Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 9: Μετασχηματισμός Ζ

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μετασχηματισμός Z

- Κλασματικές μορφές μετασχηματισμού Z
- Πόλοι και Μηδενικά
- Επίδραση πόλων στη χρονική συμπεριφορά αιτιατών σημάτων
- Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΑΚΜ Συστήματος

Κλασματικές Μορφές ZT – Πόλοι και Μηδενικά

Ο ΜΖ μπορεί να εκφραστεί σε κλασματική μορφή:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)\, z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a(k)\, z^{-k}} =$$

$$= \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + \cdots + b(q-1)z^{q-1} + b(q)z^{-q}}{a(0) + a(1)z^{-1} + \cdots + a(p-1)z^{p-1} + a(p)z^{-p}}$$

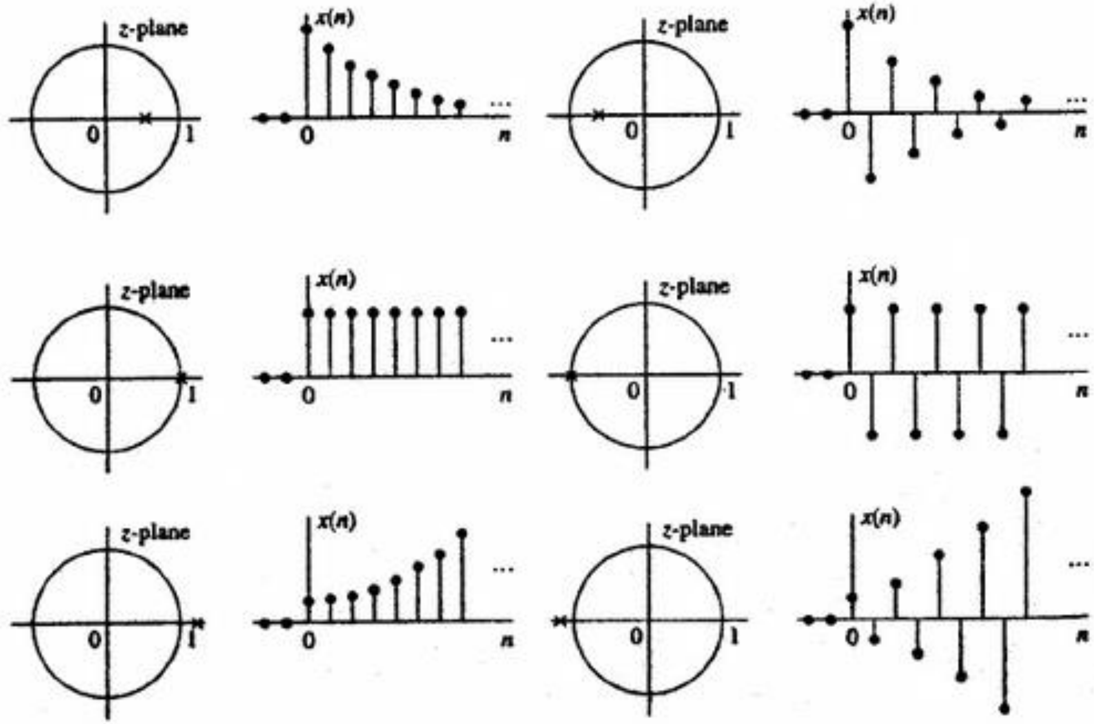
ή ισοδύναμα:

$$X(z) = C\,\frac{\prod_{k=1}^{q}(1 - b_k\, z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p}(1 - a_k\, z^{-1})}$$

- **Μηδενικά**: οι ρίζες $\boldsymbol{b_k}$ του αριθμητή
- **Πόλοι** : οι ρίζες $\boldsymbol{\alpha_k}$ του παρανομαστή

Επίδραση πόλων στη χρονική συμπεριφορά αιτιατών σημάτων

Απλός πραγματικός πόλος: $a^n u(n) \overset{Z}{\Leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}$



- Πόλος <u>εκτός</u> μοναδιαίου κύκλου: το σήμα αυξάνεται συνεχώς.
- Πόλος <u>επάνω</u> στο μοναδιαίο κύκλο: το σήμα έχει σταθερή τιμή και άπειρη διάρκεια.
- Πόλος <u>μέσα</u> στο μοναδιαίο κύκλο: το σήμα τείνει στο μηδέν για $n \to \infty$.

Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΧΑ Συστήματος

Από το θεώρημα της συνέλιξης, έχουμε:

$$y(n) = h(n) * x(n) \overset{Z}{\Longleftrightarrow} Y(z) = H(z)\, X(z), \qquad \text{άρα } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Η **συνάρτηση μεταφοράς H(z)** ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ο ΖΤ της κρουστικής απόκρισης, δηλ.:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, z^{-n}$$

Εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ από την ΓΕΔΣΣ και αντίστροφα:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a(k)z^{-k}}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΧΑ Συστήματος

- **Σύστημα Μόνο Μηδενικών**

    (All-zero) – FIR (πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης)

    Αν $\alpha(k) = 0$ για $1 \leq k \leq p$, τότε :

$$\mathrm{H(z)} = \sum_{k=0}^{q} b(k) z^{-k}$$

- **Σύστημα Μόνο Πόλων**

    (All-pole) – IIR (άπειρης κρουστικής απόκρισης)

    Αν $b(k) = 0$ για $1 \leq k \leq q$, τότε :

$$\mathrm{H(z)} = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{p} a(k) z^{-k}}$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

<u>Απάντηση</u>: Αυτός ο ZT είναι το άθροισμα δύο ρητών συναρτήσεων του z, πρώτου βαθμού. Επειδή η περιοχή σύγκλισης της $X(z)$ είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου, η $x(n)$ είναι μια ακολουθία δεξιάς πλευράς.

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος ZT για τις εκθετικές ακολουθίες δεξιάς πλευράς, μπορούμε να αντιστρέψουμε τη $X(z)$ εύκολα, ως εξής:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ της:

$$X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} \qquad |z| > 2$$

<u>**Απάντηση**</u>: Εδώ έχουμε μια ρητή συνάρτηση του z της οποίας ο παρονομαστής είναι δευτέρου βαθμού ως προς z. Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και κάνουμε ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα:

$$X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{1}{(1+2z^{-1})(1+z^{-1})} = \frac{2}{1+2z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}}$$

Επειδή η $x(n)$ είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, ο αντίστροφος ΖΤ είναι:

$$x(n) = 2(-2)^n\, u(n) - (-1)^n\, u(n)$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμό Z μιας ρητής συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k) z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a(k) z^{-k}}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα απαιτεί τη γνώση των ριζών του $A(z)$, αν ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μεγάλος, η εύρεση των ριζών είναι αρκετά δύσκολη.

Επίσης, αν και η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα δίνει μια κλειστή μορφή της λύσης της $x(n)$ για όλες τις τιμές του n, εντούτοις αν θέλουμε ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της $x(n)$, για ένα περιορισμένο αριθμό τιμών του n, η έκφραση κλειστής μορφής δεν είναι απαραίτητη.

Δεδομένου ότι είναι $x(n) = 0$ για $n < 0$, θα βρεθεί μια αναδρομική σχέση που θα παράγει την $x(n)$ για $n \geq 0$.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Αν θεωρήσουμε ότι η $x(n)$ είναι η κρουστική απόκριση ενός ΓΑΚΜ συστήματος, μπορούμε να καθορίσουμε το φίλτρο με τη βοήθεια μιας ΓΕΔΣΣ. Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι επειδή είναι:

$$X(z)\,A(z) = B(z)$$

μπορούμε να την εκφράσουμε στο πεδίο του χρόνου ως εξής:

$$x(n) * a(n) = b(n)$$

Γράφοντας αναλυτικά τη συνέλιξη αυτή, έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{p} a(k)x(n-k) = b(n)$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Βγάζοντας τον πρώτο όρο έξω από το άθροισμα και διαιρώντας δια $a(0)$, έχουμε:

$$x(n) = \frac{b(n)}{a(0)} - \sum_{k=1}^{p} \frac{a(k)}{a(0)} x(n-k)$$

Επειδή $x(n) = 0$ για $n < 0$, υπολογίζουμε τη $x(n)$ για όλες τις τιμές $\mathrm{n} \geq 0$. Για παράδειγμα:

$$x(0) = \frac{b(0)}{a(0)}$$

$$x(1) = \frac{b(1)}{a(0)} - \frac{a(1)}{a(0)} x(0)$$

$$\vdots$$

Παρατηρούμε ότι $b(n) = 0$ για $n > q$. Άρα, για $n > q$ έχουμε:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{a(k)}{a(0)} x(n-k) \qquad n > q$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Ζ του σήματος:

$$x(n) = \delta(n-5) + \delta(n) + 2^{n-1}u(-n)$$

<u>**Απάντηση**</u>: Θεωρούμε το συμβολισμό $x_+(n)$ για την ακολουθία που σχηματίζεται από το $x(n)$, θέτοντας $x(n) = 0$ για $n < 0$, δηλαδή:

$$x_+(n) = \begin{cases} x(n) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Για την ακολουθία αυτή, επειδή είναι:

$$x_+(n) = \delta(n-5) + \delta(n) + 2^{-1}\delta(n)$$

Ο μονόπλευρος Ζ είναι:

$$X_1(z) = z^{-5} + 1 + \frac{1}{2} = 1.5 + z^{-5}$$

Άσκηση 5

Ένα ΓΑΚΜ σύστημα περιγράφεται από την ΓΕΔΣΣ $y(n) = y(n-1) - y(n-2) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$. Να βρεθεί η απόκριση του συστήματος για είσοδο $x(n) = (0.5)^n\, u(n)$ και αρχικές συνθήκες $y(-1) = 0.75$ και $y(-2) = 0.25$.

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζουμε τον μονόπλευρο ΖΤ κάθε ενός από τους όρους της ΓΕΔΣΣ:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + y(-1) - [z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] + \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αρχικών συνθηκών, έχουμε:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{3}{4} - z^{-2}Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

Κρατώντας τους όρους που περιέχουν την Y(z) στο αριστερό μέλος, έχουμε:

$$Y(z)[1 - z^{-1} + z^{-2}] = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

Επειδή είναι $x(n) = (1/2)^n u(n)$, έχουμε $X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

Άσκηση 5

όπου τελικά λαμβάνουμε:

$$Y(z)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1}+z^{-2})}$$

Αναπτύσσοντας το δεύτερο όρο σε μερικά κλάσματα, έχουμε:

$$Y(z)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

Συνεπώς, η λύση είναι:

$$y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u(n)+\left[\frac{\sqrt{3}}{6}sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right]u(n)$$