Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 8: Μετασχηματισμός Ζ

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μετασχηματισμός Ζ

- Μετασχηματισμός Ζ (Z-Transform)
- Χρήσιμα Ζεύγη ΖΤ και Περιοχές Σύγκλισης (ROC)
- Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

Μετασχηματισμός Z (Z-Transform)

Για ένα ΣΔΧ $x(n)$ ο **ευθύς Μετασχηματισμός Z** (Z-Transform, ZT) ορίζεται ως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$

όπου $z = re^{j\omega}$ είναι μία μιγαδική μεταβλητή ($z \in C$). Οι τιμές της z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα, ορίζουν στο επίπεδο-z την **Περιοχή Σύγκλισης** (Region of Convergence - ROC) που συμβολίζεται με R_x. Συγκεκριμένα:

$$R_x = \left\{ z \in C : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)\, z^{-n}| < \infty \right\}$$

- Για αιτιατά σήματα με πεπερασμένη διάρκεια, η περιοχή σύγκλισης (ROC) είναι όλο το πεδίο z εκτός από $z=0$.
- Για αιτιατά σήματα με άπειρη διάρκεια, η περιοχή σύγκλισης (ROC) είναι το εξωτερικό ενός κύκλου.

Για να υπολογιστεί ο ZT, απαιτείται ο υπολογισμός τόσο της $X(z)$ όσο και της περιοχής σύγκλισης (ROC).

Μετασχηματισμός Z (Z-Transform)

Σύνδεση ZT με DTFT

Ο ZT είναι πιο γενικός από τον DTFT. Θέτοντας $z = re^{j\omega}$ έχουμε:

$$ZT\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, r^{-n}\, e^{-j\omega n} = DTFT\{x(n)\, r^{-n}\}$$

‘Ετσι για ένα σήμα για το οποίο δεν μπορεί να υπολογιστεί ο DTFT, ο υπολογισμός του ZT μπορεί να είναι εφικτός.

Αν θεωρήσουμε ότι $z = e^{j\omega} \in ROC$ τότε ο ZT ταυτίζεται με τον DTFT, δηλ:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = DTFT\{x(n)\}$$

Μετασχηματισμός Z (Z-Transform)

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z : Θεωρώντας ότι η $X(z)$ με την αντίστοιχη περιοχή σύγκλισης R_x είναι ο ΜΖ ενός ΣΔΧ $x(n)$, τότε το σήμα $x(n)$ μπορεί να ανακτηθεί από:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\, z^{n-1}\, dz$$

όπου C είναι κάθε κλειστή απλή καμπύλη στο $z = 0$ μέσα στην R_x.

Στην πράξη δεν χρησιμοποιούμε την παραπάνω σχέση για τον υπολογισμό του αντίστροφου ΖΤ, λόγω θεωρητικών περιορισμών.

Συμβολισμός ΖΤ: $x(n) \overset{\mathrm{Z}}{\longleftrightarrow} X(z), \quad z \in R_x$

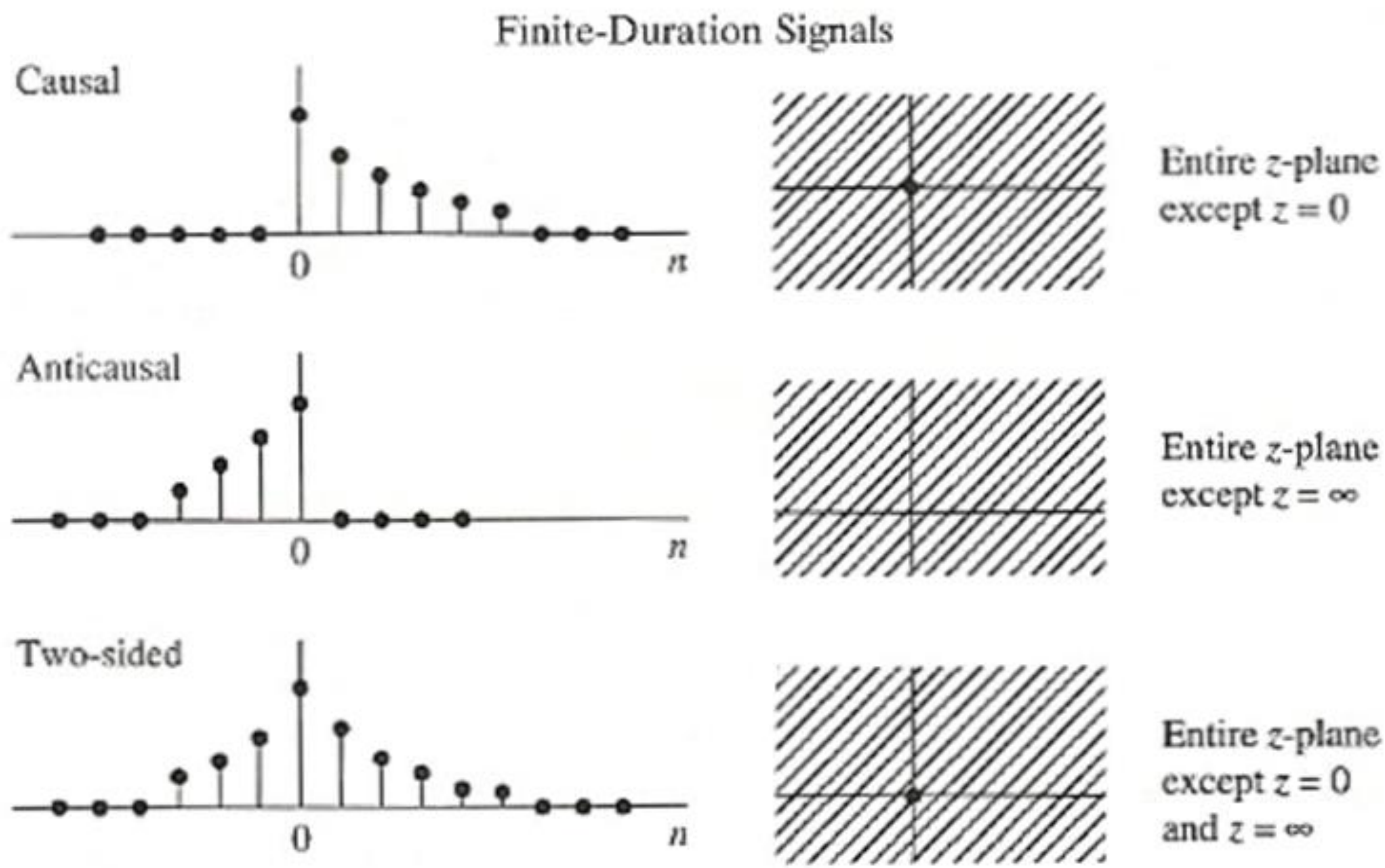
Χρήση ΖΤ: Χρησιμοποιείται για

- την επίλυση ΓΕΔΣΣ,
- τον υπολογισμό της απόκρισης ΓΧΑ συστημάτων, και
- τη σχεδίαση γραμμικών φίλτρων.

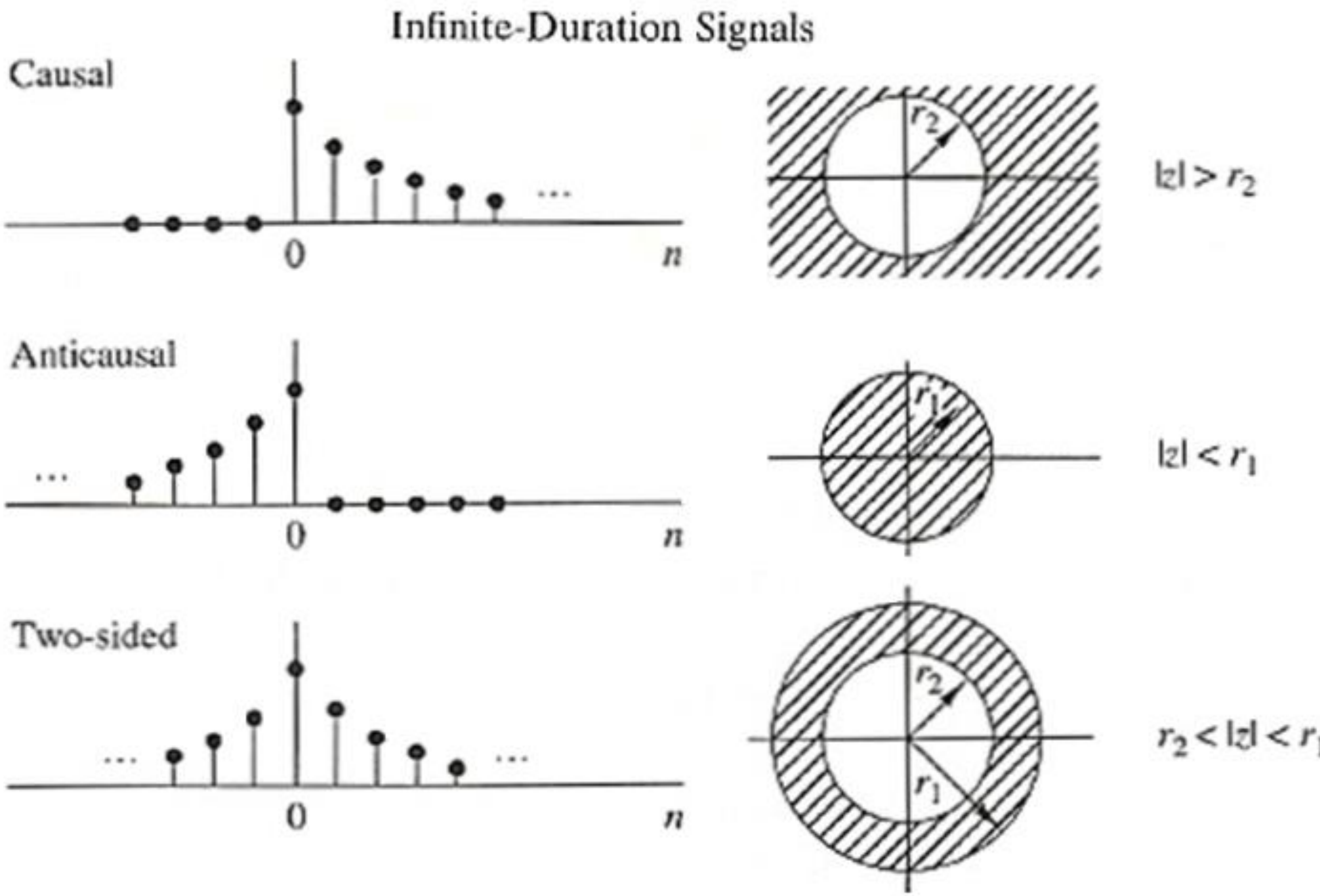
Χρήσιμα Ζεύγη ZT και Περιοχές Σύγκλισης (ROC)

Signal, $x(n)$	z-Transform, $X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	All z
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$(\sin\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$(a^n\cos\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$(a^n\sin\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Χρήσιμα Ζεύγη ZT και Περιοχές Σύγκλισης (ROC)



Χρήσιμα Ζεύγη ΖΤ και Περιοχές Σύγκλισης (ROC)



Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Ζ της ακολουθίας $x(n) = a^n u(n)$

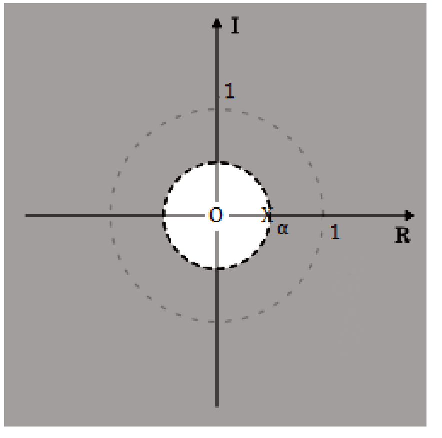
__Απάντηση__: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μετασχηματισμού Ζ, έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Ο $X(z)$ συγκλίνει επειδή $|\alpha z^{-1}| < 1$, άρα $|z| > |\alpha|$. Άρα η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου που ορίζεται από το σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει $|z| > |\alpha|$.

Υπάρχει ένας πόλος για *z=α* και ένα μηδενικό για *z=0.*

Αν α<1, τότε ο μοναδιαίος κύκλος περιέχει την περιοχή σύγκλισης, κι έτσι ορίζεται και ο DTFT της $x(n) = a^n u(n)$



Διάγραμμα Πόλων - Μηδενικών

Ιδιότητες ΖΤ

Γραμμικότητα :

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z) \quad ROC(X) = ROC(X_1) \cap ROC(X_2)$$

Μετατόπιση στο χρόνο :

$$x(n - n_0) \overset{Z}{\Leftrightarrow} z^{-n_0}X(z) \qquad ROC : \text{ίδιο}$$

Αντιστροφή στο χρόνο :

$$x(n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} X(z) \qquad ROC : r_1 < |z| < r_2$$

$$x(-n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} X(z^{-1}) \qquad ROC : \frac{1}{r_1} < |z| < \frac{1}{r_2}$$

Πολ/σμός με εκθετικό όρο :

$$x(n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} X(z) \qquad ROC : r_1 < |z| < r_2$$

$$a^n x(n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} X(a^{-1}z) \qquad ROC : |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

Ιδιότητες ΖΤ

Θεώρημα Συνέλιξης :

$$y(n) = h(n) * x(n) \overset{Z}{\Longleftrightarrow} Y(z) = H(z)\, X(z) \qquad ROC(Y) = ROC(H) \cap ROC(X)$$

<u>Υπολογισμός συνέλιξης δύο σημάτων</u>

- Υπολογισμός των z-μετασχηματισμών των σημάτων
- Πολλαπλασιασμός των z-μετασχηματισμών
- Εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού z

Παράγωγος :

$$x(n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} X(z) \qquad ROC: \; r_1 < |z| < r_2$$

$$n\, x(n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} \frac{dX(z)}{dz} \qquad \text{ROC : ίδιο}$$

Θεώρημα Αρχικής Τιμής :

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Κλασματικές Μορφές ΖΤ – Πόλοι και Μηδενικά

Ο ΜΖ μπορεί να εκφραστεί σε κλασματική μορφή:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)\, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a(k)\, z^{-k}} =$$

$$= \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + \cdots + b(q-1)z^{q-1} + b(q)z^{-q}}{a(0) + a(1)z^{-1} + \cdots + a(p-1)z^{p-1} + a(p)z^{-p}}$$

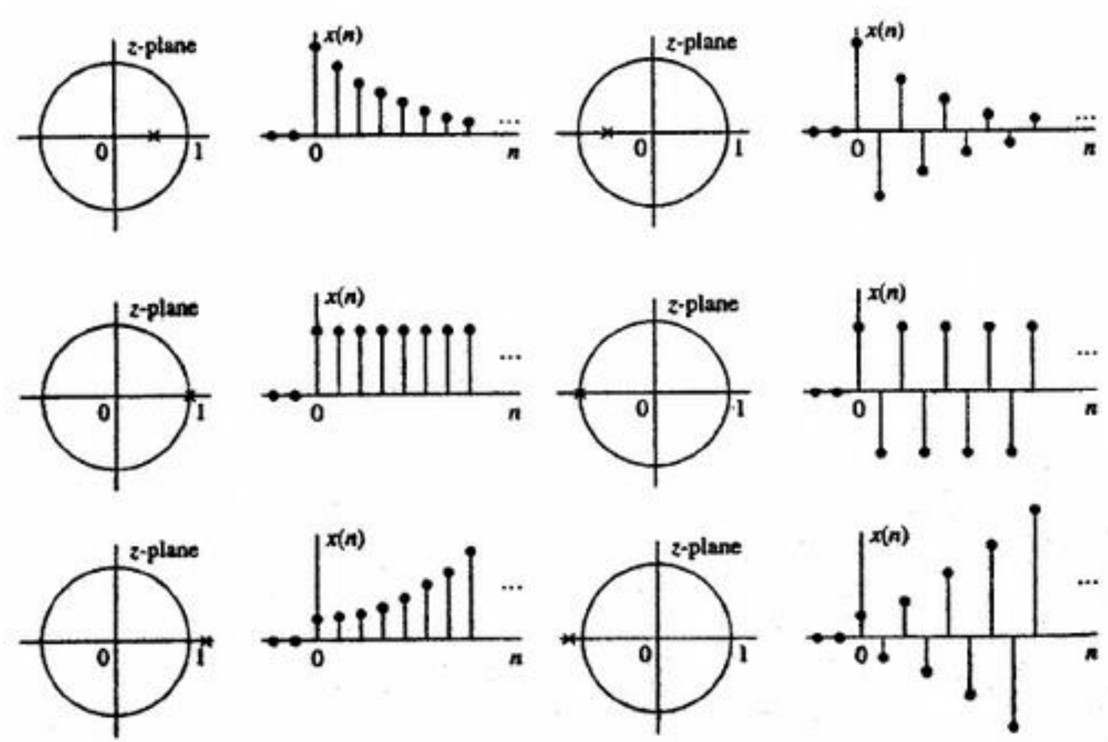
ή ισοδύναμα:

$$X(z) = C\, \frac{\prod_{k=1}^{q}(1 - b_k\, z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p}(1 - a_k\, z^{-1})}$$

- **Μηδενικά**: οι ρίζες $\boldsymbol{b_k}$ του αριθμητή
- **Πόλοι** : οι ρίζες $\boldsymbol{\alpha_k}$ του παρανομαστή

Επίδραση πόλων στη χρονική συμπεριφορά αιτιατών σημάτων

Απλός πραγματικός πόλος: $a^n u(n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}$



- Πόλος <u>εκτός</u> μοναδιαίου κύκλου: το σήμα αυξάνεται συνεχώς.
- Πόλος <u>επάνω</u> στο μοναδιαίο κύκλο: το σήμα έχει σταθερή τιμή και άπειρη διάρκεια.
- Πόλος <u>μέσα</u> στο μοναδιαίο κύκλο: το σήμα τείνει στο μηδέν για $n \to \infty$.

Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΧΑ Συστήματος

Από το θεώρημα της συνέλιξης, έχουμε:

$$y(n) = h(n) * x(n) \overset{Z}{\Longleftrightarrow} Y(z) = H(z)\, X(z), \qquad \text{άρα } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Η **συνάρτηση μεταφοράς H(z)** ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ο ZT της κρουστικής απόκρισης, δηλ.:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}$$

Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ από την ΓΕΔΣΣ και αντίστροφα:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a(k)z^{-k}}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΧΑ Συστήματος

- **Σύστημα Μόνο Μηδενικών**

  (All-zero) – FIR (πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης)

  Αν $\alpha(k) = 0 \quad$ για $1 \le k \le p$, τότε :

$$\mathrm{H(z)} = \sum_{k=0}^{q} b(k) z^{-k}$$

- **Σύστημα Μόνο Πόλων**

  (All-pole) – IIR (άπειρης κρουστικής απόκρισης)

  Αν $b(k) = 0 \quad$ για $1 \le k \le q$, τότε :

$$\mathrm{H(z)} = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{p} a(k) z^{-k}}$$

Άσκηση 1

Να γραφεί μια εξίσωση διαφορών η οποία να υλοποιεί ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1 - 0.5e^{-j\omega} + e^{-3j\omega}}{1 + 0.5e^{-j\omega} + 0.75e^{-2j\omega}}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή ισχύει:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X(e^{j\omega})}$$

και με χιαστί πολλαπλασιασμό του δεξιού και το αριστερού μέλους έχουμε:

$$\left[1 + 0.5e^{-j\omega} + 0.75e^{-2j\omega}\right] Y\left(e^{j\omega}\right) = \left[1 - 0.5e^{-j\omega} + e^{-3j\omega}\right] X\left(e^{j\omega}\right)$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο DTFT κάθε όρου, βρίσκουμε την εξίσωση διαφορών:

$$y(n) + 0.5y(n-1) + 0.75y(n-2) = x(n) - 0.5x(n-1) + x(n-3)$$

Άσκηση 2

Ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας $x(n)$ είναι:

$$X(z) = \frac{z + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 3z^{-4} + z^{-5}}$$

Αν η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τον μοναδιαίο κύκλο, να βρεθεί ο DTFT της $x(n)$ για $\omega = \pi$.

<u>**Απάντηση**</u>: Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z της $x(n)$, και ο μοναδιαίος κύκλος βρίσκεται μέσα στη περιοχή σύγκλισης, ο DTFT της $x(n)$ μπορεί να βρεθεί αν υπολογίσουμε τη $X(z)$ πάνω και γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο, δηλ.:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z=-1}$$

Επομένως, ο DTFT στο σημείο $\omega = \pi$, είναι:

$$X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\pi} = X(z)\Big|_{z=e^{j\pi}} = X(z)\Big|_{z=-1}$$

Και έχουμε:

$$X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\pi} = \left.\frac{z + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 3z^{-4} + z^{-5}}\right|_{z=e^{j\pi}} = \frac{-1 + 2 - 1}{1 - 3 - 1} = 0$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x(n) = 3\delta(n) + \delta(n-2) + \delta(n+2)$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή η ακολουθία αυτή είναι πεπερασμένη σε μήκος, ο μετασχηματισμός Z είναι το πολυώνυμο:

$$X(z) = 3 + z^{-2} + z^{2}$$

Η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τα σημεία για τα οποία είναι $0 < |z| < \infty$.

Παρατηρούμε ότι επειδή $x(n) \neq 0$ για $n < 0$, η περιοχή σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τα σημεία $|z| = \infty$.

Επίσης, επειδή $x(n) \neq 0$ για $n < 0$, η περιοχή σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το σημείο $z = 0$.

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Ζ του σήματος $x(n) = u(n) - u(n - 10)$

<u>**Απάντηση**</u>: Ο μετασχηματισμός Ζ είναι:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{9} z^{-n} = \frac{1 - z^{-10}}{1 - z^{-1}}$$

και συγκλίνει για όλα τα σημεία με $|z| > 0$.

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες του αριθμητή είναι λύσεις της εξίσωσης $z^{10} = 1$. Οι ρίζες αυτές είναι $z = e^{j2\pi k/10} \quad k = 0,1, \dots, 9$ και είναι τοποθετημένες σε 10 σημεία, που απέχουν μεταξύ τους την ίδια απόσταση, γύρω από το μοναδιαίο κύκλο.

Συνεπώς, ο πόλος στο $z = 1$ στο παρονομαστή της $X(z)$ εξουδετερώνεται από το μηδενικό στο $z = 1$ του αριθμητή, και ο μετασχηματισμός Z μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή:

$$X(z) = \prod_{k=1}^{9} \left(1 - e^{jk\frac{2\pi}{10}} z^{-1}\right)$$

Άσκηση 5

Χωρίς τον απευθείας υπολογισμό της $X(z)$, να βρεθεί η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Z κάθε ενός από τα παρακάτω σήματα:

(α) $x(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u(n-10)$

(β) $x(n) = 2^n u(-n)$

<u>Απάντηση</u>: (α) Επειδή το $x(n)$ είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, η περιοχή σύγκλισης καλύπτει την εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου. Με ένα πόλο στο $z = 1/2$ που προέρχεται από τον όρο $(1/2)^n$, και ένα πόλο στο $z = 3/4$ που προέρχεται από τον όρο $(3/4)^n$, έπεται ότι η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει τα σημεία για τα οποία είναι $|z| > 3/4$.

(β) Επειδή το $x(n)$ είναι ακολουθία αριστερής πλευράς, η περιοχή σύγκλισης καλύπτει την εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου. Με ένα πόλο στο $z = 2$, έπεται ότι η περιοχή σύγκλισης καλύπτει τα σημεία $|z| < 2$.

Άσκηση 6

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ συναρτήσει του μετασχηματισμού Z της $x(n)$.

<u>Απάντηση</u>: Η $x(n)$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει της $y(n)$ ως εξής:

$$x(n) = y(n) - y(n-1)$$

Αν μετασχηματίσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της μετατόπισης του μετασχηματισμού Z, βρίσκουμε ότι

$$X(z) = Y(z) - z^{-1}Y(z)$$

Λύνοντας ως προς $Y(z)$, βρίσκουμε:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$$

Επομένως είναι:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$$

Η σχέση αυτή αναφέρεται και ως **ιδιότητα της επαλληλίας**.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $h(n) = (0.5)^n u(n)$ και $x(n) = 3^n u(-n)$

<u>Απάντηση</u>: Χρησιμοποιούμε το θεώρημα της συνέλιξης για το ZT και έχουμε:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

Ο ZTτης $x(n)$ βρίσκεται με χρήση των ιδιοτήτων της μετατόπισης και της αντιστροφής στο χρόνο:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} 3^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} z\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z} = -\frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}} \qquad |z| < 3$$

Άρα, ο ZT της συνέλιξης $y(n) = h(n) * x(n)$, είναι:

$$Y(z) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \cdot \frac{3z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Η περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των περιοχών για τις οποίες ισχύει $|z| > 1/2$ και $|z| < 3$, και η οποία περιλαμβάνει τα σημεία $1/2 < |z| < 3$.

Ο αντίστροφος ZT, προκύπτει αναπτύσσοντας την $Y(z)$ σε μερικά κλάσματα:

$$Y(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - 3z^{-1}}$$

όπου:

$$A = \left[\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)Y(z)\right]_{z=\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$$

και

$$B = [(1 - 3z^{-1})\, Y(z)]_{z=3} = -\frac{6}{5}$$

Συνεπώς, έπεται ότι είναι:

$$y(n) = \left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) + \left(\frac{6}{5}\right)3^{n}u(-n-1)$$

Άσκηση 8

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Ζ κάθε του $x(n) = cos(n\omega_0)\, u(n)$

Απάντηση: Γράφουμε το $x(n)$ ως:

$$x(n) = cos(n\omega_0)\, u(n) = \frac{1}{2}\left[e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\right] u(n)$$

Επομένως, ο ZT είναι:

$$X(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - e^{j\omega_0}\, z^{-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - e^{-j\omega_0}\, z^{-1}}$$

με περιοχή σύγκλισης τα σημεία $|z| > 1$. Συνδυάζοντας τους δύο όρους μαζί, έχουμε:

$$X(z) = \frac{1 - (cos\,\omega_0) z^{-1}}{1 - 2(cos\,\omega_0) z^{-1} + z^{-2}} \qquad |z| > 1$$