Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 2: Σήματα Διακριτού Χρόνου

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής
- Πράξεις σε ΣΔΧ
- Ανάλυση ΣΔΧ σε Μοναδιαίες Ώσεις
- Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Μετασχηματισμοί της Ανεξάρτητης Μεταβλητής

1. **Χρονική Μετατόπιση:** $y(n) = x(n - n_o)$

- Αν $n_o > 0$ το σήμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά [**καθυστέρηση**]
- Αν $n_o < 0$ το σήμα μετατοπίζεται προς τα αριστερά [**προπορεία**]

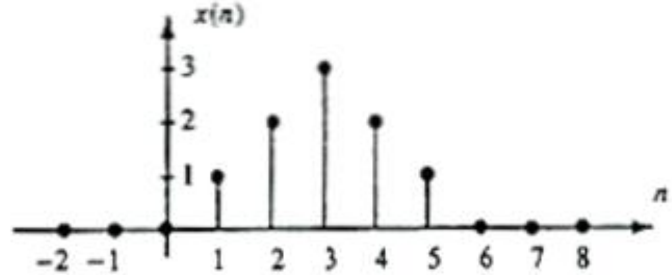
2. **Αντιστροφή** (αναδίπλωση) $y(n) = x(-n)$

3. **Κλιμάκωση στο χρόνο**

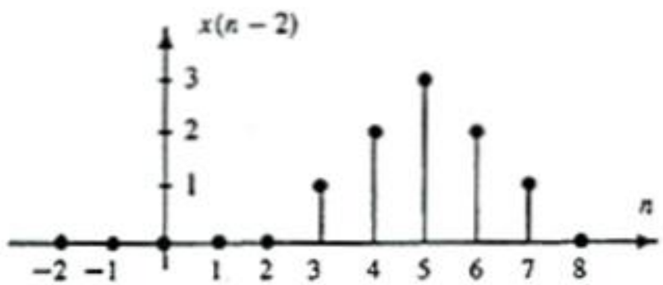
- **Διαίρεση συχνότητας (down sampling):** $y(n) = x(\mathrm{M}n)$ ($\mathrm{M} \in \mathrm{N}$)
  Το $y(n)$ σχηματίζεται λαμβάνοντας κάθε φορά το δείγμα Μ-τάξης του $x(n)$.
- **Πολλαπλασιασμός συχνότητας (up sampling):** $y(n) = x(n/N)$ ($\mathrm{N} \in \mathrm{N}$)
  Το $y(n)$ σχηματίζεται παρεμβάλλοντας Ν-1 μηδενικά ανάμεσα σε κάθε δείγμα του $x(n)$.

Προσοχή: Οι πράξεις της μετατόπισης, αντιστροφής και κλιμάκωσης εξαρτώνται από την **σειρά** με την οποία θα εκτελεστούν.

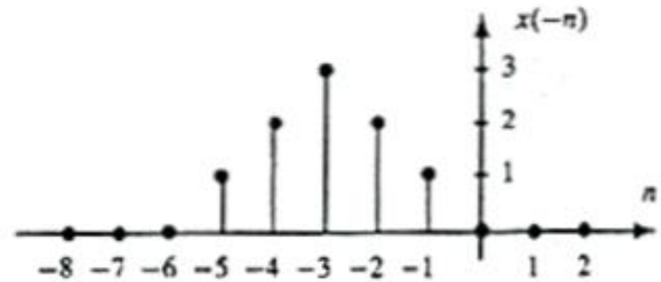
Παραδείγματα Μετασχηματισμών της Ανεξάρτητης Μεταβλητής



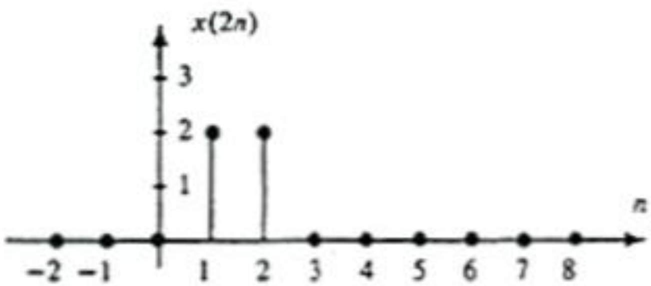
(α) Ένα σήμα διακριτού χρόνου



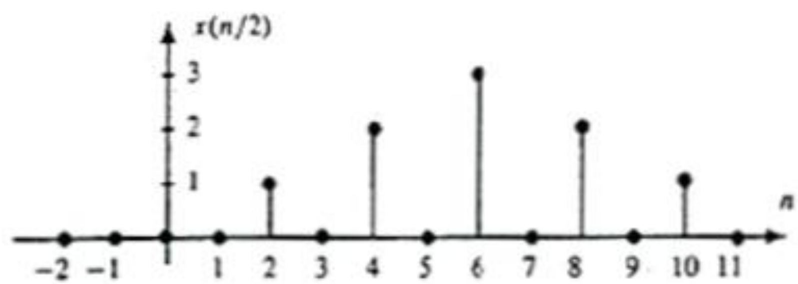
(β) Καθυστέρηση με $n_0 = 2$



(γ) Αντιστροφή χρόνου



(δ) Διαίρεση συχνότητας κατά ένα συντελεστή 2



(ε) Πολλαπλασιασμός συχνότητας κατά ένα συντελεστή 2

Πράξεις σε Σήματα Διακριτού Χρόνου

Πρόσθεση $y(n) = x_1(n) + x_2(n) \qquad -\infty < n < \infty$

Πολλαπλασιασμός $y(n) = x_1(n)\, x_2(n) \qquad -\infty < n < \infty$

Κλιμάκωση πλάτους $y(n) = c\, x(n) \qquad -\infty < n < \infty\,, \quad c \in \mathrm{R}$

Άσκηση 1

Δίνεται το σήμα $x(n) = (6 - n)[u(n) - u(n-6)]$. Να σχεδιάσετε τα σήματα:

(α) $y_1(n) = x(4 - n)$

(β) $y_2(n) = x(2n - 3)$

(γ) $y_3(n) = x(8 - 3n)$

(δ) $y_4(n) = x(n^2 - 2n + 1)$

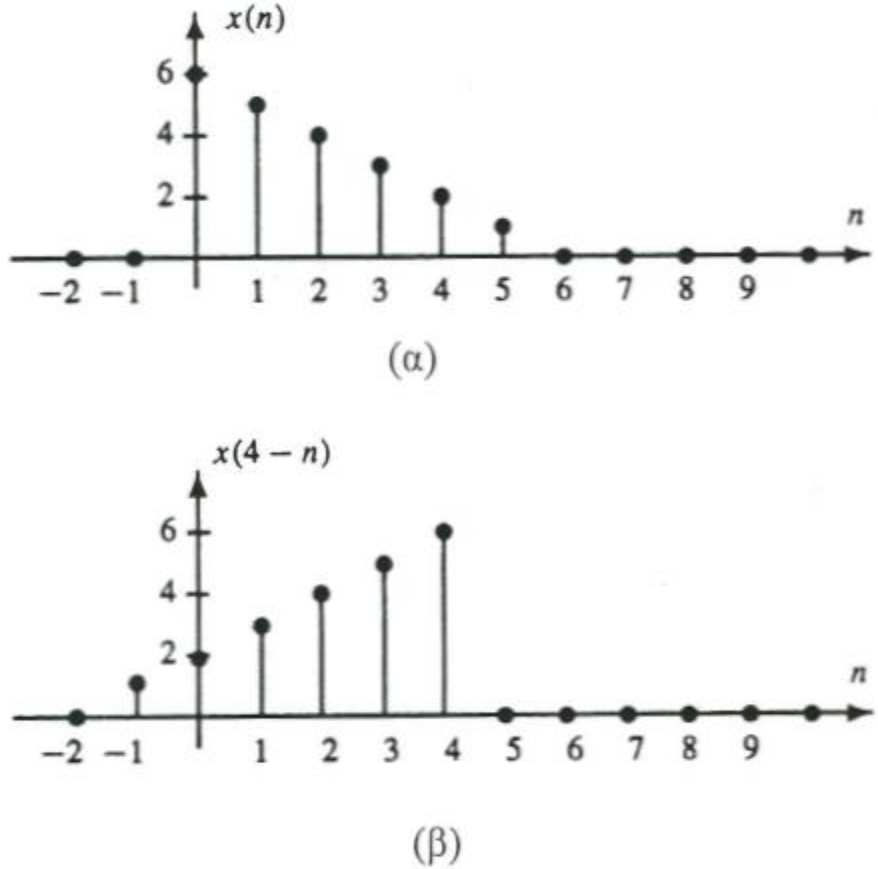
<u>Απάντηση</u>:

(α) Το σήμα $x(n)$ [βλ. Σχήμα (α)], είναι μια γραμμικά μειούμενη ακολουθία, που ξεκινά στην τιμή $n = 0$ και τελειώνει στην τιμή $n = 5$.

Το σήμα $y_1(n) = x(4 - n)$ προκύπτει με τη μετατόπιση του $x(n)$ κατά τέσσερα σημεία και με αντιστροφή ως προς το χρόνο.

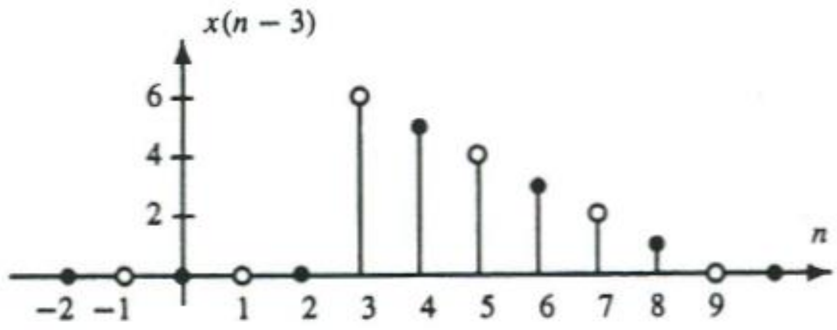
Για $n = 4$ η $y_1(n)$ είναι ίση με $x(0)$. Επομένως, το $y_1(n)$ παίρνει την τιμή 6 για $n = 4$ και μειώνεται γραμμικά προς τα αριστερά μέχρι το σημείο $n = -1$, πέρα από το οποίο η $y_1(n)$ ισούται με το μηδέν. Το σήμα $y_1(n)$ φαίνεται στο Σχήμα (β).

Άσκηση 1 (συνέχεια)

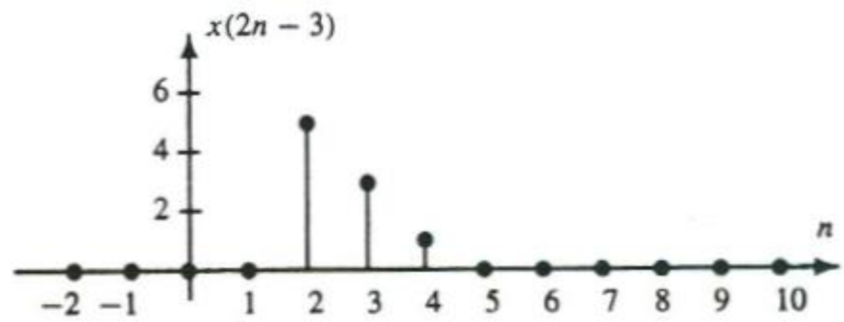


Άσκηση 1 (συνέχεια)

(β) Το δεύτερο σήμα $y_2(n) = x(2n-3)$ διαμορφώνεται από τον συνδυασμό της μετατόπισης ως προς τον χρόνο και της διαίρεσης συχνότητας. Επομένως, το $y_2(n)$ σχεδιάζεται μετατοπίζοντας πρώτα το $x(n)$ προς τα δεξιά κατά τρία σημεία (καθυστέρηση) όπως φαίνεται στο σχήμα (γ).



(γ)

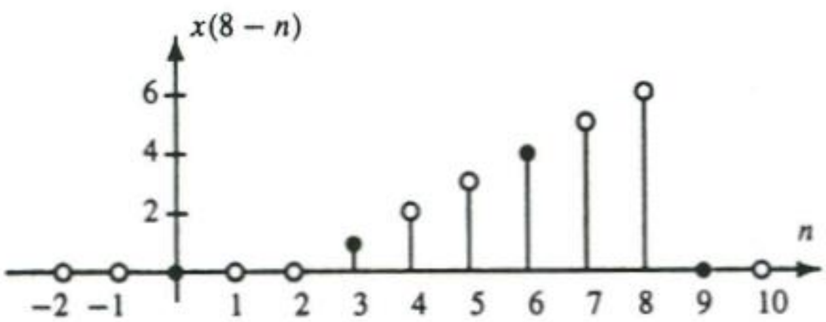


(δ)

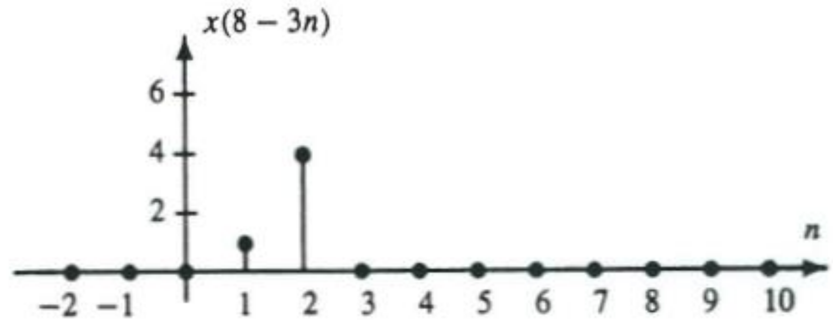
Στο σήμα $y_2(n)$ εφαρμόζεται στη συνέχεια διαίρεση συχνότητας κατά ένα συντελεστή 2 (δηλαδή κρατώντας μόνο τους άρτιους όρους, όπως φαίνεται και από τους συμπαγείς κύκλους στο σχήμα (γ)). Το γράφημα του $y_2(n)$ φαίνεται στο σχήμα (δ).

Άσκηση 1 (συνέχεια)

(γ) Το τρίτο σήμα $y_3(n) = x(8 - 3n)$ σχηματίζεται από έναν συνδυασμό μετατόπισης στο χρόνο, διαίρεσης συχνότητας και αντιστροφής στο χρόνο. Για να παρασταθεί γραφικά το $y_3(n)$ ξεκινάμε σχεδιάζοντας το $x(8 - 3n)$, το οποίο σχηματίζεται μετατοπίζοντας το $x(n)$ προς τα αριστερά κατά οκτώ σημεία (προπορεία) και με αναστροφή στο χρόνο, όπως φαίνεται στο σχήμα (ε).



(ε)



(στ)

Έτσι, το $y_3(n)$ βρίσκεται υπολογίζοντας κάθε τρίτο δείγμα του $x(8 - 3n)$, όπως υποδεικνύεται και από τους μαύρους κύκλους και που σχεδιάζεται στο σχήμα (στ).

Άσκηση 1 (συνέχεια)

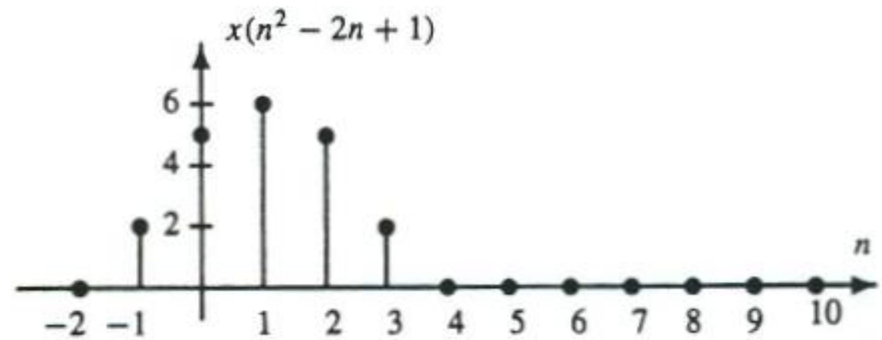
(δ) Το σήμα $y_4(n) = x(n^2 - 2n + 1)$ σχηματίζεται από ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό της μεταβλητής του χρόνου n. Το σήμα αυτό παριστάνεται γραφικά καταγράφοντας το πεδίο τιμών της μεταβλητής n.

Αν $n \geq 4$ ή $n \leq -2$, τότε $n^2 - 2n + 1 \geq 9$ οπότε $y_4(n) = 0$.

Για το διάστημα $-1 \leq n \leq 3$ έχουμε:

- $y_4(-1) = y_4(3) = x(4) = 2$
- $y_4(0) = y_4(2) = x(1) = 5$
- $y_4(1) = x(0) = 6$

Το σήμα $y_4(n)$ σχεδιάζεται στο σχήμα (ζ)



(ζ)

Άσκηση 2

Ένα σήμα δημιουργείται από τη σχέση $x\big((n)\big)_N = x(n\ modulo\ N)$, όπου $(n\ modulo\ N)$ είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός στο $[0, N-1]$ και αποτελεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του n με το N. Π.χ. $\big((3)\big)_8 = 3$ και $\big((12)\big)_8 = 4$. Αν:

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) u(n)$$

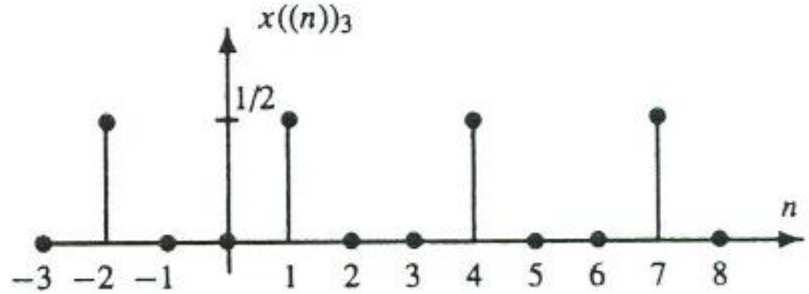
δώστε τα γράφηματα:

(α) $x\big((n)\big)_3$ και

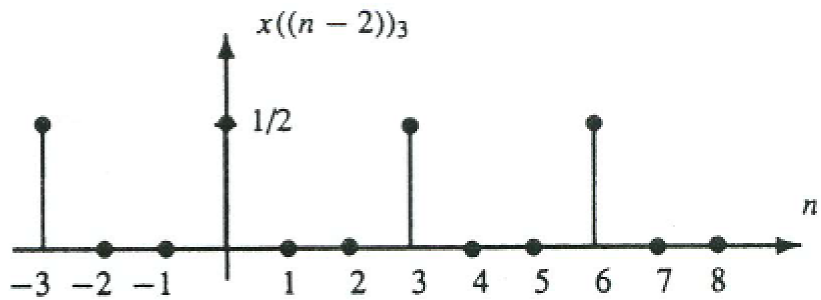
(β) $x\big((n-2)\big)_3$

<u>**Απάντηση**</u>: (α) Παρατηρούμε ότι το $\big((n)\big)_3$ για οποιαδήποτε τιμή του n, είναι πάντα ένας ακέραιος αριθμός στο διάστημα [0,2]. Επειδή $\big((n)\big)_3 = \big((n+3k)\big)_3$ για κάθε k, τότε ισχύει: $x\big((n)\big)_3 = x\big((n+3k)\big)_3$. Επομένως, η $x\big((n)\big)_3$ είναι περιοδική με περίοδο $N=3$ και η $x\big((n)\big)_3$ σχηματίζεται με τη περιοδική επανάληψη των τριών πρώτων τιμών της $x(n)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Άσκηση 2 (συνέχεια)



(β) Το σήμα $x\big((n-2)\big)_3$ είναι επίσης περιοδικό με περίοδο $N = 3$, μόνο που το σήμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά $n_0 = 2$ σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα. Το σήμα φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Ανάλυση ΣΔΧ σε Ώσεις (impulses)

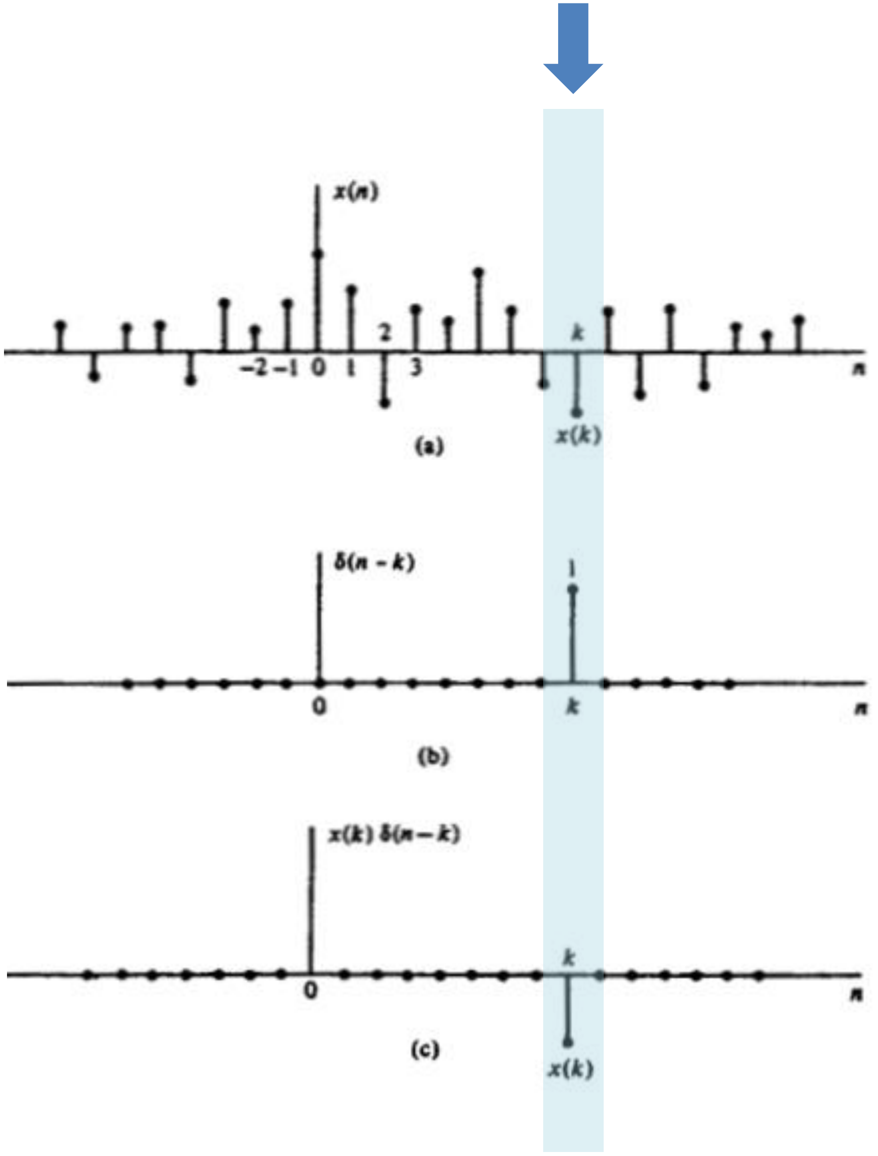
Ανάλυση Σημάτων :

Κάθε ΣΔΧ $x(n)$ μπορεί να παρασταθεί ως ένα άθροισμα κατάλληλα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων $\delta(n)$, πολλαπλασιασμένες με έναν συντελεστή βάρους που αντιστοιχεί στην εκάστοτε τιμή του σήματος $x(n)$. *(Ιδιότητα δειγματοληψίας).*

$$x(n) = \ldots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Κάθε όρος $x(k)\delta(n-k)$ θεωρείται ότι είναι ένα σήμα με πλάτος $x(k)$ την χρονική στιγμή $n = k$, ενώ μηδενίζεται για οποιαδήποτε άλλη τιμή του n.



Άσκηση 3

Να εκφραστεί (α) σε άθροισμα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων και (β) σαν άθροισμα μετατοπισμένων μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων, η ακολουθία:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

<u>**Απάντηση**</u>: (α) Ως άθροισμα μοναδιαίων κρουστικών (ώσεων) είναι προφανώς:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

(β) Στην παραπάνω επίλυση θέτουμε όπου $\delta(n)$ το $u(n) - u(n-1)$ και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} x(n) &= \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) \\ &= u(n) - u(n-1) + 2u(n-1) - 2u(n-2) + 3u(n-2) - 3u(n-3) \\ &= u(n) + u(n-1) + u(n-2) - 3u(n-3) \end{aligned}$$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Μέση Τιμή ενός ΣΔΧ $x(n)$ στο διάστημα τιμών $[0, N]$:

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} x(n)$$

- $N + 1$ είναι το πλήθος των σημείων (δειγμάτων) του σήματος.
- Για ένα ημιτονοειδές σήμα η μέση τιμή είναι μηδέν ($\bar{x}(n) = 0$), όταν ως χρονικό διάστημα υπολογισμού θεωρηθεί η μία περίοδος.
- Για ένα σταθερό σήμα $x(n) = A$, η μέση τιμή του είναι $\bar{x}(n) = A$.

Ενεργός Τιμή ενός ΣΔΧ $x(n)$ στο διάστημα τιμών $[0, N]$**:**

$$\bar{\bar{x}}(n) = \frac{1}{N+1} \left[\sum_{n=0}^{N} x^2(n) \right]^{1/2}$$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Ενέργεια ενός ΣΔΧ $x(n)$ στο διάστημα τιμών $[0, N]$:

$$E = \sum_{n=0}^{N} x^2(n)$$

Αν το σήμα εκτείνεται στο χρονικό διάστημα $(-\infty, +\infty)$, ισχύει:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \left[T_s \sum_{n=-N}^{N} |x(n\, T_s)|^2 \right]$$

- T_S η περίοδος δειγματοληψίας
- Η ενέργεια μπορεί να είναι άπειρη ή πεπερασμένη.
- Το σήμα $x(n)$ καλείται **σήμα ενέργειας** αν περιέχει πεπερασμένη ενέργεια, δηλ. όταν ισχύει $0 < E_x < \infty$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Στιγμιαία Ισχύς : $P(n) = x^2(n)$

Μέση Ισχύς ενός ΣΔΧ $x(n)$ στο διάστημα τιμών $[0, N]$:

$$P = \overline{P(n)} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} x^2(n)$$

Αν το σήμα εκτείνεται στο χρονικό διάστημα $(-\infty, +\infty)$, ισχύει :

$$P = \overline{P(n)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N$$

- Το $x(n)$ καλείται **σήμα ισχύος** αν ισχύει $0 < P < \infty$.
- Η μέση ισχύς **περιοδικού σήματος** είναι πεπερασμένη και ίση με τη μέση ισχύ σε μία περίοδο N:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Συμπεράσματα

- Ένα σήμα μπορεί να είναι σήμα ενέργειας ή σήμα ισχύος ή τίποτε από τα δύο. Δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα σήμα ενέργειας και σήμα ισχύος.
- Ένα σήμα ενέργειας έχει μηδενική ισχύ, επειδή η πεπερασμένη ενέργεια διαιρείται με άπειρο χρόνο.
- Ένα σήμα ισχύος έχει άπειρη ενέργεια, επειδή η πεπερασμένη ισχύς του πολλαπλασιάζεται με άπειρο χρόνο.
- Σήματα με άπειρη ενέργεια μπορούν να έχουν πεπερασμένη μέση ισχύ.

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Σημάτων

Για περιοδικά σήματα

- Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος.
- Αν ένα περιοδικό σήμα παίρνει πεπερασμένες τιμές, τότε η ενέργειά του σε μία περίοδο είναι πεπερασμένη.
- Η ενέργεια του σήματος σε όλο το χρόνο είναι άπειρη, επειδή είναι το άθροισμα της ενέργειας άπειρων περιόδων.
- Γι αυτό το λόγο ένα περιοδικό σήμα δεν είναι τύπου ενέργειας.

Άσκηση 4

Να προσδιορίσετε την ενέργεια και τη μέση ισχύ του μοναδιαίου βήματος $u(n)$.

<u>Απάντηση</u>:

- **Ενέργεια**

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)^2| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Επειδή η ενέργεια είναι άπειρη, το σήμα δεν είναι σήμα ενέργειας.

- **Μέση Ισχύς**

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)^2| = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1+\frac{1}{N}}{2+\frac{1}{N}} = \frac{1}{2}$$

Επειδή η μέση ισχύς είναι πεπερασμένη, το σήμα είναι σήμα ισχύος.

Άσκηση 5

(α) Να βρεθεί η αριθμητική τιμή [$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$] του σήματος $x(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n)$

(β) Να υπολογιστεί η ισχύς του $P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$

(γ) Αν το $x(n)$ εφαρμοστεί στην είσοδο ενός χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(n) = n\, x(n)$, να βρεθεί η ισχύς του σήματος εξόδου $y(n)$.

<u>Απάντηση</u>:

(α) Με χρήση Γεωμετρικών Προόδων έχουμε: $A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n)$

$= \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Θέτοντας όπου n, το $-n$, έχουμε: $A = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Από τις γεωμετρικές προόδους προκύπτει ότι : $A = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$

Άσκηση 5(συνέχεια)

(β) Η ισχύς του $x(n)$ δίνεται από: $P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$. Αντικαθιστώντας την τιμή του (n) και στη συνέχεια θέτοντας όπου n το $-n$ και χρησιμοποιώντας γεωμετρικές προόδους έχουμε: $P_x = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2\pi} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$

(γ) Η ισχύς του $y(n) = n\,x(n)$ δίνεται από $P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{4}{9}\right)^n$ (1).

Είναι γνωστό ότι $\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}$ όταν $|a| < 1$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς a έχουμε: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^{n-1} = \frac{d}{da}\frac{a}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{(1-a)^3}$.

Επομένως ισχύει $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n = \frac{a(1+a)}{(1-a)^3}$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση αυτή για να υπολογίσουμε το άθροισμα στην εξίσωση (1), και βρίσκουμε: $P_y = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{13}{9}\right)}{\left(\frac{5}{9}\right)^3} = \frac{468}{125}$