Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 7: Μετατροπή Σήματος από Αναλογική Μορφή σε Ψηφιακή

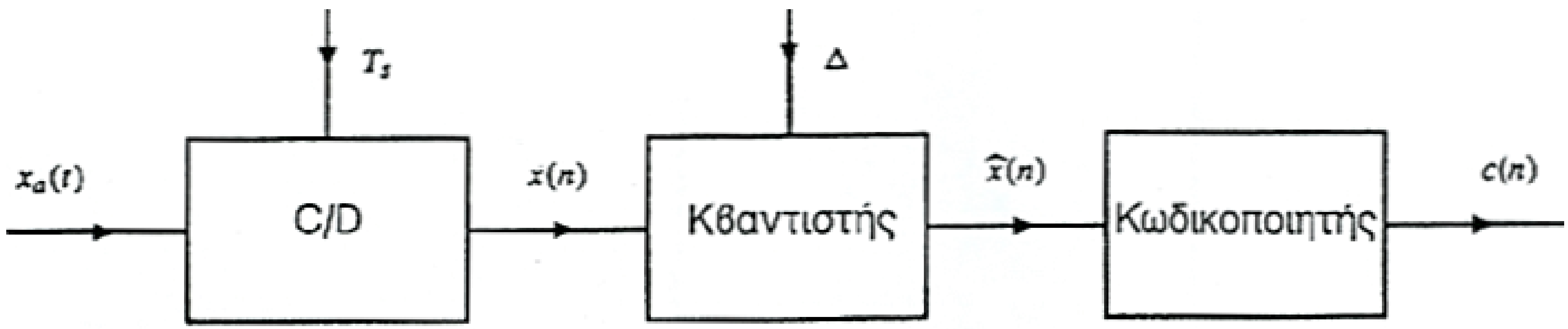
Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό

- Είδη Δειγματοληψίας:
  - Ιδανική δειγματοληψία
  - Πρακτική δειγματοληψία
  - Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής
- Κβαντισμός
  - Ομοιόμορφος και Ανομοιόμορφος Κβαντισμός
  - Παράμετροι Κβαντισμού
- Κωδικοποίηση
- Μετατροπή Ψηφιακού Σήματος σε Αναλογικό

Μετατροπή Αναλογικού Σήματος σε Ψηφιακό

Τα περισσότερα σήματα διακριτού χρόνου (ΣΔΧ) παράγονται από σήματα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ), με επεξεργασία τριών σταδίων:



Μετατροπέας Analog/Digital

- **Δειγματοληψία** (sampling): Continuous to Discrete Conversion. Παράγει το $x(n) = x_a(nT_s)$, όπου T_s: περίοδος δειγματοληψίας (sampling period)
- **Κβαντισμός** (quantization): αντιστοιχίζει το συνεχές πλάτος $x_a(nT_s)$ σε διακριτό σύνολο τιμών $\hat{x}(n)$. Χαρακτηριστικά: Δ: διάστημα κβαντισμού και μήκος λέξης (bits)
- **Κωδικοποίηση** (coding): Παράγει ακολουθία $c(n)$ δυαδικών κωδικών λέξεων, που μεταδίδονται στο κανάλι επικοινωνίας.

Δειγματοληψία

Δειγματοληψία (Sampling)

Δειγματοληψία (sampling) είναι η διαδικασία μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε σήμα διακριτού χρόνου.

Έστω $m(t)$ ένα σήμα **βασικής (οριοθετημένης) ζώνης συχνοτήτων** με φάσμα $M(f)$, για το οποίο ισχύει:

$$\boldsymbol{M(f) = 0} \text{ για } |f| > f_{max}$$

Δηλαδή f_{max} είναι η μέγιστη συχνότητα του σήματος $m(t)$.

Θεώρημα ή Συνθήκη Δειγματοληψίας του Nyquist: Αν $m(nT_s)$ είναι οι τιμές του $m(t)$, που λαμβάνονται σαν **δείγματα** σε ομοιόμορφα χρονικά διαστήματα T_s, τότε είναι δυνατή η ακριβής ανάκτηση του $m(t)$ από τα δείγματα $m(nT_s)$ αν ισχύει:

$$\boldsymbol{T_s = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_{max}}}$$

όπου $\boldsymbol{T_s}$ περίοδος δειγματοληψίας, $\boldsymbol{f_s}$ συχνότητα δειγματοληψίας

Ρυθμός Nyquist : $\boldsymbol{f_n = 2\, f_{max}}$

Είδη Δειγματοληψίας

- Ιδανική δειγματοληψία
- Πρακτική δειγματοληψία
- Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής

Ιδανική Δειγματοληψία

Ιδανική Δειγματοληψία

Ιδανική δειγματοληψία είναι η διαδικασία παραγωγής δειγμάτων $\{m(nT_s)\}$ ενός σήματος $m(t)$ **στιγμιαία** και με ομοιόμορφο τρόπο, μία φορά κάθε T_s δευτερόλεπτα.

Το ιδανικά δειγματολαμβανόμενο σήμα $m_s(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$m_s(t) = m(t)\, \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s)\, \delta_{T_s}(t - nT_s)$$

Η τιμή του T_s προσδιορίζεται σύμφωνα με το θεώρημα του Nyquist.

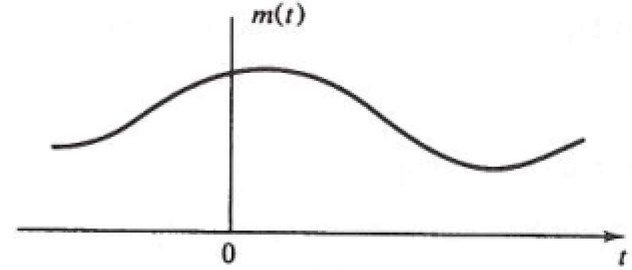
Η διαδικασία ονομάζεται **ιδανική** επειδή χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $\delta(t)$, η οποία έχει μόνο θεωρητική αξία και δεν μπορεί να υλοποιηθεί στην πράξη.

Η μαθηματική θεμελίωση της ιδανικής δειγματοληψίας δίνεται από την ακόλουθη ιδιότητα της συνάρτησης $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(t_0)$$

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Χρόνου)

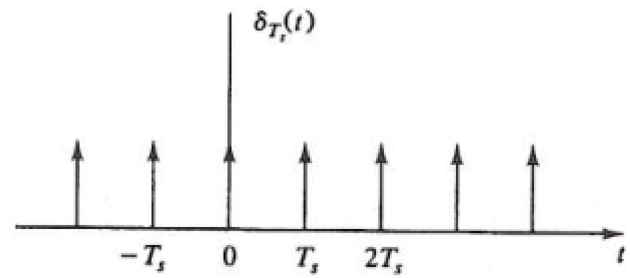
(α) Πληροφοριακό Σήμα $m(t)$



(a)

(b) Ακολουθία κρουστικών συναρτήσεων:

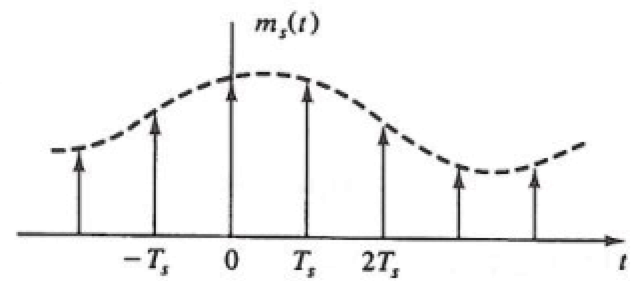
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s)\, \delta_{T_s}(t - nT_s)$$



(b)

(c) Ιδανικά δειγματολαμβανόμενο σήμα:

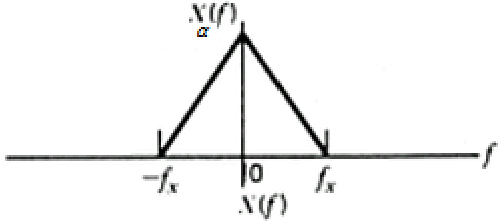
$$m_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(nT_s)\, \delta_{T_s}(t - nT_s)$$



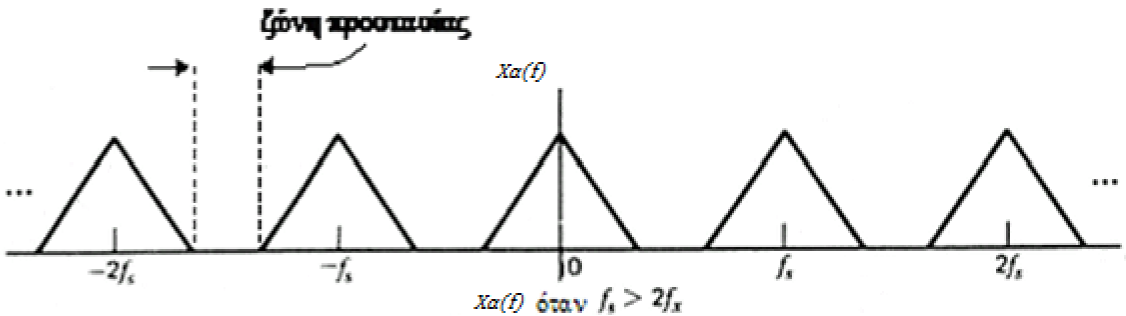
(c)

Ιδανική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

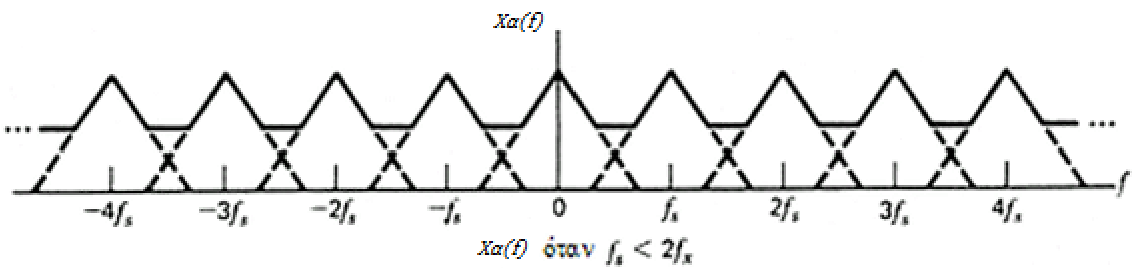
Φάσμα σήματος εισόδου $x_\alpha(t)$
με $X_a(f) = 0$ για $|f| > f_x$



Φάσμα $X(f)$ δειγματολη-
πτημένου σήματος όταν
$f_s \geq 2f_x$



Φάσμα $X(f)$ δειγματολη-
πτημένου σήματος όταν
$\boldsymbol{f_s < 2f_x}$



Φαινόμενο επικάλυψης
(aliasing effect)

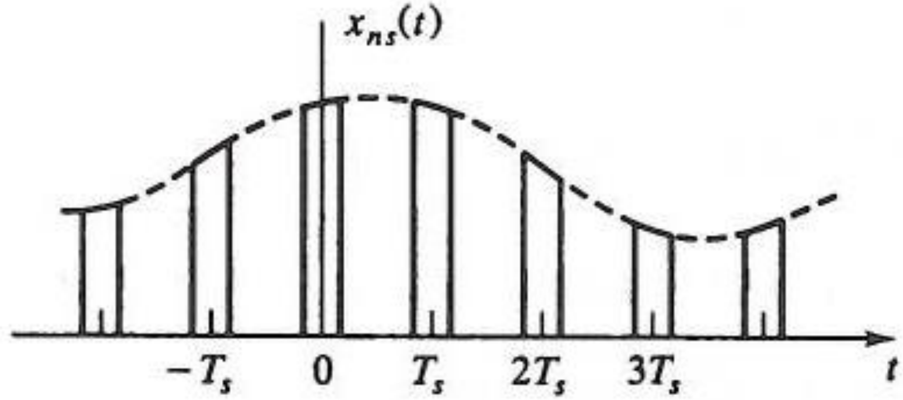
Φυσική Δειγματοληψία

Φυσική Δειγματοληψία (Πεδίο Χρόνου)

Στη **φυσική δειγματοληψία** το δειγματολαμβανόμενο σήμα $x_{ns}(t)$ προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του σήματος $m(t)$ με μία περιοδική ακολουθία ορθογώνιων παλμών $x_p(t)$, δηλ. ισχύει :

$$x_{ns}(t) = m(t)\, x_p(t)$$

όπου $x_p(t)$ είναι μία περιοδική ακολουθία ορθογώνιων παλμών (παλμοσειρά) με περίοδο T_s. Κάθε ορθογώνιος παλμός έχει άνοιγμα d και πλάτος ίσο με τη μονάδα.



Η δειγματοληψία ονομάζεται **φυσική**, επειδή η κορυφή κάθε παλμού στο $x_{ns}(t)$ διατηρεί το σχήμα του αντίστοιχου με αυτού αναλογικού τμήματος κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος του παλμού.

Φυσική Δειγματοληψία (Πεδίο Συχνότητας)

Το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της παλμοσειράς $x_p(t)$, είναι:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_s t} \quad \text{όπου } \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \;\; \text{και} \;\; c_n = \frac{d}{T_s}\frac{\sin(n\omega_s d/2)}{n\omega_s d/2}$$

Τότε θα είναι:

$$x_{ns}(t) = m(t)\, x_p(t) = m(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{jn\omega_s t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, m(t)\, e^{jn\omega_s t}$$

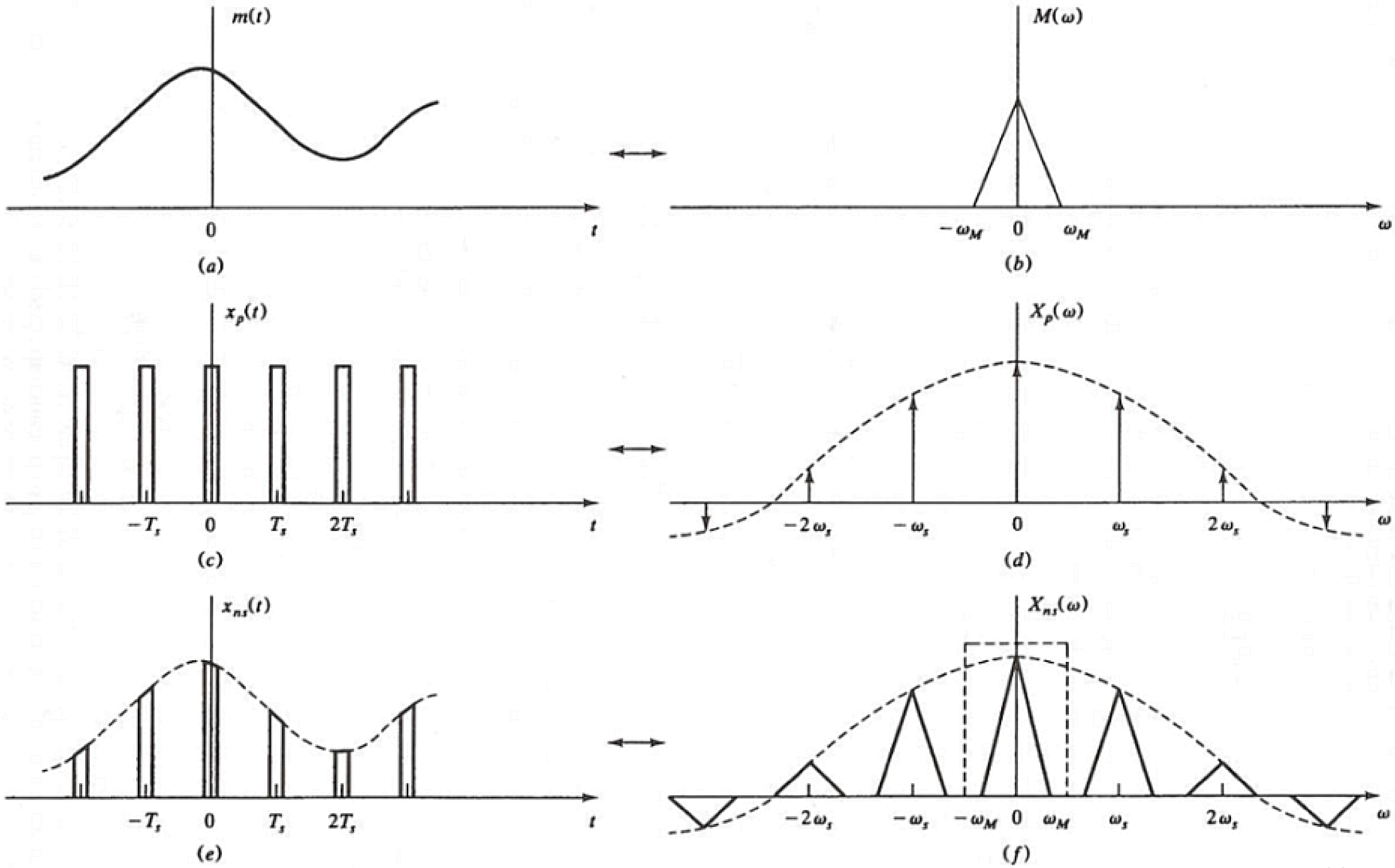
Από την ιδιότητα ολίσθησης συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$X_{ns}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, M(\omega - n\omega_s)$$

Άρα το φάσμα $X_{ns}(\omega)$ αποτελεί μία σταθμισμένη εκδοχή του φάσματος $M(\omega)$ κεντραρισμένη σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας δειγματοληψίας (βλ. επόμενη διαφάνεια).

Αν $\boldsymbol{\omega_s \geq 2\omega_m}$, τότε το $m(t)$ μπορεί να ανακτηθεί από το $x_{ns}(t)$ με φιλτράρισμα χαμηλών συχνοτήτων.

Φυσική Δειγματοληψία (Χρόνος – Συχνότητα)

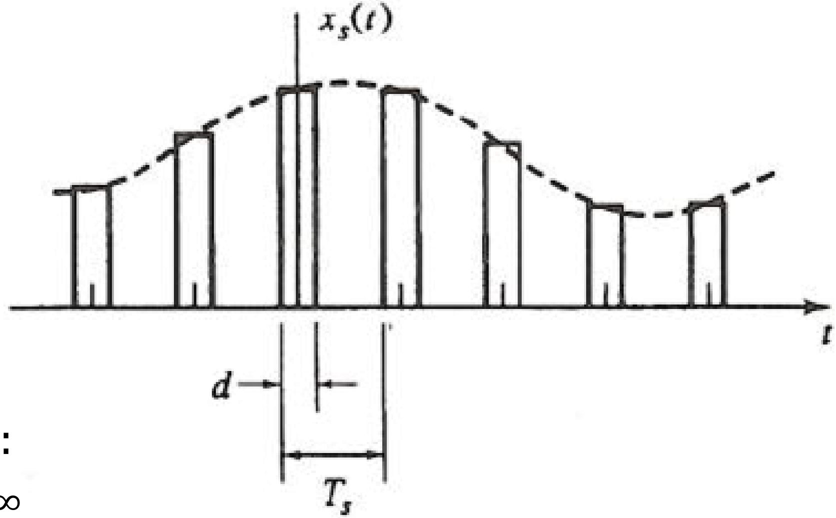


Δειγματοληψία Οριζόντιας Κορυφής

Δειγματοληψία Οριζόντιας Κορυφής

Είναι η απλούστερη και δημοφιλέστερη πρακτική μέθοδος δειγματοληψίας, που παράγει ένα δειγματολαμβανόμενο σήμα με **οριζόντια κορυφή**.

Ονομάζεται επίσης και **διαμόρφωση πλάτους παλμών** (Pulse Amplitude Modulation - PAM), επειδή τα πλάτη των ορθογωνίων παλμών μεταβάλλονται ανάλογα με τις στιγμιαίες τιμές δειγματοληψίας του αναλογικού σήματος πληροφορίας.



Το **σήμα PAM** $x_s(t)$ περιγράφεται από τη σχέση:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\, p(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\, p(t) * \delta(t - nT_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\, \delta(t - nT_s) * p(t) = \boldsymbol{m_s(t)} * \boldsymbol{p(t)}$$

όπου $m_s(t)$ είναι το ιδανικά δειγματοληπτημένο σήμα.

Δειγματοληψίας Οριζόντιας Κορυφής (Πεδίο Συχνότητας)

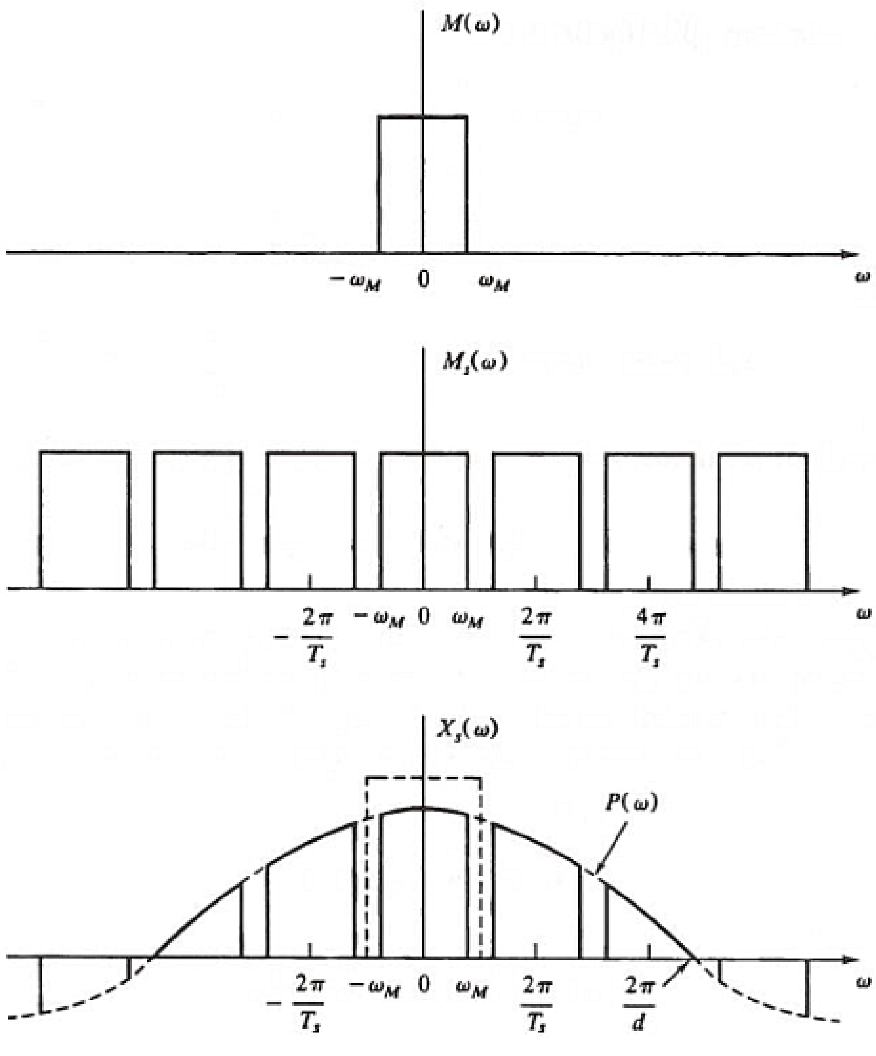
Το φάσμα του PAM σήματος $x_s(t)$ είναι:

$$X_S(\omega) = M_S(\omega)\, P(\omega) =$$
$$= \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\omega - n\omega_S)\, P(\omega)$$

Η PAM διαμόρφωση είναι ισοδύναμη με τη διέλευση ιδανικά δειγματολαμβανόμενου σήματος από φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H(\omega) = P(\omega)$.

Η χαρακτηριστική κλίσης $P(\omega)$ λειτουργεί σαν βαθυπερατό φίλτρο και **εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες του σήματος** (φαινόμενο ανοίγματος). Όσο μεγαλύτερη η διάρκεια d του παλμού, τόσο ισχυρότερο το φαινόμενο.

Το φαινόμενο ανοίγματος μπορεί να αγνοηθεί αν ισχύει $d/T_S \leq 0,1$



Άσκηση 1

Αν ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x_a(t)$ είναι ω_s, να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για το σήμα:

$$y_\alpha(t) = \frac{dx_a(t)}{dt}$$

<u>Απάντηση</u>:

Για να υπολογίσουμε τον DTFT της $y_\alpha(t)$ χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της παραγώγισης του DTFT , από την οποία προκύπτει ότι:

$$Y_a(j\omega) = j\omega\, X_a(j\omega)$$

Παρατηρούμε ότι δεν προκύπτει κάποια αλλαγή στο πεδίο της συχνότητας, επομένως και η συχνότητα Nyquist παραμένει σταθερή.

Άσκηση 2

Αν ο ρυθμός Nyquist για το σήμα $x_a(t)$ είναι ω_s, να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για το σήμα:

$$y_\alpha(t) = x_a(t)\cos(\omega_0 t)$$

<u>Απάντηση</u>:

Η δοθείσα πράξη υποδηλώνει διαμόρφωση και μάλιστα διαμόρφωση πλάτους.

Είναι γνωστό ότι κατά τη διαμόρφωση ενός σήματος $x_a(t)$ με έναν όρο $\cos(\omega_0 t)$, προκύπτει μετατόπιση του φάσματος του σήματος $x_a(t)$ κατά συχνότητα $\pm\omega_0$.

Επομένως, η συχνότητα Nyquist του $y_\alpha(t) = x_a(t)\cos(\omega_0 t)$ θα είναι $\omega_x + 2\omega_0$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist του σήματος $m(t) = 5\, cos\, 1000\pi t \;\; cos\, 4000\pi t$

<u>Απάντηση:</u>

Από την τριγωνομετρική ιδιότητα $cos\, A\,.\,cosB\, = \frac{1}{2}[cos(A+B) + cos(A-B)]$, έχουμε:

$$m(t) = \frac{5}{2}(cos(1000\pi t + 4\,000\pi t) + cos(1000\pi t\; - 4\,000\pi t))$$
$$= 2{,}5(cos\, 5000\pi t + cos\, 3000\pi t)$$

Έτσι, το $m(t)$ είναι ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα $f_{max} = 2.500\ Hz$.

Κατά συνέπεια, ο ρυθμός Nyquist είναι $2\ x\ 2.500 = 5.000\ Hz$

Το διάστημα (περίοδος) Nyquist είναι 1/5.000 sec = $0{,}2\ ms$

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για το σήμα:

$$m(t) = \frac{\sin 200\pi t}{\pi t}$$

<u>Απάντηση</u>: Από την ανάλυση κατά Fourier γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\frac{\sin at}{\pi t} \overset{\mathrm{F}}{\longleftrightarrow} P_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \alpha \\ 0 & |\omega| > \alpha \end{cases}$$

Το $m(t)$ είναι ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα $f_{max} = 100\ Hz$.

Άρα ο ρυθμός Nyquist είναι 200 Hz, και το διάστημα Nyquist είναι 1/200 sec.

Άσκηση 5

Να βρεθεί ο ρυθμός Nyquist για το σήμα:

$$m(t) = \left(\frac{\sin 200\pi t}{\pi t}\right)^2$$

<u>Απάντηση</u>: Από το θεώρημα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier:

$$x_1(t)x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\ X_1(\omega)\ X_2(\omega)$$

και σε συνδυασμό με την προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε ότι το σήμα $m(t)$ είναι και αυτό οριοθετημένης ζώνης και ότι το εύρος ζώνης του είναι διπλάσιο από αυτό του σήματος της προηγούμενης άσκησης, δηλ. είναι 200 Hz.

Έτσι, ο ρυθμός Nyquist είναι 400 Hz, και το διάστημα Nyquist είναι 1/400 sec.

Άσκηση 6

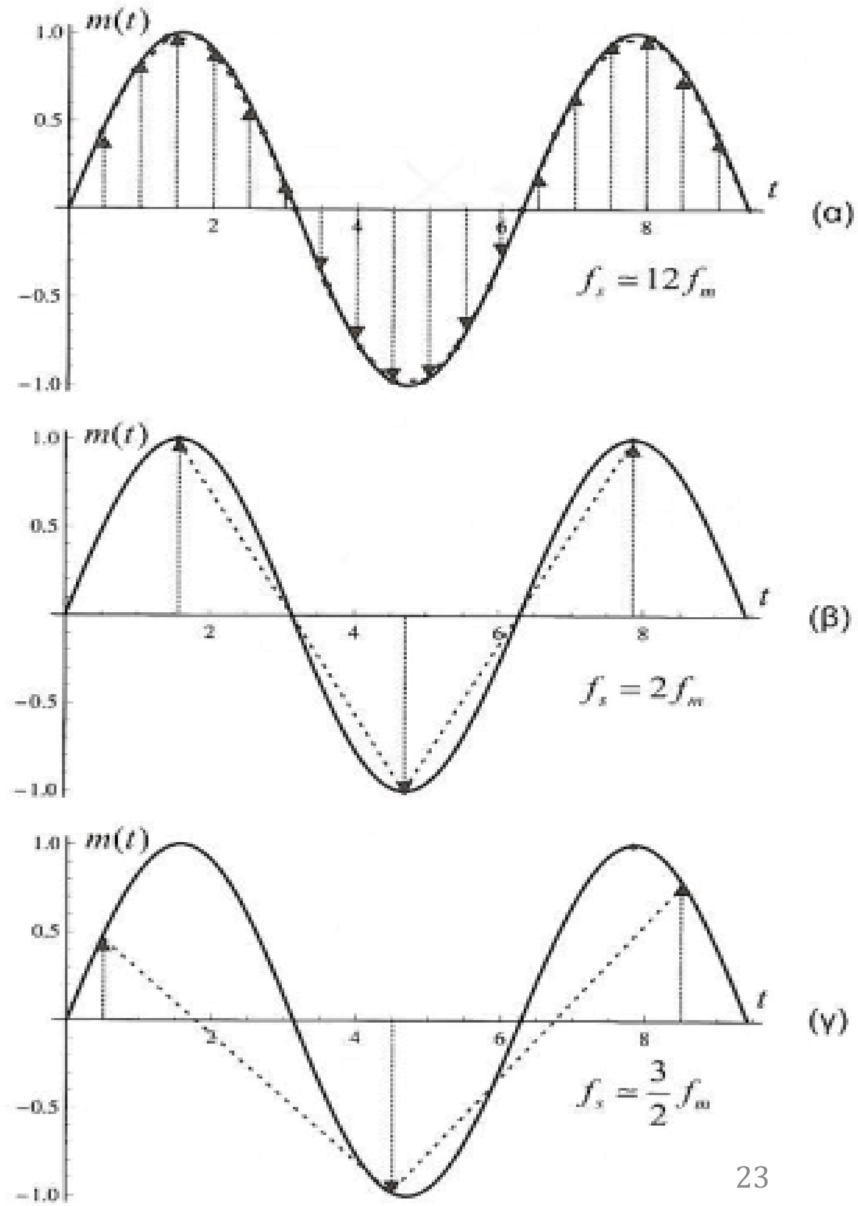
Ένα ημιτονοειδές σήμα $m(t)$ με συχνότητα f_m δειγματοληπτείται με συχνότητα:

(α) $f_s = 12 f_m$

(β) $f_s = 2 f_m$

(γ) $f_s = \frac{3}{2} f_m$

Να σχολιάσετε τις περιπτώσεις που ικανοποιείται ή όχι η συνθήκη Nyquist.



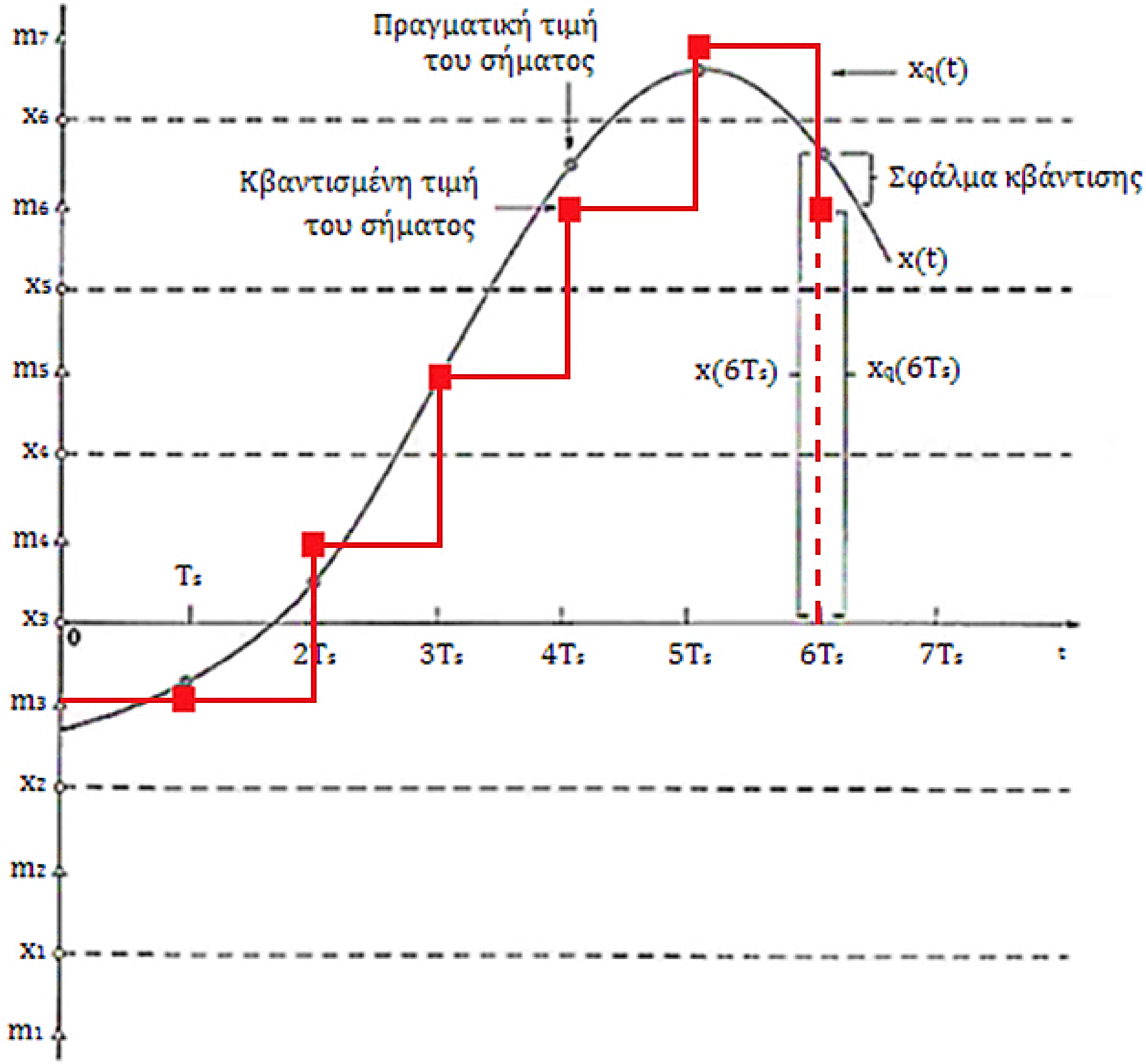
Κβαντισμός

Κβαντισμός

Κβαντισμός είναι μία μη-γραμμική και μη-αντιστρέψιμη διαδικασία, η οποία μετασχηματίζει μία ακολουθία εισόδου $x(n)$ συνεχούς πλάτους για την οποία ισχύει $x(n) \in (-m_p, m_p)$, σε ακολουθία **διακριτού πλάτους** $m(n) = Q[x(n)]$.

- **L επίπεδα απόφασης (ζώνες)** $x_1, x_2 \ldots, x_L$ διαιρούν την περιοχή τιμών πλάτους της $x(t)$ σε L διαστήματα $I_k = [x_k, x_{k+1}], \quad k = 1,2, \ldots, L$.
- Για μία είσοδο $x(t)$ που κείται μέσα στο I_k, εκχωρείται μία στάθμη $m(k) \in I_k$.
- Το πλάτος του σήματος (δυναμική περιοχή) δίνεται από τη σχέση: $|x_{max}(n)| = 2\, m_p$

Ομοιόμορφος Κβαντισμός



Παράμετροι Κβαντισμού

- **Πλήθος επιπέδων**: $L = 2^B$ όπου B το μήκος (σε bits) κάθε **στάθμης** $m(n)$
- **Βήμα κβαντισμού**: $\Delta = x_{k+1} - x_k$
  Για ισαπέχουσες στάθμες (ομοιόμορφη κβάντιση), ισχύει: $\Delta = |x_{max}(n)|/\ 2^B$
- **Σφάλμα κβαντισμού**: $e(n) = m(n) - x(n)$ και ισχύει $-\frac{\Delta}{2} < e(n) < \frac{\Delta}{2}$
- **Μέσο τετραγωνικό σφάλμα κβαντισμού ή ισχύς θορύβου κβαντισμού** :

$$\mathrm{E}[(x(n) - m(n))^2] = {\sigma_e}^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

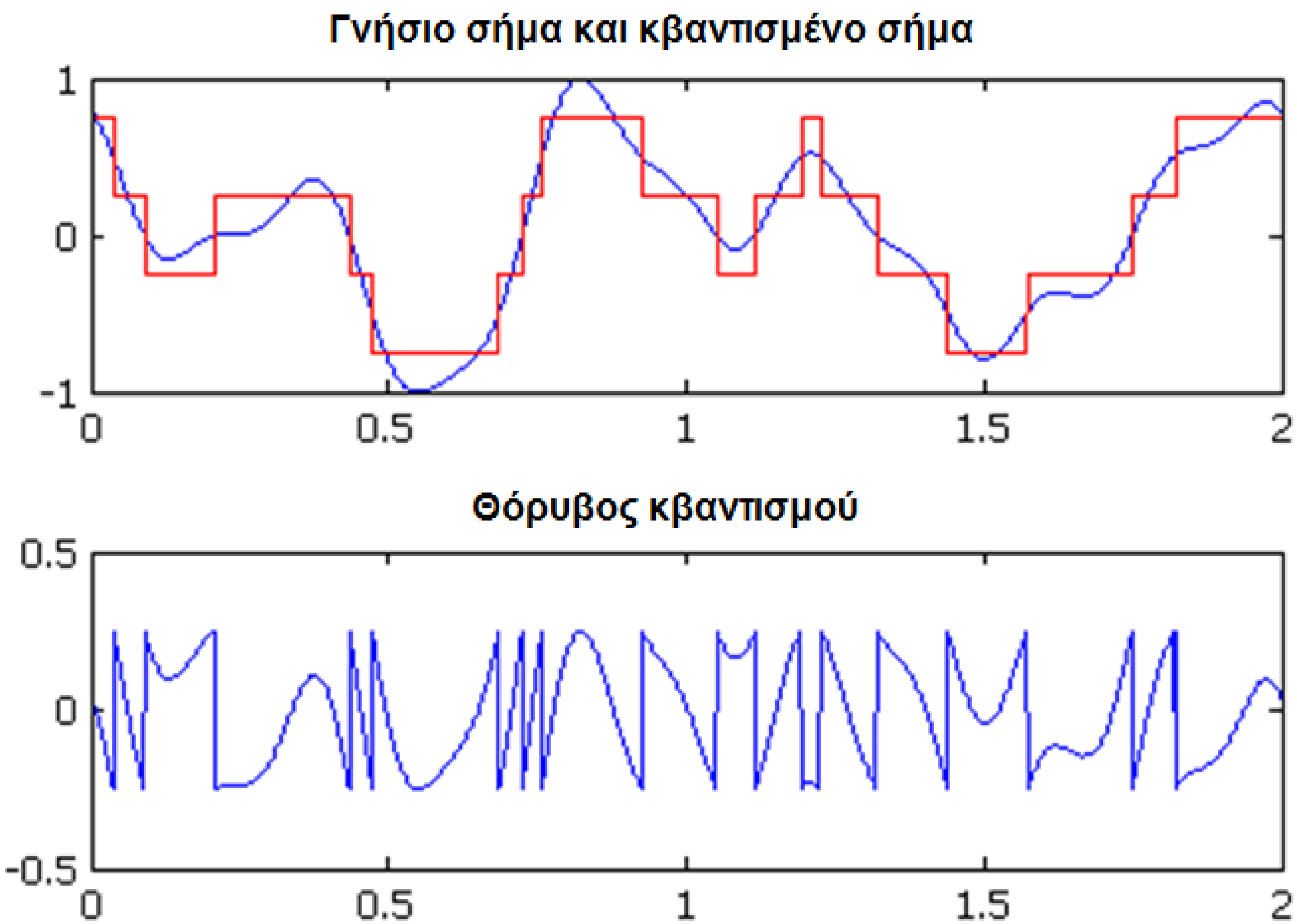
Επίσης ισχύει: ${\sigma_e}^2 = \mathrm{m_p^2}/3L^2$

- **Λόγος σήματος προς θόρυβο** (σε dB) Signal to Noise Ratio (SNR):

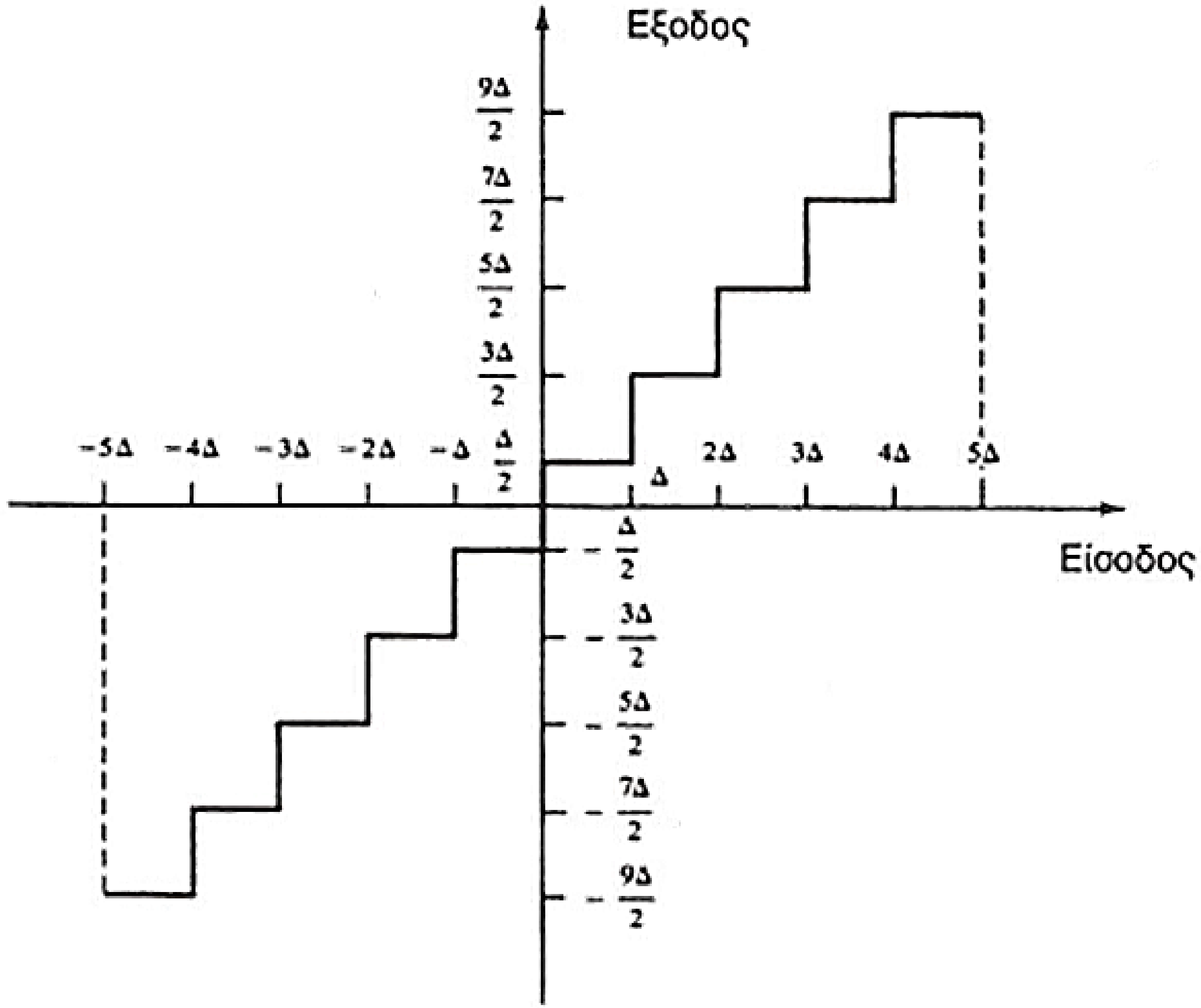
$$SNR = 10log\frac{{\sigma_x}^2}{{\sigma_e}^2} = 6{,}02\ B + 10{,}81 - 20\ log\frac{|x_{max}(n)|}{\sigma_x}$$

- Επομένως ο SNR αυξάνεται (βελτιώνεται) κατά **~6dB** για **κάθε επιπλέον bit** που προστίθεται στην περιγραφή της τιμής της στάθμης.

Ομοιόμορφος Κβαντισμός



Ομοιόμορφος Κβαντισμός

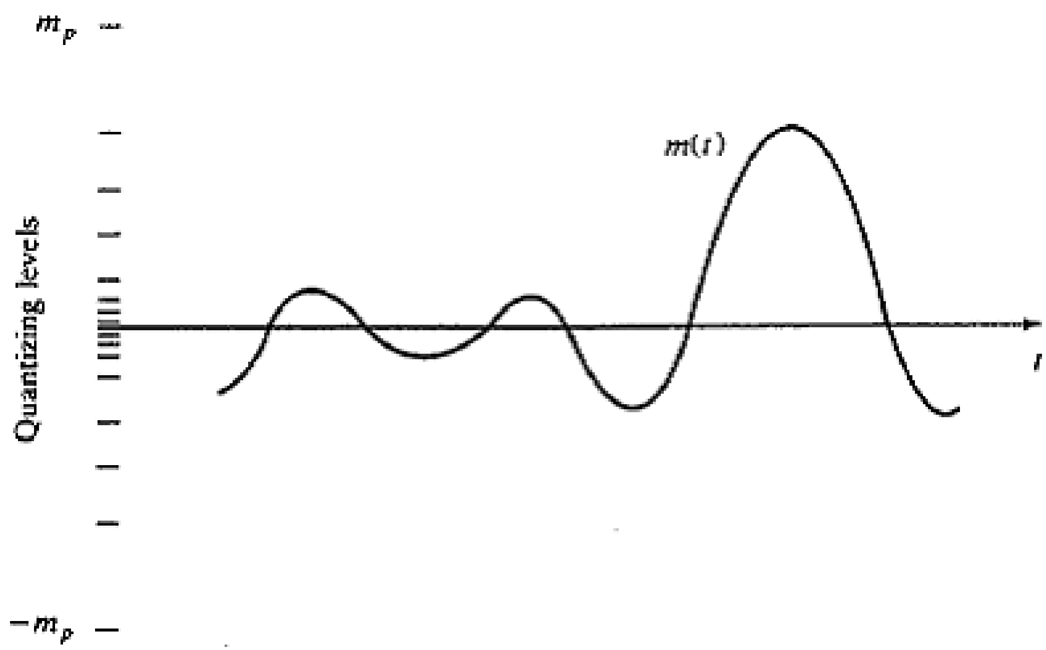


Χαρακτηριστική εισόδου – εξόδου ομοιόμορφου κβαντιστή

Ανομοιόμορφος Κβαντισμός

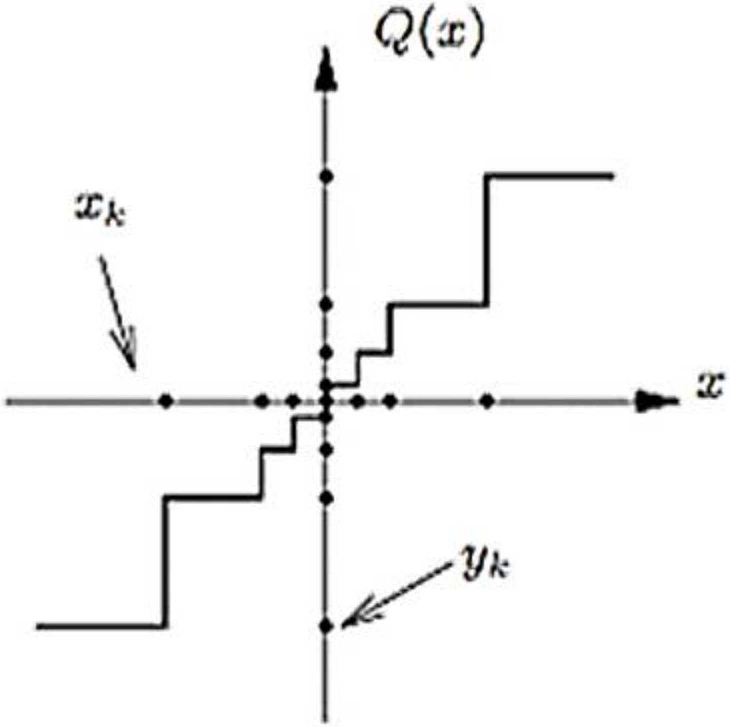
Η ομοιόμορφη κβάντιση είναι **ακατάλληλη** στην επικοινωνία φωνής, επειδή στη φωνή τα μικρά πλάτη είναι περισσότερα και τα μεγάλα πλάτη είναι σχετικά σπάνια.

Η **ανομοιόμορφη κβάντιση** χρησιμοποιεί μικρά βήματα κβαντισμού για μικρά πλάτη σήματος και μεγάλα βήματα κβαντισμού για μεγάλα πλάτη σήματος.

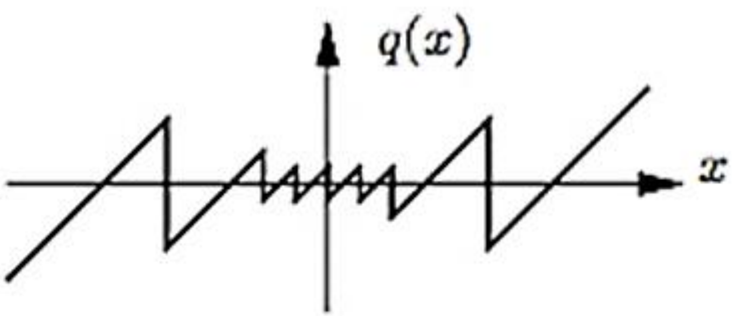


Μπορούμε να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν πρώτα **συμπιέσουμε** τα δείγματα του σήματος και έπειτα χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφη κβάντιση.

Ανομοιόμορφος Κβαντισμός



Χαρακτηριστική εισόδου – εξόδου ανομοιόμορφου κβαντιστή



Θόρυβος κβαντισμού ανομοιόμορφου κβαντιστή

Πρότυπα Ανομοιόμορφου Κβαντισμού

- Οι αλγόριθμοι συμπίεσης (compading algorithms) μειώνουν τη δυναμική περιοχή ενός σήματος και ως εκ' τούτου και το σφάλμα (θόρυβο) κβαντισμού.

- Ο δέκτης χρησιμοποιεί μία αντίστροφη διαδικασία (διαστολή - expanding) για να αποκαταστήσει τα δείγματα του σήματος στη σωστή σχετική τους στάθμη.

- Συμπίεση **κανόνα «μ»** (ΗΠΑ, Ιαπωνία) μ-law:

$$y = \frac{\ln(1 + \mu \left|m/m_p\right|)}{\ln(1 + \mu)} sgn(m) \quad \text{όταν} \quad \left|\frac{m}{m_p}\right| \leq 1$$

όπου $\mu > 0$ και $sgn()$ είναι η συνάρτηση προσήμου.

Πρότυπα Ανομοιόμορφου Κβαντισμού

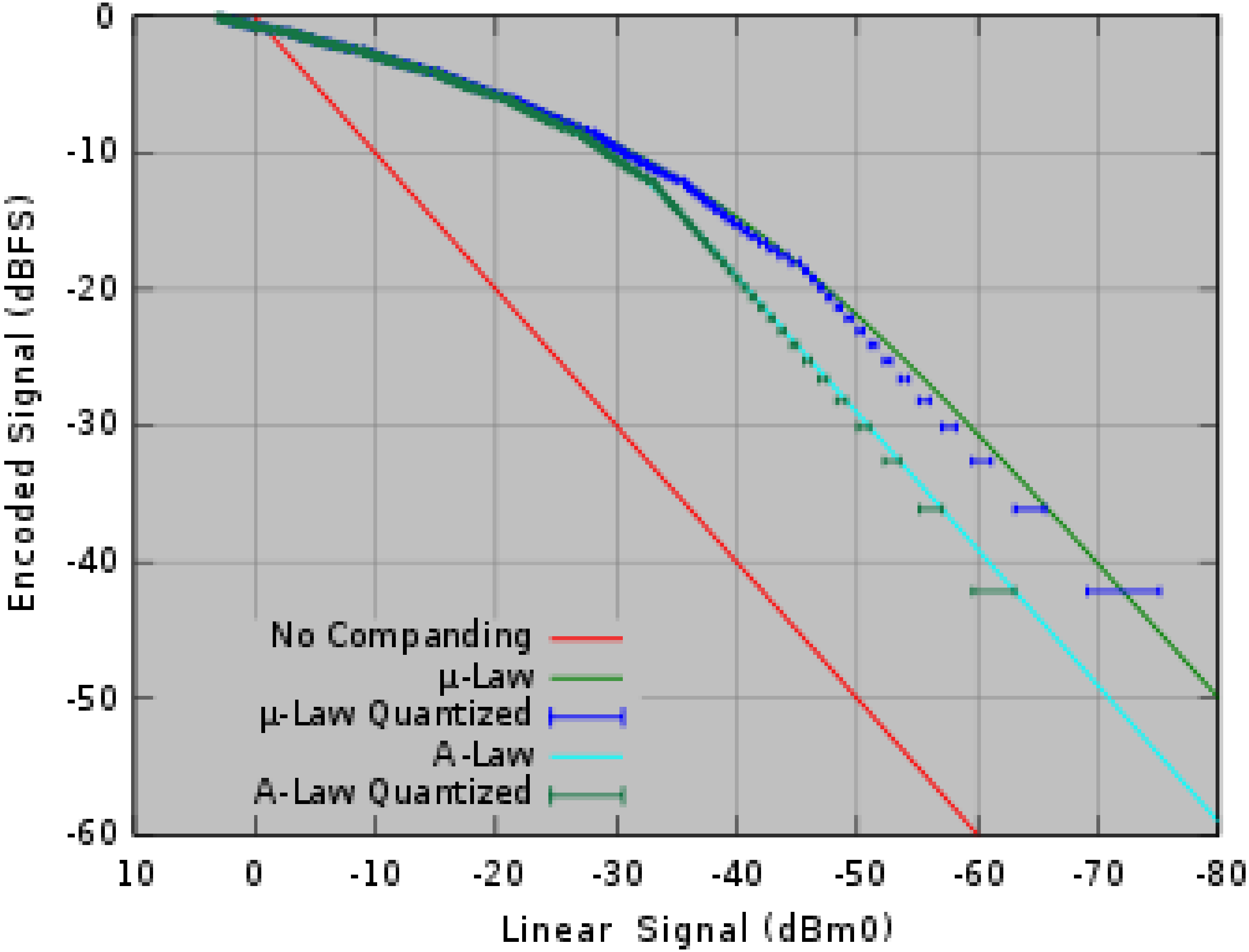
- Συμπίεση **κανόνα A** (Ευρώπη) A-law :

$$y = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{A}}{1+\ln A}\left(\dfrac{m}{m_p}\right) & \text{όταν} \quad \left|\dfrac{m}{m_p}\right| \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\left(1+\ln A\left|m/m_p\right|\right)}{(1+\ln A)} sgn(m) & \text{όταν} \ \dfrac{1}{\mathrm{A}} \leq \left|\dfrac{m}{m_p}\right| \leq 1 \end{cases}$$

- Για $\mu = 255$ και $\mathrm{A} = 87{,}6$ οι δύο κανόνες δίνουν σταθερό λόγο σήματος προς θόρυβο κβαντισμού για ισχύ σήματος εισόδου σε μία δυναμική περιοχή 40 dB.

- Η συμπίεση κανόνα-μ έχει το πλεονέκτημα ότι παρέχει μία ελαφρώς μεγαλύτερη δυναμική περιοχή από την συμπίεση κανόνα-A, και μειονέκτημα την αναλογικά χειρότερη παραμόρφωση για σήματα μικρού πλάτους.

Πρότυπα Ανομοιόμορφου Κβαντισμού



Κωδικοποίηση

Κωδικοποίηση

- Κάθε κβαντισμένη στάθμη $m(n)$ αναπαρίσταται με μία **κωδική λέξη**.
- Αν L είναι το πλήθος των σταθμών κβάντισης, τότε κάθε δείγμα περιγράφεται με $\boldsymbol{log_2 L = B}$ ψηφία (bits), όπου το B είναι ακέραιος αριθμός.
- **Ρυθμός μετάδοσης πληροφορίας**:

  $R = f_s\, log_2 L = f_s\, B$ (bits/s), όπου f_s η συχνότητα δειγματοληψίας

Κωδικοποίηση

Τα περισσότερα συστήματα ΨΕΣ χρησιμοποιούν την παράσταση αριθμών με το **συμπλήρωμα του 2** (two's complement).

Στο σύστημα αυτό, με κωδική λέξη $c = [b_0, b_1, \ldots b_B]$ μήκους B+1 bits:

- Το περισσότερο σημαντικό ψηφίο είναι το **ψηφίο προσήμου**
- Τα υπόλοιπα ψηφία αντιστοιχούν στην αριθμητική τιμή δυαδικών ακεραίων ή κλασμάτων.
- Θεωρώντας δυαδικά κλάσματα, η κωδική λέξη $b_0, b_1, b_2, \ldots b_B$ έχει την τιμή: $x = (-1)b_0 + b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + \ldots + b_B 2^{-B}$

Μετατροπή Ψηφιακού Σήματος σε Αναλογικό

Μετατροπή Ψηφιακού Σήματος σε Αναλογικό

Θεώρημα Δειγματοληψίας: Αν ένα αναλογικό σήμα δειγματολαμβάνεται με συχνότητα δειγματοληψίας $\boldsymbol{f_s \geq 2f_x}$, όπου f_x η μέγιστη συχνότητα του σήματος, τότε μπορεί να **ανακτηθεί** από τα δείγματά του, χρησιμοποιώντας τη **συνάρτηση παρεμβολής** (Interpolation function):

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi f_x t)}{2\pi f_x t}$$

Το αναλογικό σήμα δίνεται από τη σχέση:

$$x_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{f_s}\right) g\left(t - \frac{n}{f_s}\right)$$

- Η υλοποίηση της παραπάνω σχέσης απαιτεί πολύ υλικό.
- Συνήθως χρησιμοποιούνται εναλλακτικές συναρτήσεις, αλλά τότε απαιτείται και αναλογικό φίλτρο.