Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 5: Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
- Ιδιότητες DTFT
- Εφαρμογές DTFT
  - Υπολογισμός Απόκρισης Συχνότητας
  - Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών
  - Αντίστροφα Συστήματα

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform – DTFT) εφαρμόζεται επί **διακριτών σημάτων** και παράγει την (συνήθως μιγαδική) αναπαράστασή τους στο **πεδίο της συχνότητας** (frequency domain).

- Αν $x(n)$ ένα διακριτό σήμα, τότε ο **ευθύς DTFT** ορίζεται από τη σχέση:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j\omega k}$$

- Ο DTFT μετατρέπει την υπολογιστικά δύσκολη πράξη της συνέλιξης, στην υπολογιστικά απλή πράξη του πολλαπλασιασμού.

- Ο DTFT χρησιμοποιείται για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές (ΓΕΔΣΣ).

- Ο DTFT της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ ενός ΓΑΚΜ συστήματος, δίνει την απόκριση συχνότητας $H\left(e^{j\omega}\right)$ του συστήματος.

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Προϋπόθεση ύπαρξης DTFT:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = S < \infty$$

- Ορισμός **αντίστροφου Discrete Time Fourier Transform** (IDTFT):

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega k}$$

- Ο IDFTF μπορεί να θεωρηθεί και ως η ανάλυση του σήματος $x(n)$ σε έναν γραμμικό συνδυασμό όλων των μιγαδικών εκθετικών όρων που έχουν συχνότητες στο διάστημα $-\infty < \omega < +\infty$.

Κοινά ζεύγη DTFT

$\delta(n)$		1
$\delta(n-n_0)$		$e^{-jn_0\omega}$
1		$2\pi\delta(\omega)$
$e^{jn_0\omega}$		$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\alpha^n u(n),$	$\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-\alpha^n u(n-1),$	$\lvert a\rvert>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$(n+1)\alpha^n u(n),$	$\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$\cos(n\omega_0)$		$\pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$

Ιδιότητες DTFT

Περιοδικότητα $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$

Συμμετρία

$x(n)$	$\overset{DTFT}{\Longleftrightarrow}$ $X(e^{j\omega})$
Πραγματική και άρτια	Πραγματική και άρτια
Πραγματική και περιττή	Φανταστική και περιττή
Φανταστική και άρτια	Φανταστική και άρτια
Φανταστική και περιττή	Πραγματική και περιττή

Γραμμικότητα $\alpha x_1(n) + b x_2(n) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} a X_1(e^{j\omega}) + b X_2(e^{j\omega})$

Αντιστροφή στο χρόνο $x(-n) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})$

Μετατόπιση στο χρόνο $x(n - n_0) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$

Ιδιότητες DTFT

Διαμόρφωση $e^{-jn\omega_0}x(n) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$

$$x(n)\cos(n\omega_0) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)$$

Θεώρημα Συνέλιξης $h(n) * x(n) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$

Περιοδική Συνέλιξη $x(n)y(n) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right) Y\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta$

Θεώρημα Parceval $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$

Θεώρημα διατήρησης ενέργειας: ο μετασχηματισμός DTFT διατηρεί τη συνολική ενέργεια κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας.

Εφαρμογές DTFT

Ο DTFT χρησιμοποιείται στην ανάλυση σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου για:

1. Υπολογισμό Απόκρισης Συχνότητας
2. Υπολογισμό Συνέλιξης
3. Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές
4. Σχεδίαση Αντίστροφων Συστημάτων

Υπολογισμός Απόκρισης Συχνότητας

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη ΓΕΔΣΣ:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

Από ιδιότητα χρονικής μετατόπισης $x(n-n_0) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} e^{-jn_0\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$ εκφράζουμε τη ΓΕΣΔΔ στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=0}^{q} b(k)\, e^{-jk\omega} X\left(e^{j\omega}\right) - \sum_{k=1}^{p} a(k)\, e^{-jk\omega}\, Y\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right)\left[1 + \sum_{k=1}^{p} a(k)\, e^{-jk\omega}\right] = X\left(e^{j\omega}\right) \sum_{k=0}^{q} b(k)\, e^{-jk\omega}$$

Άρα η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)\, e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a(k)\, e^{-jk\omega}}$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας ενός ΓΑΚΜ συστήματος με εξίσωση διαφορών (ΓΕΔΣΣ): $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$

<u>**Απάντηση**</u>: Υπολογίζουμε τον DFTF κάθε μέλους της εξίσωσης διαφορών:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) - 0.5\,Y\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega} = X\left(e^{j\omega}\right) + 2e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right) + e^{-j2\omega}X\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - 0.5e^{-j\omega}\right)Y\left(e^{j\omega}\right) = \left(1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

επομένως:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

Επίλυση Εξισώσεων Διαφορών

Δείξαμε ότι ο DTFT ενός ΓΑΚΜ συστήματος που περιγράφεται από την ΓΕΔΣΣ:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

Είναι:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a(k)e^{-jk\omega}} X\left(e^{j\omega}\right)$$

Επομένως, για μηδενικές Αρχικές Συνθήκες μία ΓΕΔΣΣ μπορεί να λυθεί στο πεδίο της συχνότητας, μέσω:

- Υπολογισμού του DTFT κάθε όρου της ΓΕΔΣΣ
- Επίλυση ως προς $Y(e^{j\omega})$
- Εφαρμογή του αντίστροφου DTFT και υπολογισμός της $y(n)$

Άσκηση 2

Να επιλυθεί ως προς $y(n)$ η ΓΕΔΣΣ : $y(n) - 0.25y(n-1) = x(n) - x(n-2)$, θεωρώντας ότι $x(n) = \delta(n)$.

<u>**Απάντηση**</u>: Υπολογίζουμε τον DFTF κάθε μέλους της εξίσωσης διαφορών:

$$Y(e^{j\omega}) - 0.25\, Y(e^{j\omega})\, e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) - e^{-2j\omega} X(e^{j\omega})$$

Επειδή $X(e^{j\omega}) = 1$, έχουμε:

$$(1 - 0.25e^{-j\omega})\, Y(e^{j\omega}) = (1 - e^{-2j\omega}) \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-2j\omega}}{1 - 0.52\, e^{-j\omega}}$$

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος DTFT :

$$(0.25)^n u(n) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{1 - 0.25\, e^{-j\omega}}$$

και τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της μετατόπισης βρίσκουμε τον αντίστροφο DTFT:

$$y(n) = (0.25)^n\, u(n) - (0.25)^{n-2} u(n-2)$$

Αντίστροφα Συστήματα

Το **αντίστροφο** ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n)$, είναι ένα σύστημα που έχει κρουστική απόκριση $g(n)$, τέτοια ώστε:

$$h(n) * g(n) = \delta(n)$$

Στο πεδίο της συχνότητας, έχουμε:

$$G\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

<u>Προσοχή</u> ! Πρέπει το αντίστροφο σύστημα να είναι <u>αιτιατό</u>.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του αντίστροφου συστήματος ενός ΓΑΚΜ συστήματος με απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - 0.25\, e^{-j\omega}}{1 + 0.5\, e^{-j\omega}}$$

<u>Απάντηση</u>: Η απόκριση συχνότητας του αντίστροφου συστήματος είναι:

$$G\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} = \frac{1 + 0.5\, e^{-j\omega}}{1 - 0.25\, e^{-j\omega}}$$

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος DTFT :

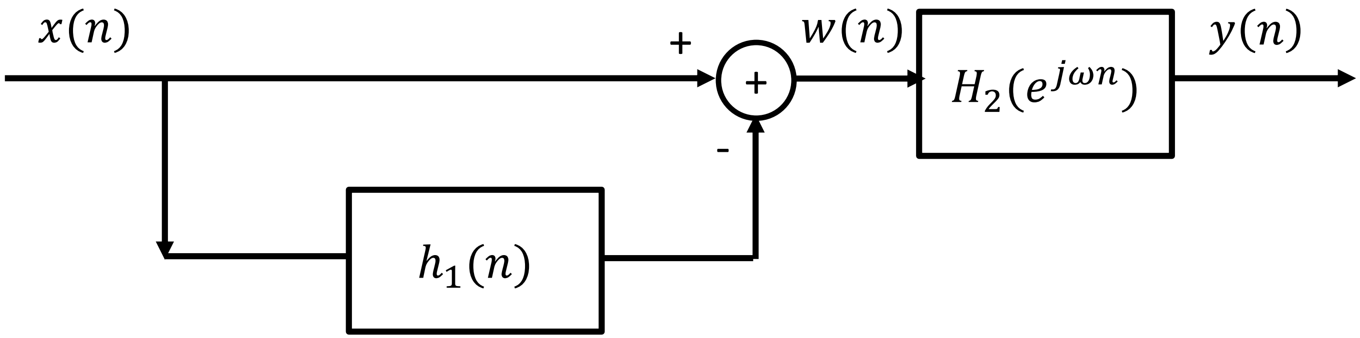
$$\frac{1}{1 - \alpha\, e^{-j\omega}} \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \alpha^n u(n), \qquad |\alpha| < 1$$

βρίσκουμε την κρουστική απόκριση:

$$g(n) = (0.25)^n\, u(n) + 0.5\, (0.25)^{n-1} u(n-1)$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε την ακόλουθη σύνδεση δύο ΓΑΚΜ συστημάτων:



όπου $h_1(n) = \delta(n-1)$ και $H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση του συστήματος.

<u>**Απάντηση**</u>: Θέτουμε είσοδο $x(n) = \delta(n)$ ώστε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση. Η έξοδος του αθροιστή είναι $w(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$. Το $w(n)$ τίθεται ως είσοδος του 2ου ΓΑΚΜ συστήματος, επομένως η εξόδος είναι $y(n) = h_2(n) - h_2(n-1)$.

Με αντίστροφο DTFT μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση $h_2(n)$ από την απόκριση συχνότητας $H_2\left(e^{j\omega}\right)$. Είναι:

Άσκηση 4 (συνέχεια)

$$h_2(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega})\, e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jn\omega} d\omega = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$$

Άρα, η κρουστική απόκριση του συνολικού συστήματος είναι:

$$h(n) = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} - \frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{(n-1)\pi}$$

Για να βρεθεί η απόκριση συχνότητας, παρατηρούμε ότι: $W(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}$

Επομένως, είναι:

$$H(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) = \left[1 - e^{-j\omega}\right]H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 - e^{-j\omega} & |\omega| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Άσκηση 5

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από τη ΓΕΔΣΣ $y(n) = 0.5y(n-1) + bx(n)$.

(α) Να προσδιοριστεί η τιμή του b έτσι ώστε $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1$ για $\omega = 0$.

(β) Να βρεθεί το σημείο ημίσειας ισχύος (δηλαδή η συχνότητα στην οποία το $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$ ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής του, που λαμβάνεται για $\omega = 0$).

<u>Απάντηση</u>: Η απόκριση συχνότητας του συστήματος είναι: $H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{b}{1-0.5e^{-j\omega}}$

Επειδή:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{b^2}{(1-0.5e^{-j\omega})(1-0.5e^{j\omega})} = \frac{b^2}{1.25-\cos\omega}$$

Είναι $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1$ για $\omega = 0$, αν $b^2/(1.25-1) = 1$. Άρα $b = \pm 0.5$

Για το σημείο ημίσειας ισχύος, υπολογίζουμε τη συχνότητα για την οποία ισχύει:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{0.25}{1.25-\cos\omega} = 0.5$$

Αυτό συμβαίνει όταν $\cos\omega = 0.75$ ή $\omega = 0.23\pi$

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί ο DTFT του $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n+3)$

<u>**Απάντηση**</u>: Χρησιμοποιοώντας τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=-3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=-3}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{8e^{j3\omega}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί ο DTFT του $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n = 0,2,4,\ldots \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

<u>**Απάντηση**</u>: Χρησιμοποιοώντας τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$X\ (n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=0,2,4,\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} e^{-2jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} e^{-2j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-2j\omega}}$$

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί ο DTFT του $x(n) = a^n\, sin(n\omega_0)\, u(n)$

<u>Απάντηση</u>: Με τον τύπο του Euler εκφράζουμε το ημίτονο σε άθροισμα μιγαδικών συναρτήσεων και κατόπιν υπολογίζουμε τον DTFT κάθε όρου. Έχουμε:

$$x_2(n) = \frac{1}{2j}\left[a^n e^{jn\omega_0} - a^n e^{-jn\omega_0}\right] u(n)$$

Ο DTFT του πρώτου όρου είναι:

$$\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{jn\omega_0} e^{-jn\omega} = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-j(\omega-\omega_0)}\right)^n = \frac{1}{2j}\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\omega_0)}}$$

Ο DTFT του δεύτερου όρου είναι:

$$-\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega_0} e^{-jn\omega} = -\frac{1}{2j}\frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\omega_0)}}$$

Επομένως, είναι:

$$X_2\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-ae^{-j(\omega-\omega_0)}}\frac{1}{1-ae^{-j(\omega+\omega_0)}}\right] = \frac{(a\sin\omega_0)e^{-j\omega}}{1-(2a\cos\omega_0)e^{-j\omega}+a^2e^{-2j\omega}}$$

Άσκηση 9

Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT της $X\left(e^{j\omega}\right) = \cos^2\omega$.

<u>Απάντηση</u>: O DTFT της καθυστερημένης μοναδιαίας ώσης είναι:

$$\delta(n-n_0) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} e^{-jn_0\omega}$$

Αναπτύσσουμε την $X\left(e^{j\omega}\right) = \cos^2\omega$ σε εκθετικούς μιγαδικούς όρους:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \left(\frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j2\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}$$

Επομένως, ο αντίστροφος DTFT, δηλ. η $x(n)$ είναι:

$$x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n+2) + \frac{1}{4}\delta(n-2)$$

Άσκηση 10

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα έχει απόκριση συχνότητας $H\left(e^{j\omega}\right) = e^{j\omega}\frac{1}{1.1+\cos\omega}$. Να βρεθεί μια ΓΕΔΣΣ με την οποία να συνδέονται η είσοδος με την έξοδο.

<u>Απάντηση</u>: Εκφράζουμε την $H\left(e^{j\omega}\right)$ συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών όρων:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{j\omega}}{1.1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τη ποσότητα $2e^{j\omega}$ έχουμε:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X(e^{j\omega})} = \frac{2}{1 + 2.2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}$$

Πολλαπλασιάζοντας χιαστί τους όρους του δεξιού και αριστερού σκέλους, έχουμε

$$\left[1 + 2.2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\right]Y\left(e^{j\omega}\right) = 2X\left(e^{j\omega}\right)$$

Με αντίστροφο DTFT κάθε όρου λαμβάνουμε την εξίσωση διαφορών:

$$y(n) + 2.2y(n-1) + y(n-2) = 2x(n)$$

Άσκηση 11

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας ενός ΓΑΚΜ συστήματος με εξίσωση διαφορών $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$

<u>**Απάντηση**</u>: Υπολογίζουμε τον DTFT του κάθε όρου της εξίσωσης διαφορών. Είναι:

$$\left(1 - 0.5e^{-j\omega}\right)Y\left(e^{j\omega}\right) = \left(1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)$$

Επειδή η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X(e^{j\omega})}$$

Έχουμε:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$