εισόδου $x(n)$ και της αρχικής συνθήκης $y(n_0 - 1)$.
- Αν $y(n_0 - 1) = 0$ τότε το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία** (initially relaxed).

Ταξινόμηση Συστημάτων ΔΧ

Ένα σύστημα σε ηρεμία (δηλ. μηδενική αρχική έξοδος), μπορεί να είναι:

- **Αιτιοκρατικό ή αιτιατό** (causal), όταν η έξοδός του σε κάθε χρονική στιγμή $n = n_0$, εξαρτάται μόνο από την είσοδο **μέχρι** τη στιγμή $n = n_0$.

- **Στατικό ή χωρίς μνήμη** (memory less), όταν η έξοδός του σε κάθε χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από την είσοδο την **ίδια** στιγμή $n = n_0$.

- **Χρονικά αμετάβλητο** (time invariant), όταν για οποιαδήποτε καθυστέρηση n_0, η έξοδος στην είσοδο $x(n - n_0)$ ισούται με $y(n - n_0)$. Δηλ. ολισθήσεις κατά n_0 στην είσοδο $x(n)$ προκαλούν ίδια ολίσθηση κατά n_0 και στην έξοδο $y(n)$.

  Έλεγχος χρονικής αμεταβλητότητας:
  - Βρίσκουμε την απόκριση $y(n, k) = T[x(n - k)]$ σε χρονικά μετατοπισμένη είσοδο.
  - Βρίσκουμε την χρονικά μετατοπισμένη έξοδο $y(n - k)$.
  - Αν $y(n, k) = y(n - k), \forall k$, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Ταξινόμηση Συστημάτων ΔΧ

- **Ομογενές**, όταν ισχύει $T[c\ x(n)] = c\ T[x(n)]$ για κάθε μιγαδική σταθερά c και για οποιοδήποτε σήμα $x(n)$.

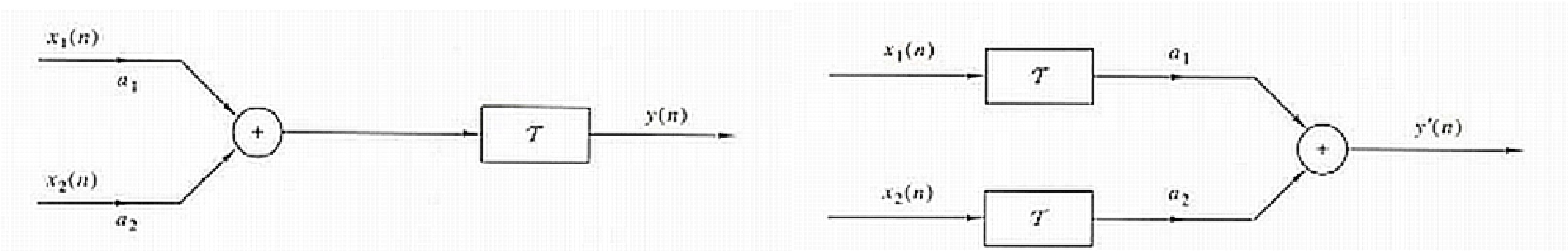
- **Ευσταθές** (BIBO stable), όταν για κάθε φραγμένη είσοδο $|x(n)| \leq A < \infty$, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη, δηλ. $|y(n)| \leq B < \infty$.
- Ένα σύστημα ΓΑΜΚ είναι πάντα ευσταθές όταν η κρουστική απόκριση είναι απολύτως συγκλίνουσα, δηλ. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

- **Αντιστρέψιμο**, όταν η εισόδός του μπορεί να προσδιοριστεί από την έξοδό του με μοναδικό τρόπο.
- Για να είναι ένα σύστημα αντιστρέψιμο πρέπει ξεχωριστά σήματα εισόδου να παράγουν και ξεχωριστά σήματα εξόδου, δηλ. αν $x_1(n) \neq x_2(n)$ τότε και $y_1(n) \neq y_2(n)$.

Ταξινόμηση Συστημάτων ΔΧ

- **Γραμμικό** (linear) όταν **:**

$$T[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 T[x_1(n)] + \alpha_2 T[x_2(n)], \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in C$$



- Η γραμμικότητα απλοποιεί τον υπολογισμό της απόκρισης του συστήματος σε δεδομένη είσοδο.

- **Άθροισμα της Υπέρθεσης:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h_k(n)$$

όπου $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$ είναι η κρουστική απόκριση στη στιγμή $n = k$

Ταξινόμηση Συστημάτων ΔΧ

- Ένα σύστημα είναι **Γραμμικό και Αμετάβλητο κατά τη Μετατόπιση** (ΓΑΚΜ ή LSI, Linear Shift Invariant) όταν ικανοποιεί ταυτόχρονα την Γραμμικότητα και την Αμεταβλητότητα στη μετατόπιση.

- Αν $h(n)$ είναι η **κρουστική απόκριση** ενός ΓΑΚΜ συστήματος, [δηλ. η έξοδος για είσοδο ίση με την μοναδιαία διακριτή ώση $\delta(n)$], τότε λόγω της αμεταβλητότητας η απόκριση σε είσοδο $\delta(n-k)$ θα είναι $h(n-k)$, δηλ. $h_k(n) = h(n-k)$. Χρησιμοποιώντας το άθροισμα της υπέρθεσης, βρίσκουμε ότι η έξοδος δίνεται από:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k)$$

- Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **Άθροισμα της Συνέλιξης** και εν συντομία γράφεται:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

Άσκηση 1

Να διαπιστώσετε αν τα παρακάτω συστήματα είναι: (α) με μνήμη ή χωρίς μνήμη και (β) αιτιατά ή μη-αιτιατά.

(1) $y(n) = x^3(n)$

(2) $y(n) = x(n) + x(n-2)$

<u>**Απάντηση**</u>: (1) Παρατηρούμε ότι το τρέχον (n) δείγμα της εξόδου $y(n)$ επηρεάζεται μόνο από το τρέχον (n) δείγμα της εισόδου $x(n)$. Επομένως το σύστημα είναι χωρίς μνήμη και αιτιατό.

(2) Σε ότι αφορά την αιτιότητα, παρατηρούμε ότι το τρέχον (n) δείγμα της εξόδου $y(n)$ δεν επηρεάζεται από μελλοντικά δείγματα της εισόδου $x(n)$. Επομένως το σύστημα είναι αιτιατό.

Σε ότι αφορά την μνήμη, παρατηρούμε ότι το τρέχον (n) δείγμα της εξόδου $y(n)$ επηρεάζεται από το τρέχον (n) και από προηγούμενα δείγματα της εισόδου $x(n)$. Επομένως το σύστημα είναι με μνήμη.

Άσκηση 2

Να εξεταστεί αν είναι αιτιατό το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y(n) = \sum_{n=k}^{+\infty} x(n-k)$$

<u>Απάντηση</u>: Ξαναγράφουμε τη σχέση εισόδου – εξόδου, ως:

$$y(n) = \sum_{n=k}^{+\infty} x(n-k) = \sum_{l=-\infty}^{0} x(l)$$

Για να μπορεί να προσδιοριστεί η έξοδος τη χρονική στιγμή n, πρέπει η είσοδος να είναι γνωστή για όλα τα $n \leq 0$. Π.χ. για να βρεθεί η τιμή $y(-5)$ πρέπει να γνωρίζουμε μελλοντικές τιμές, όπως $x(0), x(-1), x(-2), \dots$.

Επομένως το σύστημα δεν είναι αιτιατό.

Άσκηση 3

Να διαπιστωθεί αν το ΓΑΚΜ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n) = a^n\, u(n)$, $a < 1$ είναι ευσταθές ή όχι.

Απάντηση: Για να αποφανθούμε περί της ευστάθειας του συστήματος, πρέπει να διαπιστώσουμε αν η κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα. Έχουμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n\, u(n)| =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|} < \infty$$

Επομένως η $h(n)$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

Άσκηση 4

Να βρεθεί αν το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου $y(n) = x(-n)$ είναι:
(α) γραμμικό και (β) αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

<u>Απάντηση</u>: (α) Για τις εισόδους $x_1(n)$ και $x_2(n)$, οι αντίστοιχες έξοδοι θα είναι $y_1(n) = x_1(-n)$ και $y_2(n) = x_2(-n)$.

Το σύστημα είναι **γραμμικό** επειδή για είσοδο ίση με τον γραμμικό συνδυασμό $x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)$, η έξοδος θα είναι:

$$y(n) = x(-n) = \alpha_1 x_1\,(-n) + \alpha_2 x_2(-n) = \alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n)$$

(β) Για μία χρονικά μετατοπισμένη κατά n_0 είσοδο $x'(n) = x(n - n_0)$, η έξοδος είναι $y(n, n_0) = x'(-n) = x(-n - n_0)$.

Η χρονικά μετατοπισμένη κατά n_0 έξοδος είναι $y(n - n_0) = x\big(-(n - n_0)\big) = x(-n + n_0)$. Επειδή ισχύει $y(n, n_0) \neq y(n - n_0)$ προκύπτει ότι το σύστημα είναι **χρονικά μεταβαλλόμενο.**

Άσκηση 5

Ποια από τα ακόλουθα συστήματα είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση;

(α) $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$

(β) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

<u>**Απάντηση**</u>**:** (α) Για να ελεγχθεί η αμεταβλητότητα στη μετατόπιση, συγκρίνουμε την μετατοπισμένη απόκριση $y(n-n_0)$, με την απόκριση για μετατοπισμένη είσοδο $x(n-n_0)$.

Η μετατοπισμένη απόκριση είναι:

$$y(n-n_0) = x(n-n_0) + x(n-n_0-1) + x(n-n_0-2)$$

Η απόκριση για μετατοπισμένη είσοδο $x'(n) = x(n-n_0)$, είναι:

$$\begin{aligned} y'(n) &= x'(n) + x'(n-1) + x'(n-2) \\ &= x(n-n_0) + x(n-n_0-1) + x(n-n_0-2) \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι ισχύει $y'(n) = y(n-n_0)$. Επομένως το σύστημα είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

Άσκηση 5 (συνέχεια)

(β) Από τη σχέση εισόδου – εξόδου και λαμβάνοντας υπόψη ότι $n \to \infty$, βρίσκουμε την μετατοπισμένη απόκριση:

$$y(n-n_0)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k-n_0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k-n_0)$$

Η απόκριση του συστήματος στη μετατοπισμένη είσοδο $x'(n)=x(n-n_0)$, είναι:

$$y'(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x'(k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k-n_0)$$

Διαπιστώνουμε ότι ισχύει $y'(n)=y(n-n_0)$. Επομένως και αυτό το σύστημα είναι αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση.

Άσκηση 6

Να προσδιοριστεί αν το σύστημα με την ακόλουθη σχέση εισόδου – εξόδου είναι: (α) γραμμικό, (β) αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση, (γ) ευσταθές και (δ) αιτιατό.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, x(n+k)$$

<u>**Απάντηση**</u>: (α) Παρατηρούμε ότι το $y(n)$ σχηματίζεται από το άθροισμα των γινομένων του $x(n)$ με μετατοπισμένες εκδόσεις του εαυτού του. Π.χ.:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, x(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^2(k)$$

Ο τετραγωνικός όρος αναμένεται να κάνει μη γραμμικό το σύστημα. Χρησιμοποιούμε ένα παράδειγμα:

- Αν $x(n) = \delta(n)$, τότε $y(n) = \delta(n)$.
- Αν $x(n) = 2\delta(n)$, τότε $y(n) = 4\delta(n)$.

Επομένως το σύστημα δεν είναι ομογενές, άρα ούτε και γραμμικό.

Τεχνικές Ανάλυσης ΓΑΚΜ Συστημάτων

1. Μέθοδος Συνέλιξης: Για ένα ΓΑΜΚ σύστημα η έξοδος $y(n)$ για είσοδο $x(n)$, είναι:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

- Συνάρτηση $h(n-k) = T[\delta(n-k)]$: **κρουστική απόκριση** του συστήματος.
- Ο τελεστής * αναπαριστά το **άθροισμα συνέλιξης** μεταξύ $x(n)$ και $h(n)$.
- Αν $L1$ και $L2$ είναι τα μήκη των ακολουθιών $x(n)$ και $h(n)$ αντίστοιχα, τότε το μήκος της $y(n)$ είναι $L = L1 + L2 - 1$.
- Αν οι μη-μηδενικές τιμές της $x(n)$ περιέχονται σε ένα διάστημα $[M_x, N_x]$ και οι μη μηδενικές τιμές της $h(n)$ σε ένα διάστημα $[M_h, N_h]$, τότε οι μη μηδενικές τιμές της $y(n)$ θα περιορίζονται στο διάστημα $[M_x + M_h, N_x + N_h]$.

2. Απευθείας επίλυση των εξισώσεων διαφορών:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

Ιδιότητες Συνέλιξης

Η συνέλιξη είναι ένας **γραμμικός** τελεστής με τις ακόλουθες ιδιότητες:

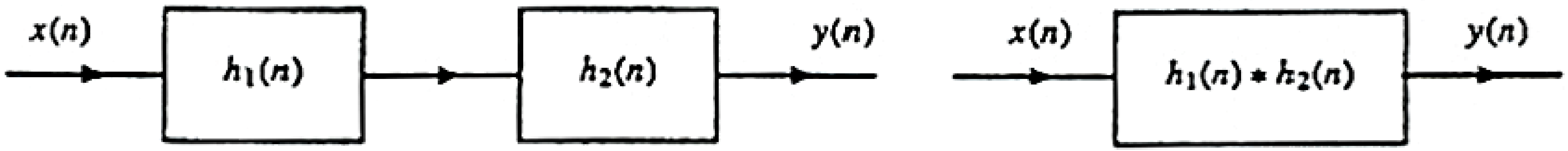
Αντιμεταθετική: $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

Η σειρά με την οποία εκτελείται η συνέλιξη, δεν έχει σημασία.

Ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $h(n)$ και είσοδο $x(n)$, συμπεριφέρεται το ίδιο με ένα σύστημα με κρουστική απόκριση $x(n)$ και είσοδο $h(n)$.

Ιδιότητες Συνέλιξης

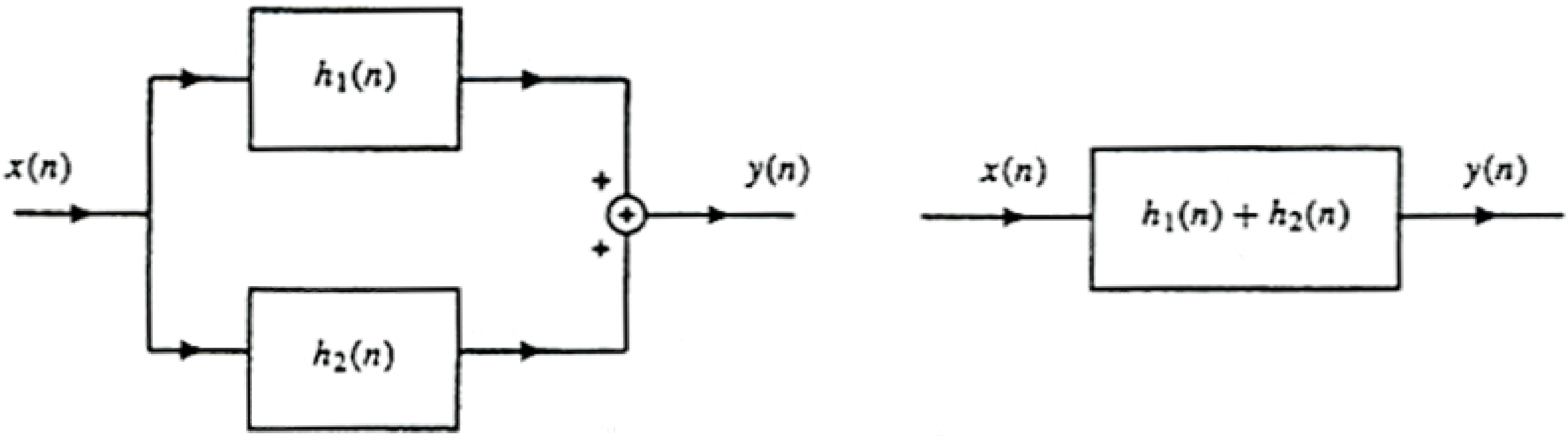
Προσεταιριστική: $\{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) = x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\}$



Αν δύο συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n)$ και $h_2(n)$ συνδεθούν σε σειρά (cascade), το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει έχει κρουστική απόκριση ίση με τη **συνέλιξη** των $h_1(n)$ και $h_2(n)$.

Ιδιότητες Συνέλιξης

Επιμεριστική: $x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$



Αν δύο συστήματα με κρουστικές αποκρίσεις $h_1(n)$ και $h_2(n)$ συνδεθούν παράλληλα, το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει έχει κρουστική απόκριση ίση με το **άρθοισμα** των $h_1(n)$ και $h_2(n)$.

Ταυτοτική: $x(n) * \delta(n) = x(n)$

Το ουδέτερο στοιχείο της πράξης της συνέλιξης είναι η μοναδιαία κρουστικής συνάρτηση $\delta(t)$.

Τρόποι Υπολογισμού Συνέλιξης

Διάφοροι τρόποι υπολογισμού της συνέλιξης $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Ανάλογα με τη μορφή και τον τύπο των σημάτων, επιλέγουμε την ευκολότερη.

1. Απευθείας υπολογισμός

Χρησιμοποιείται όταν τα σήματα που πρόκειται να συνελιχθούν περιγράφονται από απλές μαθηματικές εκφράσεις κλειστού τύπου.

2. Γραφικός υπολογισμός

Χρησιμοποιείται για σήματα που έχουν εύκολη γραφική αναπαράσταση.

3. Μέθοδος του κανόνα

Χρησιμοποιείται όταν τα σήματα που πρόκειται να συνελιχθούν είναι πεπερασμένου μήκους και σύντομα ως προς την διάρκεια.

Απευθείας Υπολογισμός Συνέλιξης

Χρησιμοποιείται όταν τα σήματα που πρόκειται να συνελιχθούν περιγράφονται από απλές μαθηματικές εκφράσεις κλειστού τύπου.

Συνήθως προκύπτει υπολογισμός αθροισμάτων που συγκλίνουν ή δεν συγκλίνουν, και τα οποία περιέχουν όρους της μορφής α^n ή $n\alpha^n$.

Παρακάτω δίνονται μερικές εκφράσεις κλειστού τύπου για τις πιό κοινά χρησιμοποιούμενες σειρές:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n\,\alpha^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-a)^2}, \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$$

Άσκηση 7

Αν η απόκριση ενός ΓΑΜΚ συστήματος στη μοναδιαία βηματική ακολουθία είναι $s(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ να βρεθεί η κρουστική του απόκριση $h(n)$.

<u>Απάντηση</u>: Γνωρίζουμε ότι $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$. Άρα ισχύει:

$$h(n) = s(n) - s(n-1)$$

Αντικαθιστώντας $s(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, έχουμε:

$$h(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$= \left[n\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n-1) = (2-n)\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = u(n)$ και είσοδο το σήμα:

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζοντας το συνελικτικό άθροισμα βρίσκουμε ότι:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k\, u(k)\ \ u(n-k)$$

Επειδή $u(k) = 0$ για $k < 0$ και $u(n-k) = 0$ για $k > n$ όταν $n < 0$, δεν υπάρχουν μη μηδενικοί όροι στο άθροισμα, οπότε $y(n) = 0$.

Για $n \geq 0$ ισχύει:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Συνεπώς η έξοδος είναι:

$$y(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}\, u(n)$$

Άσκηση 9

Ένα ΓΑΜΚ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(n) = u(-n-1)$. Να βρεθεί η έξοδος, όταν η είσοδος είναι $x(n) = -n\ 3^n\ u(-n)$.

Απάντηση:

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων $h(n)$ και $x(n)$.

ΣΧΗΜΑ ΣΕΛ 63

Αφού $x(n) = 0$ για $n > -1$ και $h(n) = 0$ για $n > -1$, έχουμε $y(n) = 0$ για $n > -2$. Χρησιμοποιώντας το άθροισμα της συνέλιξης, έχουμε:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -k\ 3^k\ u(-k)\ u(-(n-k)-1)$$

Άσκηση 9 (συνέχεια)

Επειδή $u(-k) = 0$ για $k > 0$ και $u(-(n-k)-1) = 0$ για $k < n+1$, το άθροισμα της συνέλιξης γίνεται:

$$y(n) = \sum_{k=n+1}^{0} -k\ 3^{k} \quad \text{για} \ \ \mathrm{n} \leq -2$$

Με αλλαγή μεταβλητών $m = -k$ και χρησιμοποιώντας τους τύπους των σειρών, έχουμε:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{-n-1} m\left(\frac{1}{3}\right)^{m} = \frac{(-n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1} + n\left(\frac{1}{3}\right)^{-n} + \frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2}} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\ (2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \qquad \text{για} \qquad n \leq -2$$

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ $x(n) = (0.9)^n u(n)$ και $h(n) = n\, u(n)$.

Απάντηση: Η συνέλιξη είναι:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [(0.9)^k\, u(k)][(n-k)u(n-k)]$$

Επειδή $u(k) = 0$ για $k < 0$ και $u(n-k) = 0$ για $k > n$, έχουμε :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} (n-k)(0.9)^k \; = n \sum_{k=0}^{n} (0.9)^k \; - \sum_{k=0}^{n} k\, (0.9)^k \;\; \text{για } \; n \geq 0$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους των σειρών, έχουμε:

$$y(n) = n\frac{1-(0.9)^{n+1}}{1-0.9} - \frac{n(0.9)^{n+2} - (n+1)(0.9)^{n+1} + 0.9}{(1-0.9)^2} =$$

$$= 10n[1-(0.9)^{n+1}] - 100[n(0.9)^{n+2} - (n+1)(0.9)^{n+1} + 0.9] \quad n \geq 0$$

$$= [10n - 90 + 90(0.9)^n]\, u(n)$$

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Για τον **γραφικό υπολογισμό** της συνέλιξης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k)$$

- **Υπολογισμός εξόδου για τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{n = n_0}$**
  1. Ανάκλαση της $h(k)$ ως προς το $k = 0$ και εύρεση της $h(-k)$
  2. Χρονική μετατόπιση της $h(-k)$ κατά n_0 και εύρεση του $h(n_0 - k)$
  3. Πολλαπλασιασμός του $x(k)$ με το $h(n_0 - k)$ και εύρεση του μερικού γινομένου $x(k)h(n_0 - k)$
  4. Υπολογισμός του συνολικού αθροίσματος των επιμέρους μερικών γινομένων

- **Υπολογισμός της γενικής μορφής της εξόδου**

  Επανάληψη των βημάτων 2, 3, και 4

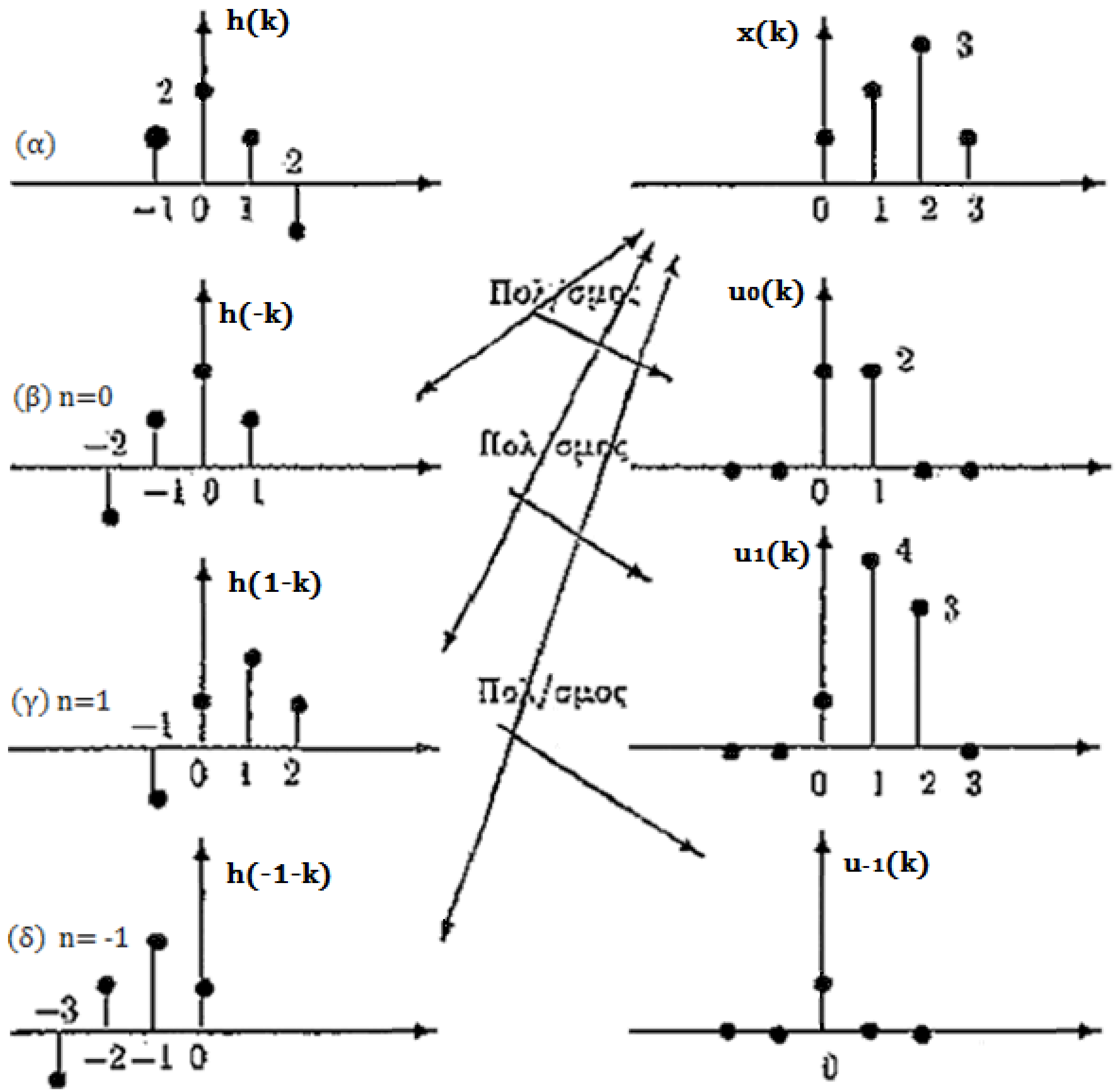
Άσκηση 11

Δίνονται τα σήματα $h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$ και $x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$. Να υπολογιστεί η συνέλιξη $y(n) = x(n) * h(n)$ με τη γραφική μέθοδο.

<u>Απάντηση</u>:

- Θυμίζουμε ότι η συνέλιξη υπολογίζεται από $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, h(n-k)$
- Στο σχήμα (α) φαίνονται τα σήματα $x(n)$και $h(n)$ στην αρχική τους μορφή.
- Στο σχήμα (β) φαίνονται τα σήματα για μετατόπιση $n = 0$, δηλ. $h(-k)$ και το γινόμενο $u_0(k) = x(k)\, h(0-k)$. Η τιμή της εξόδου $y(n)$ υπολογίζεται αθροίζοντας τα δείγματα του σήματος $u_0(k)$, δηλ. $y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(k) = 4$.
- Στο σχήμα (γ) φαίνονται τα σήματα για μετατόπιση $n = 1$, δηλ. $h(1-k)$ και $u_1(k) = x(k)\, h(1-k)$. Ομοίως $y(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1(k) = 8$.
- Στο σχήμα (δ) φαίνονται τα σήματα για μετατόπιση $n = -1$, δηλ. $h(-1-k)$ και $u_{-1}(k) = x(k)\, h(-1-k)$. Ομοίως $y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{-1}(k) = 1$.
- Ομοίως για διαφορετικές μετατοπίσεις: $y(n) = \{\dots 0, 0, 1, \hat{4}, 8, 8, 3, -2, -1, \dots\}$

Γραφικός Τρόπος Υπολογισμού Συνέλιξης



Υπολογισμός Συνέλιξης με τη Μέθοδο Κανόνα

1. Γράφουμε τις τιμές του $x(k)$ επάνω σε ένα κομμάτι χαρτί και τις τιμές του $h(-k)$ επάνω σε ένα άλλο.

2. Φέρνουμε κάθετα στην ίδια ευθεία τις τιμές $x(0)$ και $h(0)$, πολλαπλασιάζουμε κάθε ζεύγος αριθμών και προσθέτουμε όλα τα γινόμενα ώστε να σχηματιστεί η τιμή $y(0)$.

3. Μετατοπίζουμε το χαρτί με τις τιμές του ανεστραμμένου στο χρόνο σήματος $h(k)$ προς τα δεξιά κατά μία μονάδα, πολλαπλασιάζουμε κάθε ζεύγος αριθμών, αθροίζουμε τα γινόμενα ώστε να προκύψει η τιμή $y(1)$.

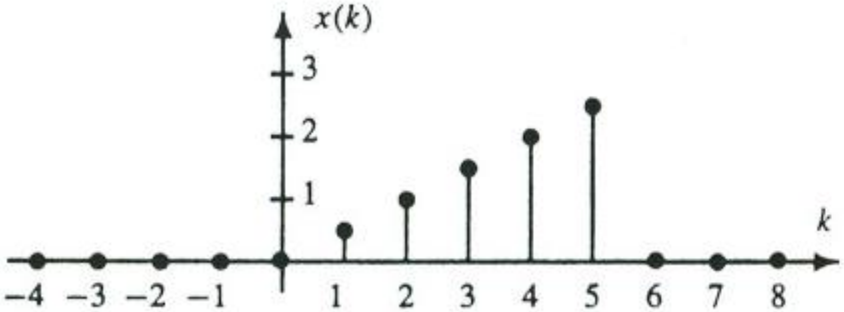
4. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 για όλες τις τιμές των μετατοπίσεων προς τα δεξιά, όπου $n > 0$.

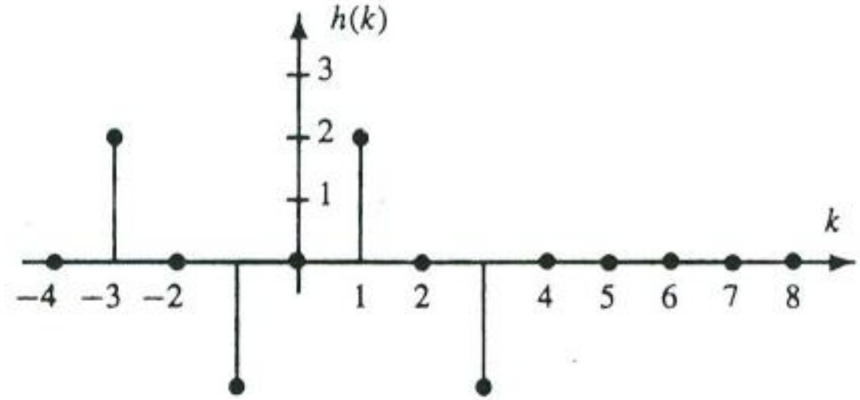
5. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 μετατοπίζοντας το αντεστραμένο σήμα προς τα αριστερά, ώστε να βρούμε τις τιμές του $y(n)$ για $n < 0$.

Άσκηση 12

Να βρεθεί η συνέλιξη μεταξύ των σημάτων $x(n) = 0.5n[u(n) - u(n-6)]$ και $h(n) = 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)[u(n+3) - u(n-4)]$ με την μέθοδο του κανόνα.

<u>Απάντηση</u>: Στο σχήμα που ακολουθεί, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ακολουθιών $x(k)$ και $h(k)$.

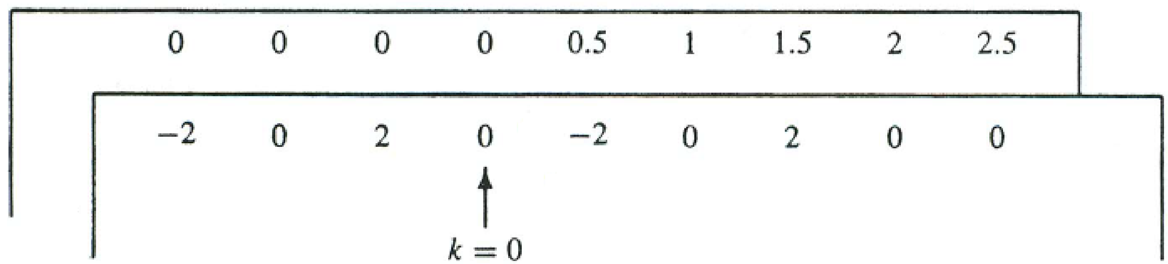




Επειδή $h(n) = 0$ έξω από το διάστημα $[-3,3]$ και $x(n) = 0$ έξω από το διάστημα $[1, 5]$, η συνέλιξη $y(n) = x(n) * h(n)$ θα είναι ίση με το μηδέν έξω από το διάστημα $[-2,8]$.

Άσκηση 12(συνέχεια)

Εφαρμόζουμε την μέθοδο του κανόνα καταγράφοντας τις τιμές των σημάτων $x(k)$ και $h(-k)$ σε δύο διαφορετικά κομμάτια χαρτιού. Ευθυγραμμίζοντάς τα στο σημείο $k=0$, έχουμε την παρακάτω εικόνα (η ακολουθία $h(-k)$ βρίσκεται στο μπροστινό μέρος).



Αθροίζοντας τα γινόμενα $x(k)\,h(-k)$ παίρνουμε τη τιμή της $y(n)$ για $n=0$, η οποία είναι $y(0)=2$. Μετατοπίζοντας τη $h(-k)$ προς τα αριστερά κατά ένα, πολλαπλασιάζοντας και προσθέτοντας, παίρνουμε $y(-1)=2$. Ομοίως βρίσκουμε $y(-2)=1$, που είναι η τελευταία μη μηδενική τιμή της $y(n)$ για $n<0$.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία μετατόπισης της $h(-k)$ προς τα δεξιά, παίρνουμε τις τιμές της $y(n)$ για $n>0$, οι οποίες είναι:

$$y(1)=2, \qquad y(2)=3, \qquad y(3)=-2, \qquad y(4)=-3$$
$$y(5)=2, \qquad y(6)=2, \qquad y(7)=-4, \qquad y(8)=-5$$

Άσκηση 13

Να βρεθεί η συνέλιξη μεταξύ των σημάτων $x(n) = 0.5n[u(n) - u(n-6)]$ και $h(n) = 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)[u(n+3) - u(n-4)]$. [Ισχύει $x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0)$]

<u>Απάντηση</u>: Γράφοντας τη $h(n)$ ως:

$$h(n) = 2\delta(n+3) - 2\delta(n+1) + 2\delta(n-1) - 2\delta(n-3)$$

υπολογίζουμε την $y(n)$ ως εξής:

$$y(n) = 2x(n+3) - 2x(n+1) + 2x(n-1) - 2x(n-3)$$

Δημιουργώντας ένα πίνακα με τις τιμές αυτών των μετατοπισμένων σημάτων:

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$2x(n+3)$	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	0
$-2x(n+1)$	0	0	-1	-2	-3	-4	-5	0	0	0	0
$2x(n-1)$	0	0	0	0	1	2	3	4	5	0	0
$-2x(n-3)$	0	0	0	0	0	0	-1	-2	-3	-4	-5
$\boldsymbol{y(n)}$	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**	**-2**	**-3**	**2**	**2**	**-4**	**-5**

και προσθέτοντας τις τιμές κατά στήλη, λαμβάνουμε την ακολουθία $y(n)$.