Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

Ενότητα 10: Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)
- Ιδιότητες DFT
- Κυκλική Συνέλιξη έναντι Γραμμικής

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform-DFT), χρησιμοποιείται για ακολουθίες πεπερασμένου μήκους $x(n), n = 0,1, \dots N-1$.

- **Ευθύς DFT**

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, {W_N}^{nk}, \qquad 0 \le k < N-1$$

- **Αντίστροφος DFT**

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, {W_N}^{-nk}$$

όπου $W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}}$

<u>Διαφορές DTFT και DFT:</u>

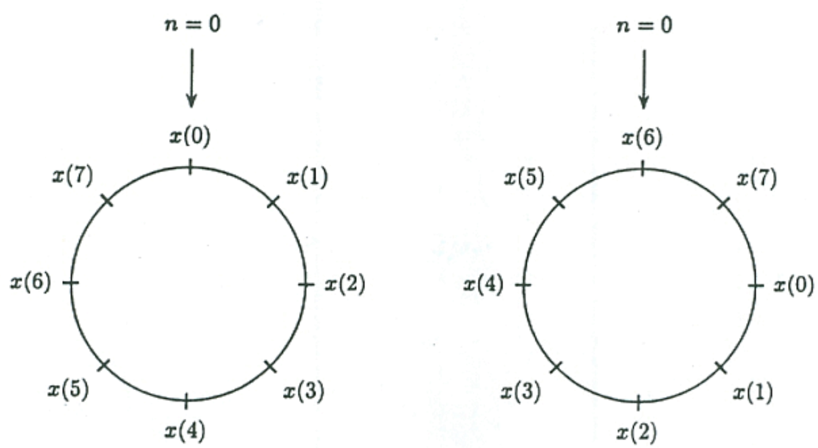
- **DTFT** : $x(n) \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$ Συνεχής συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής ω.
- **DFT** : $x(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X(k)$ Διακριτή ακολουθία που αντιστοιχεί στα δείγματα του DTFT.

Ιδιότητες DFT

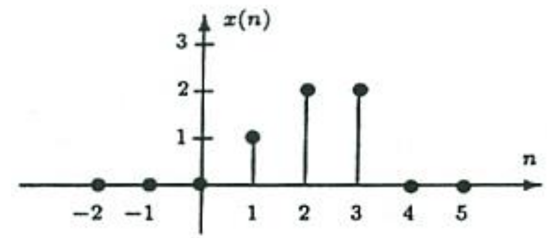
Γραμμικότητα $\alpha x_1(n) + bx_2(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} aX_1(k) + bX_2(k)$

Κυκλική μετατόπιση $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n})$ $x\big((n-n_0)\big)_N R_N(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} {W_N}^{n_0 k} X(k)$

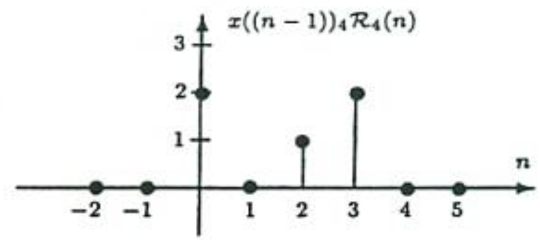
το ορθογώνιο παράθυρο $R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n < N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ εξάγει μία περίοδο του σήματος



(α) Μια ακολουθία οκτώ σημείων. (β) Κυκλική μετατόπιση κατά δύο.



(α) Ένα σήμα διακριτού χρόνου μήκους N=4.



(β) Κυκλική μετατόπιση κατά ένα.

Κυκλική μετατόπιση DFT ${W_N}^{nk_o} x(n) \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} X((k+k_0))$

Ιδιότητες DFT

Κυκλική Συνέλιξη

- $h(n), x(n)$ ακολουθίες μήκους N, με DFT $H(k), X(k)$
- $\tilde{h}(k), \tilde{x}(k)$ περιοδικές επεκτάσεις των $h(n), x(n)$
- Ισχύει $\tilde{h}(k) = h(n)$ για $0 \leq n < N$

Αν $Y(k) = H(k)\, X(k)$, τότε η ακολουθία $y(n)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(n) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}(k)\tilde{x}(n-k)\right] R_N(n) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{h}(n-k)\tilde{x}(k)\right] R_N(n) \Rightarrow$$

$$y(n) = h(n) \otimes x(n) = x(n) \otimes h(n)$$

Όπου ο τελεστής $\otimes$ υποδηλώνει την πράξη της κυκλικής συνέλιξης.

Κυκλική Συνέλιξη έναντι Γραμμικής

Αν $x(n), h(n)$ ακολουθίες πεπερασμένου μήκους, τότε:

- **Γραμμική συνέλιξη** : $y(n) = x(n) * h(n)$
- **Κυκλική συνέλιξη**: $h(n) \otimes x(n) = [\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(n + kN)] R_N(n)$

Επομένως, η κυκλική συνέλιξη δύο ακολουθιών υπολογίζεται από την γραμμική, στο αποτέλεσμα της οποίας πραγματοποιείται επικάλυψη (aliasing).

- Αν το μήκος της ακολουθίας $y(n)$ είναι N ή μικρότερο, τότε $y(n - kN) R_N(n) = 0$ για $\mathrm{k} \neq 0$, δηλ. **η κυκλική συνέλιξη ισοδυναμεί με την γραμμική.**
- Ακολουθίες $x(n)$ μήκους N_1 - $h(n)$ μήκους N_2, τότε η $y(n) = x(n) * h(n)$ έχει μήκος $N_1 + N_2 - 1$
- **Κυκλική συνέλιξη $\boldsymbol{h(n) \otimes x(n)}$ $\boldsymbol{N}$ σημείων ισοδυναμεί με την γραμμική αν ισχύει $\boldsymbol{N \geq N_1 + N_2 - 1}$**

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο DFT 4-σημείων της ακολουθίας:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

Απάντηση:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n)\ {W_N}^{nk} = 1 + 2\,{W_4}^{2k} + {W_4}^{3k}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων της ακολουθίας $x(n) = 4 + cos^2\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
$n = 0,1, \dots, N-1$

<u>Απάντηση</u>

$$x(n) = 4 + \frac{1}{4}\left[e^{-\frac{j2\pi n}{N}} + e^{-\frac{j2\pi n}{N}}\right]^2 = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\frac{j4\pi n}{N}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{j4\pi n}{N}} =$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{4}e^{\frac{j2\pi}{N}(2n)} + \frac{1}{4}e^{\frac{j2\pi}{N}(N-2)n}$$

Επομένως

$$X(k) = \begin{cases} \frac{9}{2}N, & k = 0 \\ \frac{1}{4}N, & k = 2 \text{ και } k = N-2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός DFT N-σημείων, του σήματος:

$$x_1(n) = \delta(n)$$

<u>**Απάντηση**</u>: Ο μετασχηματισμός DFT της μοναδιαίας διακριτής ώσης μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τον ορισμό του μετασχηματισμού DFT:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{nk} = 1 \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

Μια άλλη πιθανή προσέγγιση, θα ήταν να θυμηθούμε ότι ο DFT αντιστοιχεί στα δείγματα του μετασχηματισμού Z, $X_1(z)$, που λαμβάνονται σε N ισαπέχοντα σημεία γύρω από το μοναδιαίο κύκλο. Επειδή είναι $X_1(z) = 1$, έπεται ότι είναι και $X_1(k) = 1$.

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός DFT N-σημείων, του σήματος:

$$x_2(n) = \delta(n - n_0), \quad \text{όπου } 0 < n_0 < N$$

<u>Απάντηση</u>: Μπορούμε και πάλι να υπολογίσουμε το DFT από τον ορισμό του. Αντί αυτού όμως, ας κάνουμε δειγματοληψία στο μετασχηματισμό Ζ.

Γνωρίζουμε ότι είναι $X_2(z) = z^{-n_0}$.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας δειγματοληψία στην $X_2(z)$, στα σημεία $z = W_N^{-k}$ για $k = 0,1, \dots, N-1$, βρίσκουμε:

$$X_2(k) = W_N^{n_0 k} \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός DFT N-σημείων, του σήματος:

$$x_3(n) = \alpha^n \qquad 0 \le n < N$$

<u>**Απάντηση**</u>: Ο DFT μπορεί να υπολογιστεί απευθείας ως εξής:

$$X_3(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_3(n) W_N^{nk} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\alpha W_N^k\right)^n =$$

$$= \frac{1-\left(\alpha W_N^k\right)^N}{1-\alpha W_N^k} \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός DFT N-σημείων, του σήματος:

$$x_4(n) = u(n) - u(n - n_0), \quad \text{όπου } 0 < n_0 < N$$

<u>**Απάντηση**</u>: Ο μετασχηματισμός DFT του παλμού $x_4(n) = u(n) - u(n - n_0)$, υπολογίζεται ως εξής:

$$X_4(k) = \sum_{n=0}^{n_0-1} W_N^{nk} = \frac{1 - W_N^{kn_0}}{1 - W_N^{k}}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον μιγαδικό εκθετικό όρο $W_N^{kn_0/2}$ από τον αριθμητή, και τον $W_N^{k/2}$ από τον παρονομαστή, ο DFT μπορεί να γραφεί:

$$X_4(k) = W_N^{k(n_0-1)/2} \frac{W_N^{-kn_0/2} - W_N^{kn_0/2}}{W_N^{-k/2} - W_N^{k/2}} =$$

$$= e^{-j\frac{2\pi k}{N}\left(\frac{n_0-1}{2}\right)} \frac{sin(n_0 \pi k/N)}{sin(\pi k/N)} \qquad k = 0,1, \dots, N-1$$

Άσκηση 7

Να βρεθεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier 10-σημείων της ακολουθίας πεπερασμένου μήκους:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$$

<u>Απάντηση</u>:

Εύκολα φαίνεται ότι, ο DFT της $x(n)$ είναι:

$$X(k) = 1 + 2W_N^{5k}$$

$$= 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{10}5\kappa}$$

$$= 1 + 2(-1)^k$$

Άσκηση 8

Να βρεθεί η ακολουθία που έχει διακριτό μετασχηματισμό Fourier

$$Y(k) = e^{j2k\frac{2\pi}{10}}X(k)$$

όπου $X(k) = 1 + 2(-1)^k$ (10-σημείων)

<u>Απάντηση</u>:

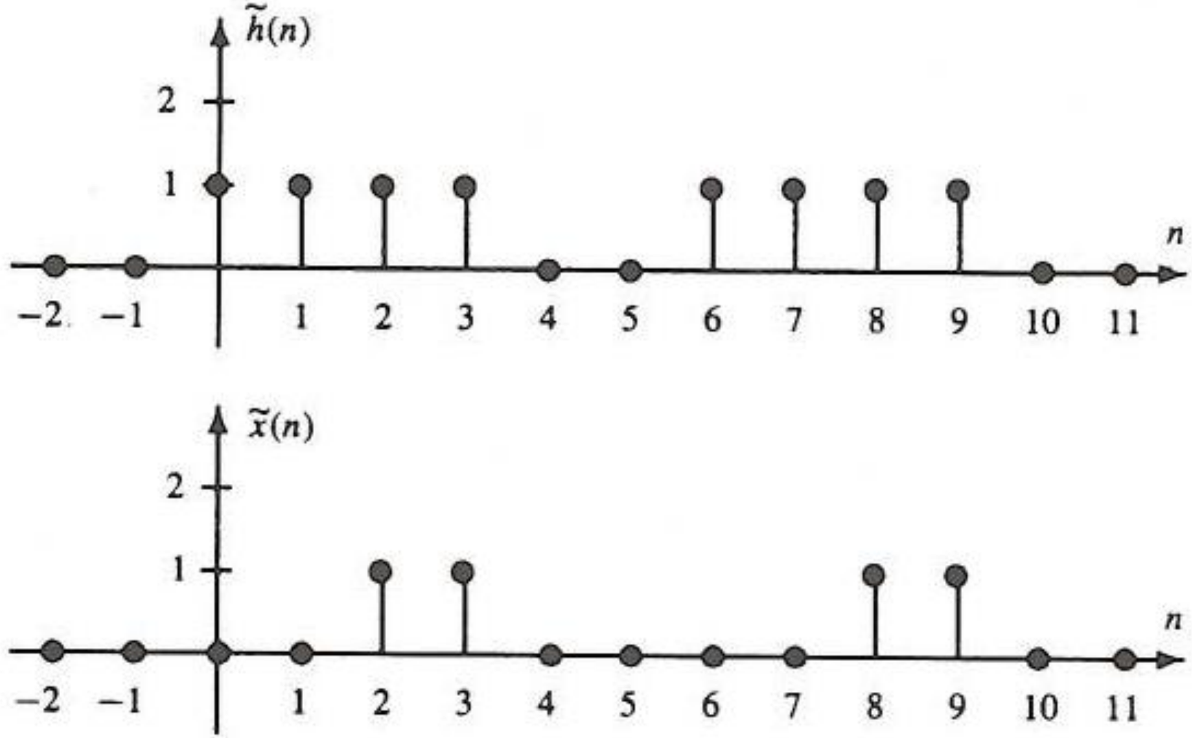
Πολλαπλασιάζοντας τη $X(k)$ με τον μιγαδικό εκθετικό όρο $W_N^{kn_0}$, εκτελείται ισοδύναμα μια κυκλική μετατόπιση της $x(n)$ κατά n_0.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, επειδή είναι $n_0 = -2$, η $x(n)$ μετατοπίζεται κυκλικά προς τα αριστερά κατά 2, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{y(n)} = \mathrm{x}\big((\mathrm{n}+2)\big)_{10} = 2\delta(\mathrm{n}-3) + \delta(\mathrm{n}-8)$$

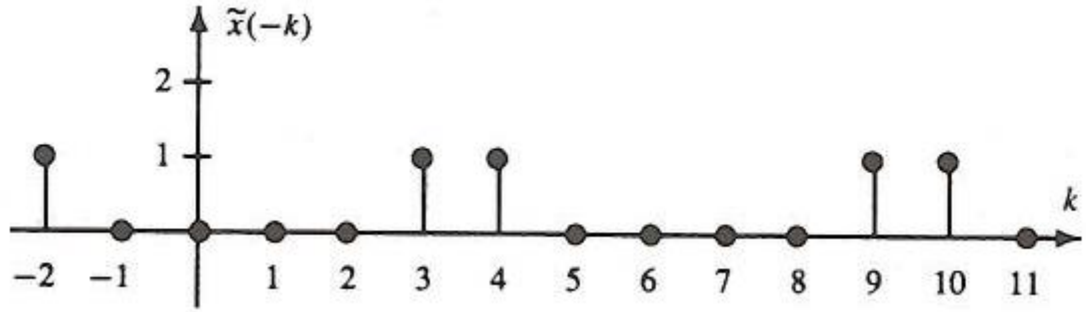
Άσκηση 9

Να υπολογιστεί η περιοδική συνέλιξη των ακολουθιών (έχουν περίοδο $N = 6$).

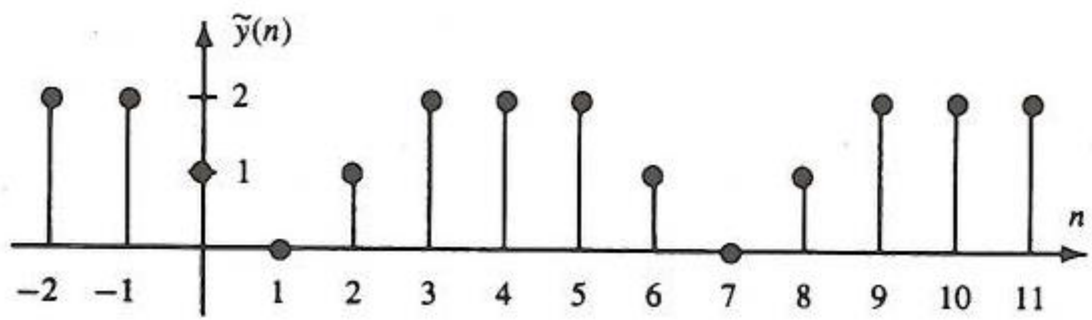


Απάντηση: Χρησιμοποιούμε τη γραφική μέθοδο. Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $\tilde{x}(n-k)$ συναρτήσει του k. Για $n = 0$ έχουμε:

Άσκηση 9(συνέχεια)

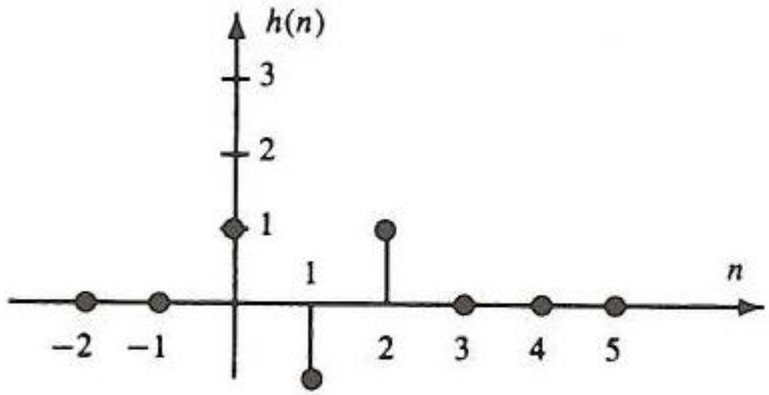


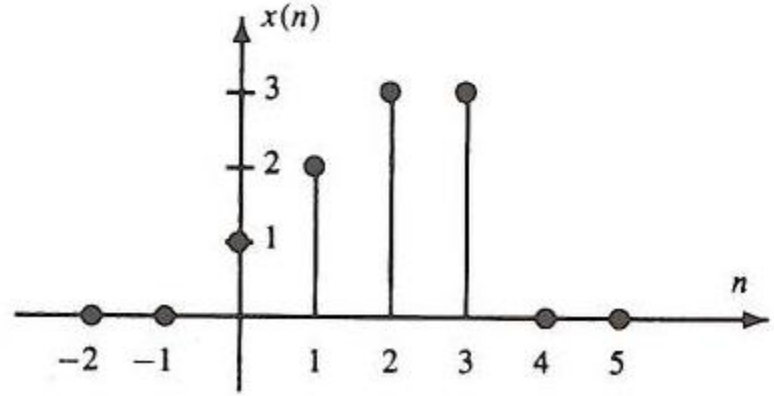
Το $\tilde{y}(0) = 1$ βρίσκεται αθροίζοντας τα γινόμενα $\tilde{h}(k)\tilde{x}(-k)$ από $k = 0$ μέχρι $k = 5$. Στη συνέχεια, η $\tilde{x}(-k)$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά ένα και πολλαπλασιάζεται με την $\tilde{h}(k)$. Επειδή οι μόνες δύο μη μηδενικές τιμές της $\tilde{x}(1-k)$ είναι για $n = 4$ και 5, το γινόμενο $\tilde{h}(k)\tilde{x}(1-k)$ είναι ίσο με το μηδέν και $\tilde{y}(1) = 0$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να λάβουμε ολόκληρη τη περίοδο της $\tilde{y}(n)$. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Άσκηση 10

Να εκτελεστεί η κυκλική συνέλιξη τεσσάρων σημείων, των ακολουθιών $h(n)$ και $x(n)$ που φαίνονται παρακάτω.





<u>**Απάντηση**</u>: Η κυκλική συνέλιξη τεσσάρων σημείων είναι:

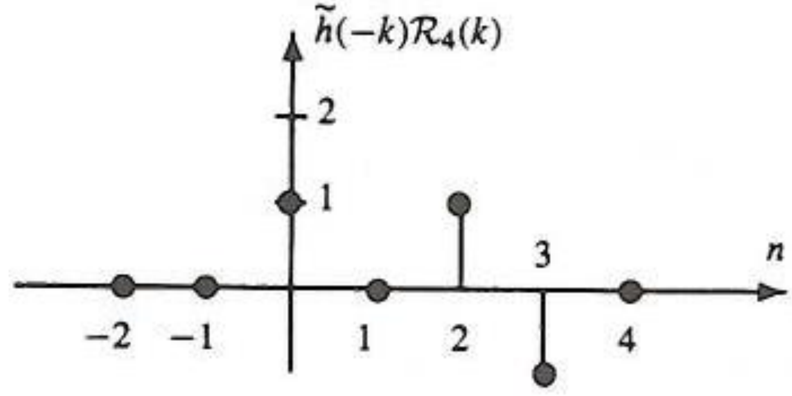
$$y(n) = \left[\sum_{k=0}^{3} \tilde{h}(n-k)\,\tilde{x}(k)\right] R_4(n)$$

και μπορεί να υπολογιστεί γραφικά. Για $n = 0$ είναι:

$$y(0) = \sum_{k=0}^{3} \tilde{h}(-k)\,\tilde{x}(k)$$

Άσκηση 10 (συνέχεια)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το γράφημα της ακολουθίας $\tilde{h}(-k)R_4(k)$.



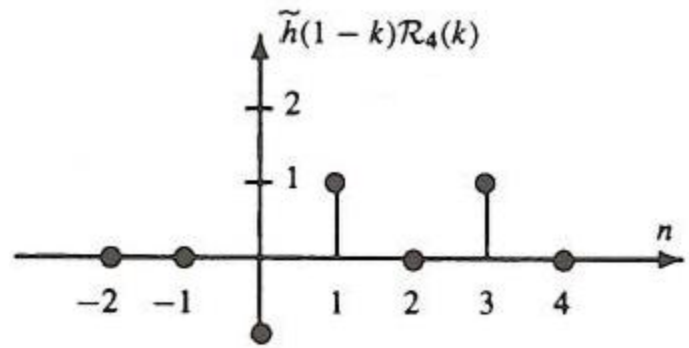
Για να βρούμε την τιμή $y(0)$, πολλαπλασιάζουμε την ακολουθία αυτή με την $x(k)$ και αθροίζουμε τα γινόμενα από $k = 0$ μέχρι $k = 3$. Βρίσκουμε $y(0) = 1$.

Στη συνέχεια, για να βρούμε τη τιμή $y(1)$, υπολογίζουμε το άθροισμα:

$$y(1) = \sum_{k=0}^{3} \tilde{h}(1-k)\,\tilde{x}(k)$$

Άσκηση 10 (συνέχεια)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το γράφημα της ακολουθίας $\tilde{h}(1-k)R_4(k)$.



Πολλαπλασιάζοντας με την $\tilde{x}(k)$ και αθροίζοντας από $k=0$ μέχρι $k=3$, βρίσκουμε $y(1)=4$.

Επαναλαμβάνουμε για $n=2$ και $n=3$ και έχουμε:

$$y(2)=\sum_{k=0}^{3}\tilde{h}(2-k)\,\tilde{x}(k)=2$$

$$y(3)=\sum_{k=0}^{3}\tilde{h}(3-k)\,\tilde{x}(k)=3$$

Άσκηση 10 (συνέχεια)

Επομένως είναι:

$$y(n) = h(n) \circledast x(n) = \delta(n) + 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3)$$

Κατόπιν σύγκρισης, η γραμμική συνέλιξη μεταξύ των $h(n)$ και $x(n)$, είναι η παρακάτω ακολουθία έξι σημείων:

$$h(n) * x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-5)$$