Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 6: Απόκριση Συχνότητας

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Η έννοια της Απόκρισης Συχνότητας
- Ιδιότητες της Απόκρισης Συχνότητας
- Ψηφιακά Φίλτρα
- Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων
- Διασύνδεση ΓΑΚΜ Συστημάτων (Φίλτρων)

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Αν $x(n)$ ένα σήμα διακριτού χρόνου, τότε:

- Ο **ευθύς DTFT** είναι:

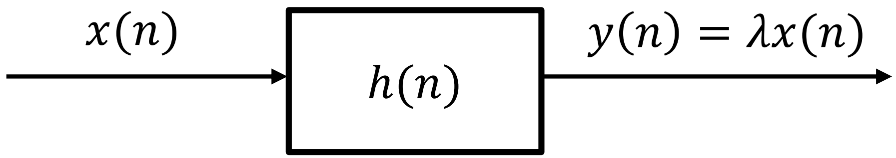
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j\omega k}$$

- Ο **αντίστροφος DTFT** είναι:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega k}$$

Η έννοια της Απόκρισης Συχνότητας

Οι **ιδιοσυναρτήσεις [λ] των ΓΑΚΜ συστημάτων** είναι ακολουθίες για τις οποίες, η είσοδος περνώντας μέσα από το σύστημα μεταβάλλεται μόνο κατά το (μιγαδικό) πλάτος.



Αν η είσοδος είναι ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα $x(n) = e^{j\omega n},\ -\infty < n < +\infty$, τότε η έξοδος $y(n)$ δίνεται από τη συνέλιξη ως:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\ e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\ e^{-j\omega k} = H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}$$

Η συνάρτηση $H\left(e^{j\omega}\right)$ ονομάζεται **Απόκριση Συχνότητας** και υπολογίζεται από:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\ e^{-j\omega k}$$

Η έννοια της Απόκρισης Συχνότητας

Η συνάρτηση $H\left(e^{j\omega}\right)$ είναι (γενικά) μιγαδική και εξαρτάται από τη συχνότητα ω του μιγαδικού εκθετικού σήματος. Μπορεί να γραφεί σε **καρτεσιανή μορφή**:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{j\omega}\right) + j\, H_J\left(e^{j\omega}\right)$$

ή σε **πολική μορφή**:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_h(\omega)}$$

Όπου:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_J^2(e^{j\omega})}\ \textbf{πλάτος,}\quad \varphi_h(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_J\left(e^{j\omega}\right)}{H_R\left(e^{j\omega}\right)}\ \textbf{φάση}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων ως προς ω συνιστούν τα **Διαγράμματα Πλάτους και Φάσης**, αντίστοιχα. Σύνηθες είναι και το διάγραμμα $20log\left|H(e^{j\omega})\right|$ με μονάδα μέτρησης το decibel (dB).

$\left|H(e^{j\omega})\right| = 1 \rightarrow 0\ dB$ $\quad\left|H(e^{j\omega})\right| = 10 \rightarrow 20\ dB$ $\quad\left|H(e^{j\omega})\right| = 0.1 \rightarrow -20\ dB$

Ορίζουμε την **Καθυστέρηση Ομάδας** ως $\tau_h(\omega) = -\frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega}$

Ιδιότητες της Απόκρισης Συχνότητας

Περιοδικότητα: Η απόκριση συχνότητας είναι περιοδική συνάρτηση με **περίοδο 2π**. Η απόκριση συχνότητας ενός ΓΑΚΜ συστήματος για είσοδο $x(n) = e^{jn\omega_0}$ είναι ίση με την απόκριση για είσοδο $x(n) = e^{jn(\omega_0+2\pi)}$, δηλ. ισχύει:

$$H\left(e^{j\omega_0}\right) = H\left(e^{j(\omega_0+2\pi)}\right)$$

Συμμετρία: Αν $h(n)$ είναι πραγματική, τότε η απόκριση συχνότητας είναι μία συζυγής συμμετρική συνάρτηση της συχνότητας, δηλ. ισχύει:

$$H\left(e^{-j\omega}\right) = H^*\left(e^{j\omega}\right)$$

Επίσης **άρτια συμμετρία** εμφανίζει το πραγματικό μέρος και το πλάτος:

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right) \quad \text{και} \quad \left|H_R\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H_R\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

και **περιττή συμμετρία** το φανταστικό μέρος, η φάση και η καθυστέρηση ομάδας:

$$H_J\left(e^{j\omega}\right) = -H_J\left(e^{-j\omega}\right), \qquad \varphi_h(\omega) = -\varphi_h(-\omega) \quad \text{και} \quad \tau_h(\omega) = -\tau_h(-\omega)$$

Ιδιότητες της Απόκρισης Συχνότητας

Αντιστροφή της Απόκρισης Συχνότητας

Αν η απόκριση συχνότητας ενός ΓΑΚΜ συστήματος είναι :

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)\, e^{-jn\omega}$$

Η κρουστική απόκριση μπορεί να ανακτηθεί με ολοκλήρωση σε οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H\left(e^{j\omega}\right) e^{jn\omega} d\omega$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος με κρουστική απόκριση που δίνεται από τη σχέση: $h(n) = \delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$.

<u>**Απάντηση**</u>: Από τον ορισμό της απόκρισης συχνότητας έχουμε:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\ e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)]e^{-jn\omega} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)\ e^{-jn\omega} + 6\delta(n-1)\ e^{-jn\omega} + 3\delta(n-2)\, e^{-jn\omega}$$

κι επειδή $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0)\ e^{-jn\omega} = e^{-jn_0\omega}$

προκύπτει ότι η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 1 + 6e^{-j\omega} + 3e^{-2j\omega}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί το πλάτος, η φάση και η καθυστέρηση ομάδας ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = \alpha^n\, u(n)$, όπου $\alpha \in \mathrm{R}$ και $|\alpha| < 1$.

Απάντηση: Απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)\, e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n\, u(n) e^{-jn\omega} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha\, e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Πλάτος:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = H\left(e^{j\omega}\right) H^*\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} . \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha\, cos\omega}$$

Φάση:

$$\varphi_h(\omega) = tan^{-1} \frac{H_J(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = tan^{-1} \frac{-a\, sin\omega}{1 - \alpha\, cos\omega}$$

Καθυστέρηση ομάδας:

$$\tau_h(\omega) = \frac{d\varphi_h \omega}{d\omega} = \cdots = \frac{\alpha^2 - \alpha\, cos\omega}{1 + a^2 - 2\alpha\, cos\omega}$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί το πλάτος, η φάση και η καθυστέρηση ομάδας ενός συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$, όπου α πραγματικός αριθμός.

<u>Απάντηση</u>: Απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 1 - ae^{-j\omega} = 1 - a\ cos\omega + ja\ sin\omega$$

Πλάτος:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = (1-\alpha\ cos\omega)^2 + (\alpha\ sin\omega)^2 = 1 - 2\alpha\ cos\omega + \alpha^2 cos^2\omega + \alpha^2 sin^2\omega$$
$$= 1 - 2\alpha\ cos\omega + a^2$$

Φάση:

$$\varphi_h(\omega) = tan^{-1}\frac{H_J(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = tan^{-1}\frac{a\ sin\omega}{1-\alpha\ cos\omega}$$

Καθυστέρηση ομάδας:

$$\tau_h(\omega) = \frac{d\varphi_h\omega}{d\omega} = \cdots = \frac{\alpha^2 - \alpha\ cos\omega}{1 - 2\alpha\ cos\omega + a^2}$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας ενός φίλτρου κινητού μέσου όρου L-τάξης το οποίο για είσοδο $x(n)$ παράγει έξοδο:

$$y(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} x(n-k)$$

<u>Απάντηση</u>: Αν η είσοδος στο φίλτρο είναι η $x(n) = \delta(n)$, η απόκριση θα είναι η κρουστική απόκριση $h(n)$, δηλ:

$$h(n) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} \delta(n-k)$$

Άρα η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{L+1}\sum_{k=0}^{L} e^{-jk\omega}$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Με χρήση γεωμετρικών πρόδων, έχουμε:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{L+1}\frac{1-e^{-j(L+1)\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $e^{-j(L+1)\omega/2}$ από τον αριθμητή και τον όρο $e^{-j\omega/2}$ από το παρονομαστή, έχουμε

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{L+1}e^{-jL\omega/2}\frac{e^{j(L+1)\omega/2}-e^{-j(L+1)\omega/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}$$

ή

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{L+1}e^{-jL\omega/2}\frac{\sin(L+1)\,\omega/2}{\sin\omega/2}\ s$$

Ψηφιακά Φίλτρα

Ψηφιακό Φίλτρο: είναι ένας αλγόριθμος με τη βοήθεια του οποίου μία ακολουθία αριθμών (σήμα εισόδου) μετασχηματίζεται σε μία δεύτερη ακολουθία (σήμα εξόδου).

Γραμμική Φάση: ένα ΓΑΚΜ σύστημα παρουσιάζει Γραμμική Φάση, όταν η απόκριση συχνότητας έχει τη μορφή:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = A\left(e^{j\omega}\right) e^{-ja\omega}, \qquad a \in R$$

$$\varphi_h(\omega) = \begin{cases} -\alpha\omega & \text{όταν } \ A\left(e^{j\omega}\right) \geq 0 \\ -\alpha\omega + \pi & \text{όταν } \ A\left(e^{j\omega}\right) < 0 \end{cases}$$

Ολοπερατό φίλτρο : ένα σύστημα που το πλάτος της απόκρισης συχνότητας είναι μία σταθερά.

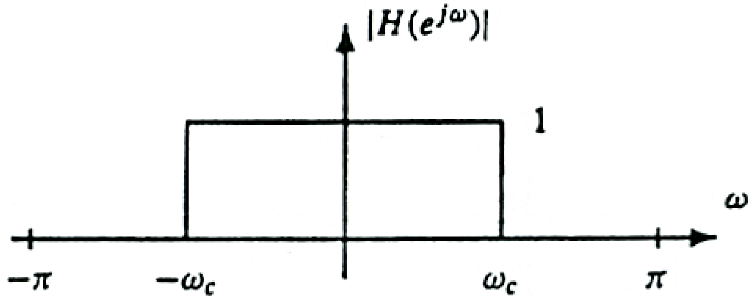
$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = c, \qquad c \in R$$

Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

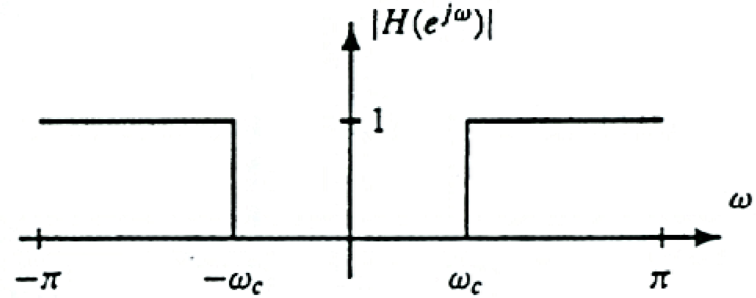
Ζώνη Διέλευσης: η περιοχή στην οποία το πλάτος της απόκρισης συχνότητας είναι 1.

Ζώνη Αποκοπής: η περιοχή στην οποία το πλάτος της απόκρισης συχνότητας είναι 0.

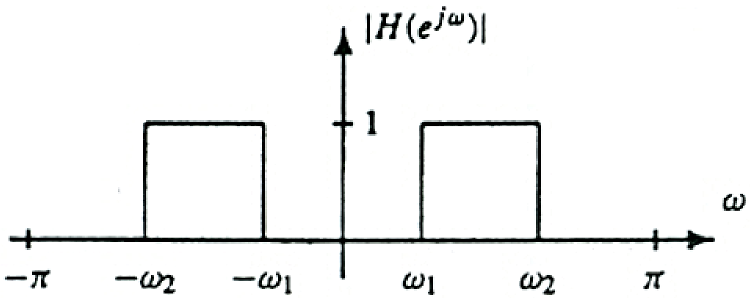
Συχνότητες Αποκοπής: οι οριακές συχνότητες που σημειώνουν τα άκρα της ζώνης διέλευσης και αποκοπής.



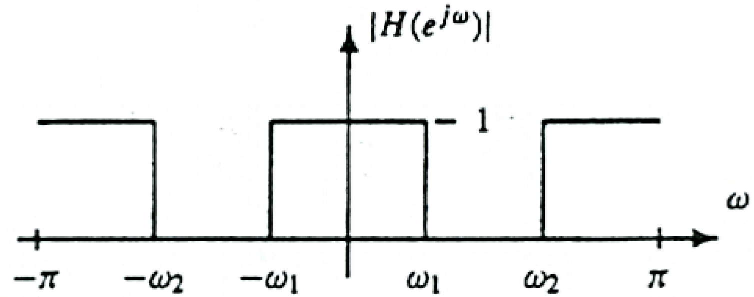
(α) Ιδανικό *Χαμηλοπερατό Φίλτρο* (*Low-Pass*).



(β) Ιδανικό *Υψηπερατό Φίλτρο* (*High-Pass*).



(γ) Ιδανικό *Ζωνοπερατό Φίλτρο* (*Band-Pass*).

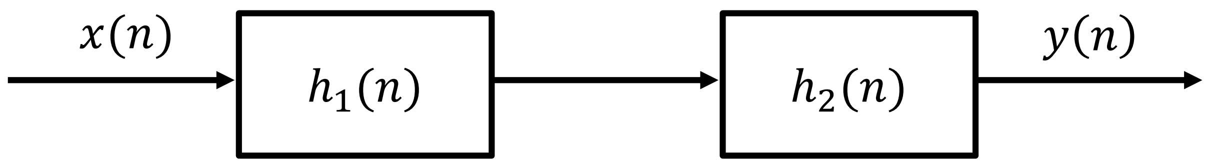


(δ) Ιδανικό *Ζωνοφρακτικό Φίλτρο* (*Band-Stop*).

Διασύνδεση ΓΑΚΜ Συστημάτων (Φίλτρων)

Δημιουργούμε συνδεσμολογίες φίλτρων για να κατασκευάσουμε συστήματα τα οποία θα έχουν μία επιθυμητή απόκριση.

Σύνδεση σε Σειρά (cascade):



Η σε σειρά σύνδεση ισοδυναμεί με ένα ΓΑΚΜ σύστημα με κρουστική απόκριση:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n)$$

και απόκριση συχνότητας

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right) H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

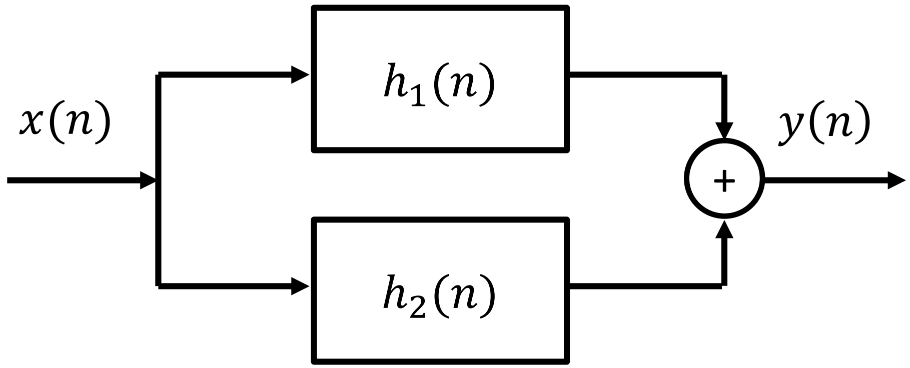
Επίσης ισχύουν:

$$20log\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 20log\left|H_1\left(e^{j\omega}\right)\right| + 20log\left|H_2\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) \ \text{ και } \ \tau(\omega) = \tau_1(\omega) + \tau_2(\omega)$$

Διασύνδεση ΓΑΚΜ Συστημάτων (Φίλτρων)

Παράλληλη Σύνδεση:



Η παράλληλη σύνδεση ισοδυναμεί με ένα ΓΑΚΜ σύστημα με κρουστική απόκριση:

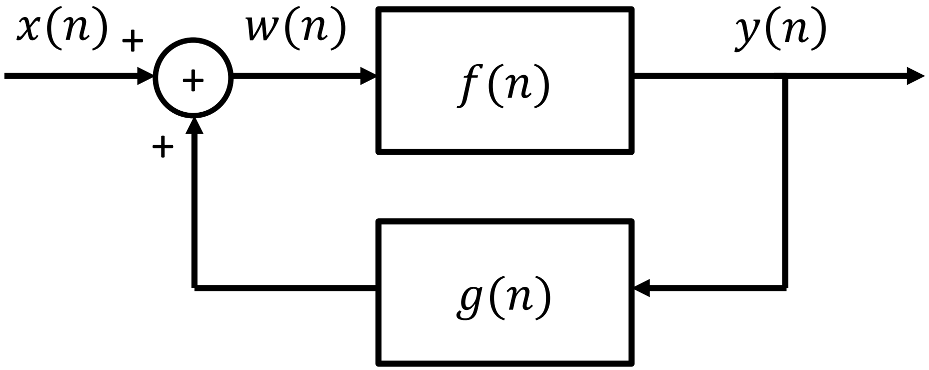
$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

και απόκριση συχνότητας

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right) + H_2\left(e^{j\omega}\right)$$

Διασύνδεση ΓΑΚΜ Συστημάτων (Φίλτρων)

Σύνδεση με Ανάδραση:



Η σύνδεση με ανάδραση ισοδυναμεί με ένα ΓΑΚΜ σύστημα με κρουστική απόκριση:
$w(n) = x(n) + y(n) * g(n)$. Όμως επειδή $y(n) = w(n) * f(n)$, έχουμε:

$$y(n) = [x(n) + y(n) * g(n)] * f(n) = x(n) * f(n) + y(n) * g(n) * f(n)$$

$$\Rightarrow y(n)[1 - g(n) * f(n)] = x(n) * f(n)$$

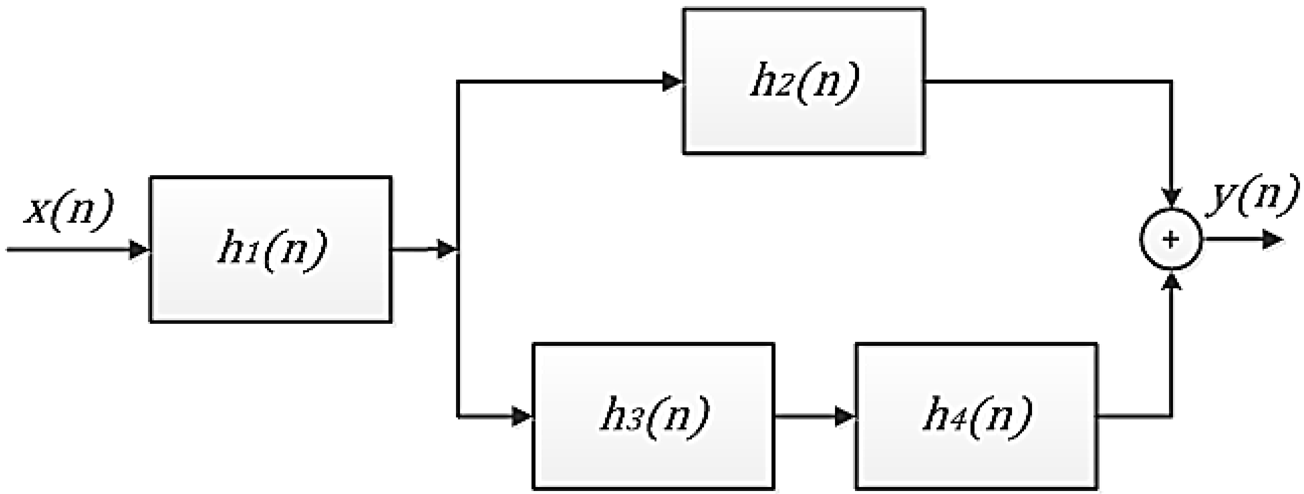
$$\Rightarrow \frac{y(n)}{x(n)} = \frac{f(n)}{1 - g(n) * f(n)}$$

και απόκριση συχνότητας:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{F\left(e^{j\omega}\right)}{1 - F(e^{j\omega})\, G(e^{j\omega})}$$

Άσκηση 5

(α) Για το παρακάτω σύστημα, να υπολογιστεί η συνολική απόκριση συχνότητας, συναρτήσει των $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$, $H_3(e^{j\omega})$ και $H_4(e^{j\omega})$.



(β) Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας αν:

- $h_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-4)$
- $h_2(n) = h_3(n) = (0.2)^n u(n)$
- $h_4(n) = \delta(n-2)$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Απάντηση:

(α) $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})[H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})H_4(e^{j\omega})]$

(β) Οι επιμέρους αποκρίσεις κάθε συστήματος ξεχωριστά, είναι:

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega} = (1 + e^{-j2\omega})^2$$

$$H_2(e^{j\omega}) = H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.2\, e^{-j\omega}}$$

και $\quad H_4(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}$

Επομένως η συνολική απόκριση είναι:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})[H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})H_4(e^{j\omega})] =$$

$$= H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})\,[1 + H_4(e^{j\omega})] = \frac{(1+e^{-j2\omega})^3}{1-0.2\, e^{-j\omega}}$$

Άσκηση 6

Έστω $h(n)$ η κρουστική απόκριση ενός χαμηλοπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής ω_c. Ποιος τύπος φίλτρου έχει κρουστική απόκριση $g(n) = (-1)^n h(n)$;

<u>**Απάντηση**</u>: Επειδή $g(n) = (-1)^n h(n)$, η απόκριση συχνότητας $G\left(e^{j\omega}\right)$ σχετίζεται με την απόκριση συχνότητας $H\left(e^{j\omega}\right)$, ως εξής:

$$G\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h(n) e^{-jn\omega} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn(\omega-\pi)} = H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

Επομένως, η $G\left(e^{j\omega}\right)$ σχηματίζεται μετατοπίζοντας την $H\left(e^{j\omega}\right)$ στη συχνότητα κατά π. Έτσι, αν η ζώνη διέλευσης του χαμηλοπερατού φίλτρου είναι $|\omega| \leq |\omega_c|$, η ζώνη διέλευσης του φίλτρου με $G\left(e^{j\omega}\right)$ θα είναι $\pi - \omega_c < |\omega| \leq \pi$. Σαν αποτέλεσμα, έπεται ότι η $g(n)$ είναι η κρουστική απόκριση ενός υψηλοπερατού φίλτρου. :

Άσκηση 7

Αν ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(n)$ υλοποιηθεί με μια ΓΕΔΣΣ της μορφής

$$y(n) = \sum_{k=1}^{p} a(k)\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{q} b(k)\, x(n-k)$$

με ποιο τρόπο πρέπει να τροποποιηθεί η ΓΕΔΣΣ, ώστε να υλοποιηθεί το σύστημα με κρουστική απόκριση $g(n) = (-1)^n h(n)$;

<u>**Απάντηση**</u>: Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου με κρουστική απόκριση $h(n)$ είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k) e^{-jk\omega}}{1 - \sum_{k=1}^{p} a(k) e^{-jk\omega}}$$

Πολλαπλασιάζοντας την $h(n)$ με τον όρο $(-1)^n$ προκύπτει ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας:

$$G\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{q} b(k) e^{-jk(\omega-\pi)}}{1 - \sum_{k=1}^{p} a(k) e^{-jk(\omega-\pi)}}$$

Άσκηση 8 (συνέχεια)

Επειδή $e^{jk\pi} = (-1)^k$,

$$G\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\sum_{k=0}^{q}(-1)^k b(k)e^{-jk\omega}}{1 - \sum_{k=1}^{p}(-1)^k a(k)e^{-jk\omega}}$$

και η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$y(n) = \sum_{k=1}^{p}(-1)^k a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^{q}(-1)^k b(k)x(n-k)$$

Έτσι, οι συντελεστές $a(k)$ και $b(k)$ για περιττά k λαμβάνουν αρνητικό πρόσημο.