Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

## Ενότητα 11: Εφαρμογές DFT – Ταχύς Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

# Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

- Υπολογισμός Γραμμικής Συνέλιξης με DFT
  - Μέθοδος Επικάλυψης – Πρόσθεσης (overlap-add)
  - Μέθοδος Επικάλυψης – Κράτησης (overlap-save)
- Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

# Υπολογισμός Γραμμικής Συνέλιξης με DFT

**Χρήση DFT** για υπολογισμό συνέλιξης $y(n) = x(n) * h(n)$ όταν οι ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$ έχουν μήκος $N_1$ και $N_2$, αντίστοιχα.

Βήματα:

1. Προσθέτουμε μηδενικά στις ακολουθίες $x(n)$ και $h(n)$, έτσι ώστε να έχουν το ίδιο μήκος $N \geq N_1 + N_2 - 1$.
2. Υπολογίζουμε τους DFT N-σημείων $X(k)$ και $H(k)$ των $x(n)$ και $h(n)$.
3. Πολλαπλασιάζουμε τους DFT και βρίσκουμε $Y(k) = X(k)\, H(k)$.
4. Υπολογίζοντας τον αντίστροφο DFT της $Y(k)$, προκύπτει η συνέλιξη $y(n)$.

- Όταν το μήκος $N_1$ του $x(n)$ είναι **πολύ μεγάλο**, τότε το $x(n)$ διαμοιράζεται σε **τμήματα**.
- Κάθε τμήμα **φιλτράρεται** με ένα φίλτρο FIR με απόκριση $h(n)$.
- Τα φιλτραρισμένα τμήματα **συνδυάζονται** ώστε να προκύψει η $y(n)$.

Τεχνικές τμηματικής εκτέλεσης (block convolution) της συνέλιξης

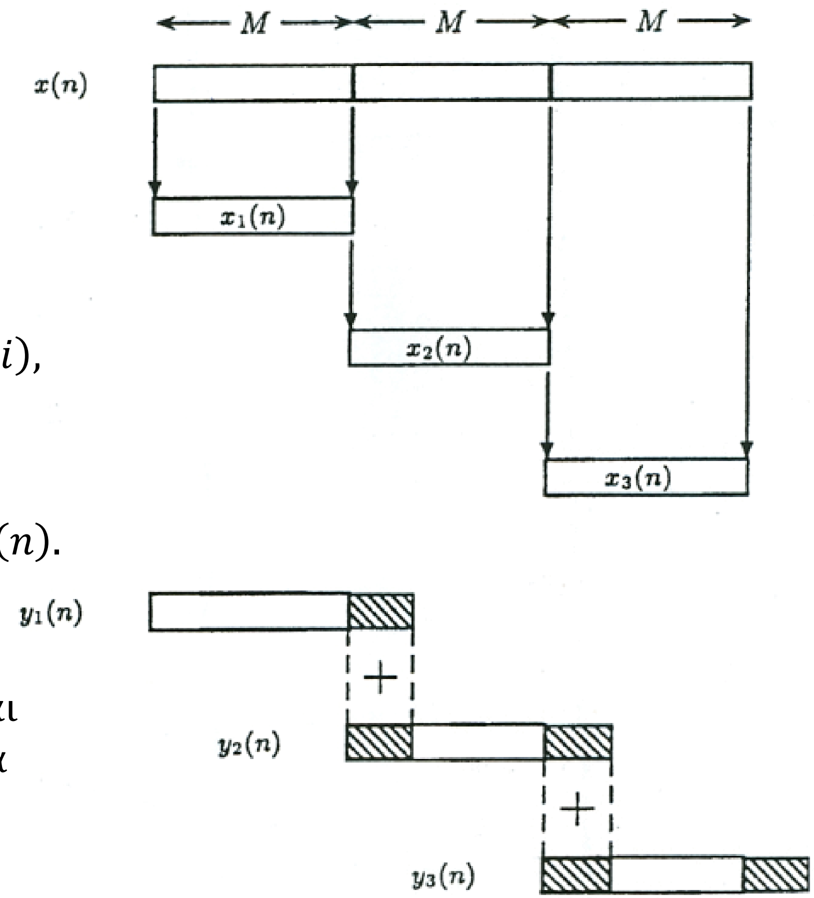
- Επικάλυψης – πρόσθεσης (overlap-add)
- Επικάλυψης – κράτησης (overlap-save)

# Μέθοδος Επικάλυψης – Πρόσθεσης (overlap-add)

$h(n)$ κρουστική απόκριση μήκους L ενός FIR φίλτρου και $x(n)$ ακολουθία εισόδου μήκους μεγαλύτερου του L. Η έξοδος του φίλτρου είναι $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x(n-k)$.

Διαιρούμε την $x(n)$ σε **μη-επικαλυπτόμενες υπο-ακολουθίες** μήκους M. δηλ:

$$x_i(n) = \begin{cases} x(n+Mi) & n = 0,1,\ldots,M-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$




- Η έξοδος $y(n)$ του φίλτρου είναι:
  $y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n-Mi) * h(n) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(n-Mi)$,
  όπου $\boldsymbol{y_i(n) = x_i(n) * h(n)}$
- Κάθε ακολουθία $y_i(n)$ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί με DFT N-σημείων των $x_i(n)$ και $h(n)$.
- Μήκος ακολουθίας $y_i(n)$: N=L+M-1
- Οι ακολουθίες $y_i(n)$ και $y_{i+1}(n)$ επικαλύπτονται σε (N-M) σημεία και τα επικαλυπτόμενα σημεία **προστίθενται**.

# Μέθοδος Επικάλυψης – Κράτησης (overlap-save)

1. Έστω $x_1(n) = \begin{cases} 0 & 0 \le n < L-1 \\ x(n-L+1) & L-1 \le n \le N-1 \end{cases}$

2. Υπολογίζουμε την κυκλική συνέλιξη N-σημείων μεταξύ $x_1(n)$ και $h(n)$και σχηματίζουμε το γινόμενο $Y_1(k) = X_1(k)H(k)$.

3. Με αντίστροφο DFT N-σημείων λαμβάνουμε το $y_1(n)$. Οι πρώτες L-1 τιμές της κυκλικής συνέλιξης επικαλύπτονται, και οι M=N-L+1 τελευταίες τιμές αντιστοιχούν στη γραμμική συνέλιξη $x_1(n) * h(n)$.

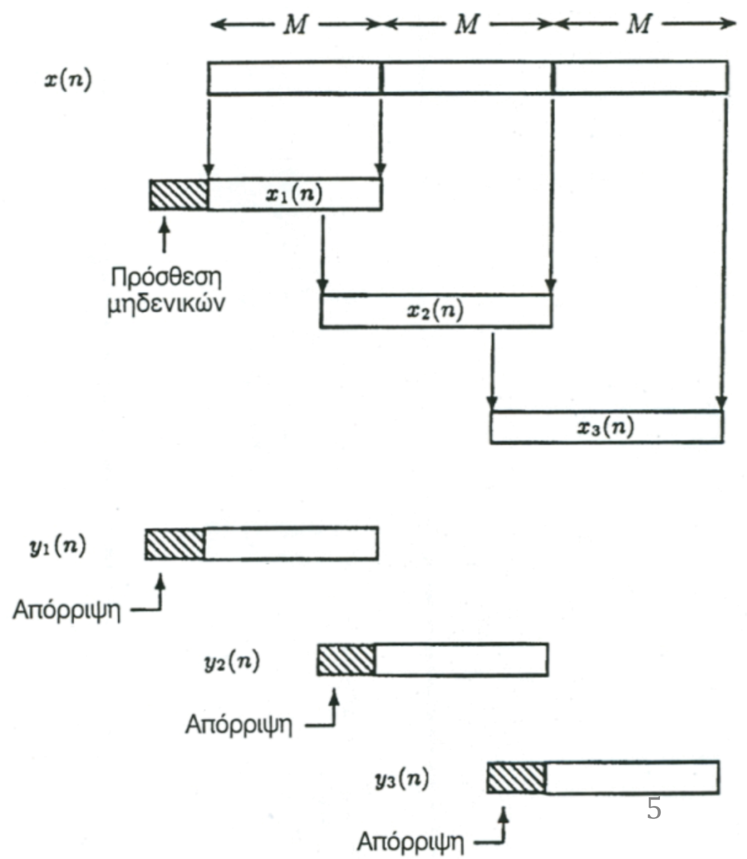
4. Οι τελευταίες N-L+1 τιμές της $y_1(n)$ είναι οι πρώτες N-L+1 τιμές της $y(n)$, δηλ. $y(n) = y_1(n+L-1), 0 \le n < L-1$

5. Έστω $x_2(n)$ ακολουθία N-σημείων που εξάγεται από την $x(n)$ με τις L-1 πρώτες τιμές της να επικαλύπτονται με εκείνες της $x_1(n)$.

6. Εκτελούμε τα βήματα 2 και 3 και λαμβάνουμε την $y_2(n)$.

7. Οι πρώτες L-1 τιμές της $y_2(n)$ απορρίπτονται και οι τελευταίες N-L+1 κρατούνται και συγκεντρώνονται με τις τιμές της $y_1(n)$που έχουν κρατηθεί, δηλ.: $y(n+N-L+1) = y_2(n+L-1), \quad 0 \le n < L-1$

8. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 5, 6, 7 μέχρι να υπολογιστούν όλες οι τιμές της γραμμικής συνέλιξης.



# Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT)

Ο DFT N-σημείων, μίας ακολουθίας $x(n)$ N-σημείων, είναι:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, {W_N}^{nk}$$

Υπολογιστικό κόστος DFT N-σημείων: $\boldsymbol{N^2}$ μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις

**Στρατηγική FFT**: Ανάλυση του DFT N-σημείων σε διαδοχικά **μικρότερους** μετασχηματισμούς.

- Αν N άρτιο, τότε η $x(n)$ μπορεί να διαιρεθεί σε δύο ακολουθίες μήκους $\mathrm{N}/2$, οι DFT των οποίων απαιτούν $(\frac{N}{2})^2$ πράξεις ο καθένας, άρα συνολικά $(\frac{N}{2})^2 + (\frac{N}{2})^2 = \boldsymbol{\frac{N^2}{2}}$.
- Αν N δύναμη του 2 (radix-2), τότε πλήθος πράξεων $\boldsymbol{\frac{N}{2} \log N}$

**Διαθέσιμες Τεχνικές FFT**

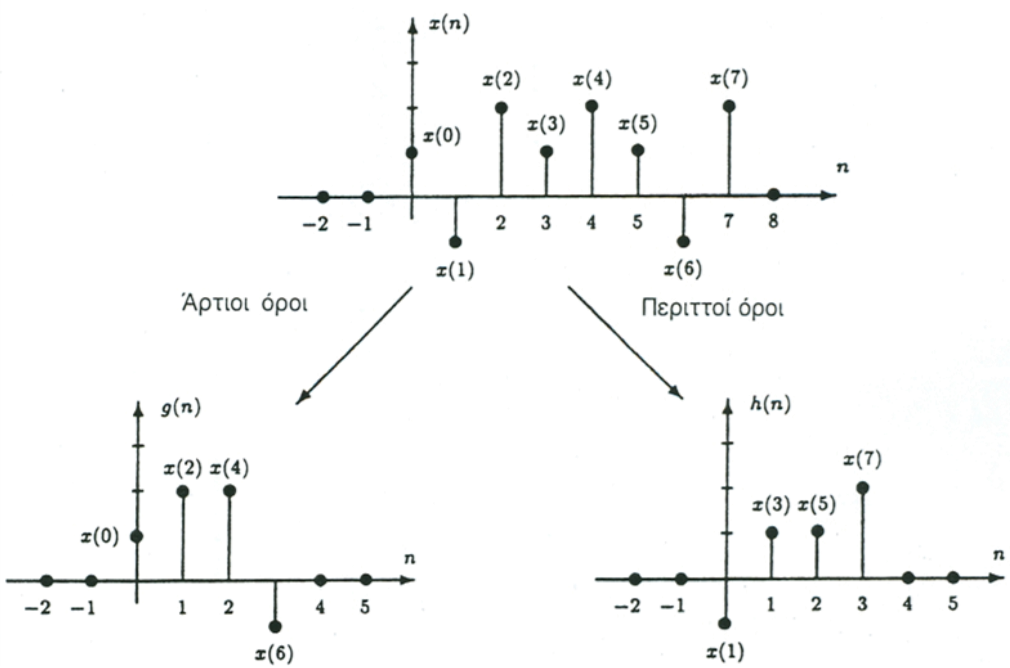
- Διαίρεση στο Χρόνο (Decimation in Time)
- Διαίρεση στη Συχνότητα (Decimation in Frequency)

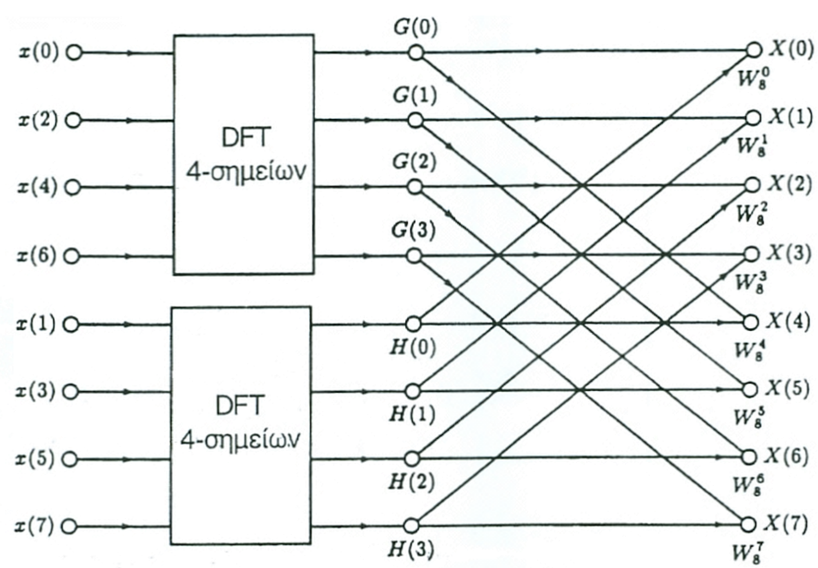
# Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στο Χρόνο

Μία $x(n)$ ακολουθία μήκους $\mathrm{N} = 2^{\nu}$ υποδιαιρείται σε $g(n) = x(2n)$ και $h(n) = x(2n+1)$, $n = 0,1, \dots \frac{N}{2} - 1$.

$$\text{DFT:} \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, {W_N}^{nk} = \cdots = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} g(l)\, {W_{\frac{N}{2}}}^{lk} + {W_N}^{k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} h(l)\, {W_{\frac{N}{2}}}^{lk}$$

- Επομένως $\boldsymbol{X(k) = G(k) + {W_N}^{k} H(k)}$, $k = 0,1, \dots, N-1$, δηλ. ο DFT N-σημείων της $x(n)$ ισούται με το άθροισμα των DFT N/2 σημείων των $g(n)$ και $h(n)$.
- Οι μιγαδικοί όροι ${W_N}^{k}$ ονομάζονται **παράγοντες αναδιάταξης**.



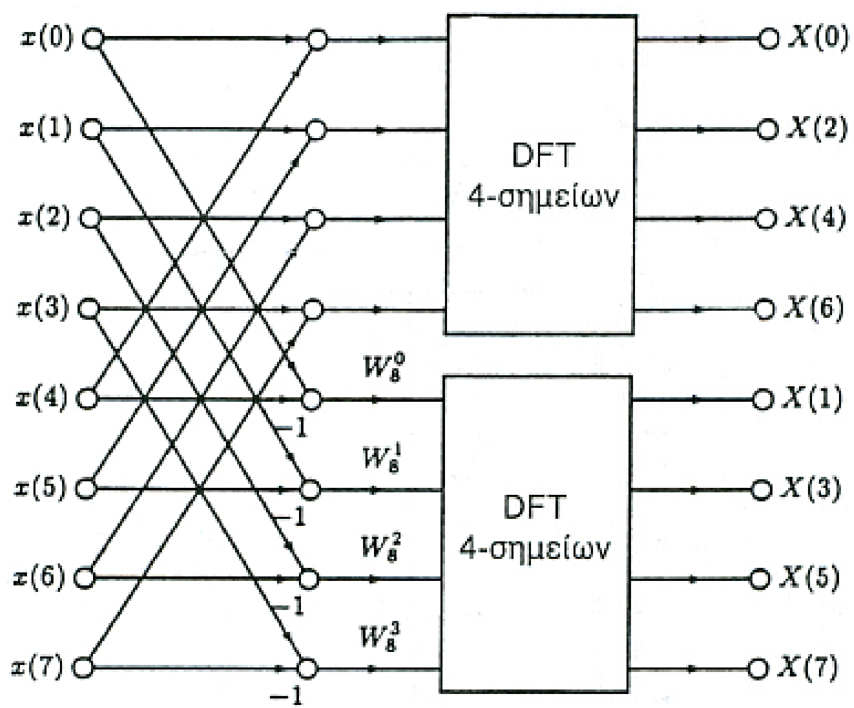



# Αλγόριθμος FFT Διαίρεσης στη Συχνότητα

Για μία $x(n)$ ακολουθία μήκους $\mathrm{N} = 2^{\nu}$ και DFT N-σημείων, αποδεικνύεται ότι:

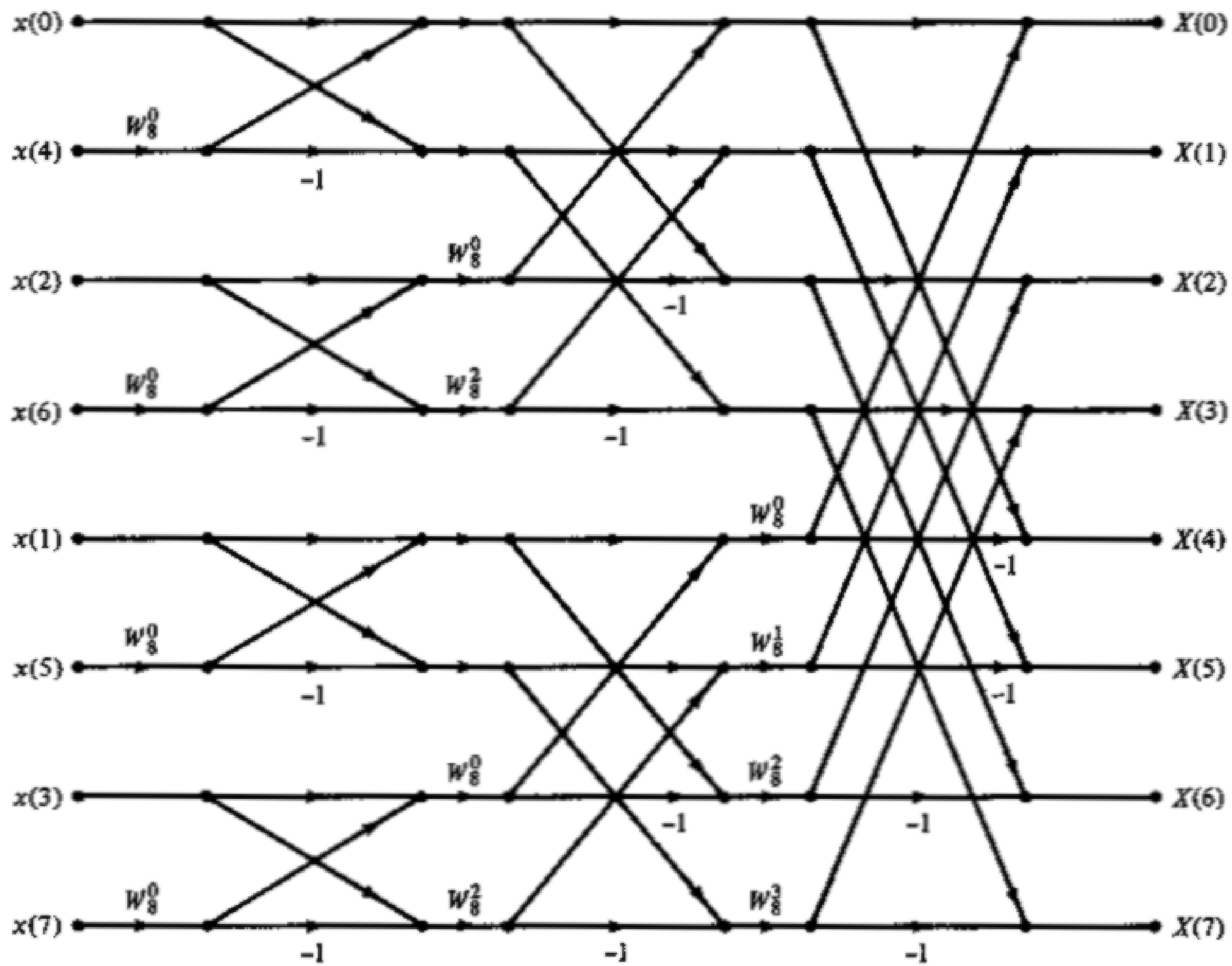
- **Άρτια δείγματα DFT** $\quad X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(n) + x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] {W_{\frac{N}{2}}}^{nk}$

- **Περιττά δείγματα DFT** $\quad X(2k+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} {W_N}^{n} \left[x(n) - x\left(n+\frac{N}{2}\right)\right] {W_{\frac{N}{2}}}^{nk}$



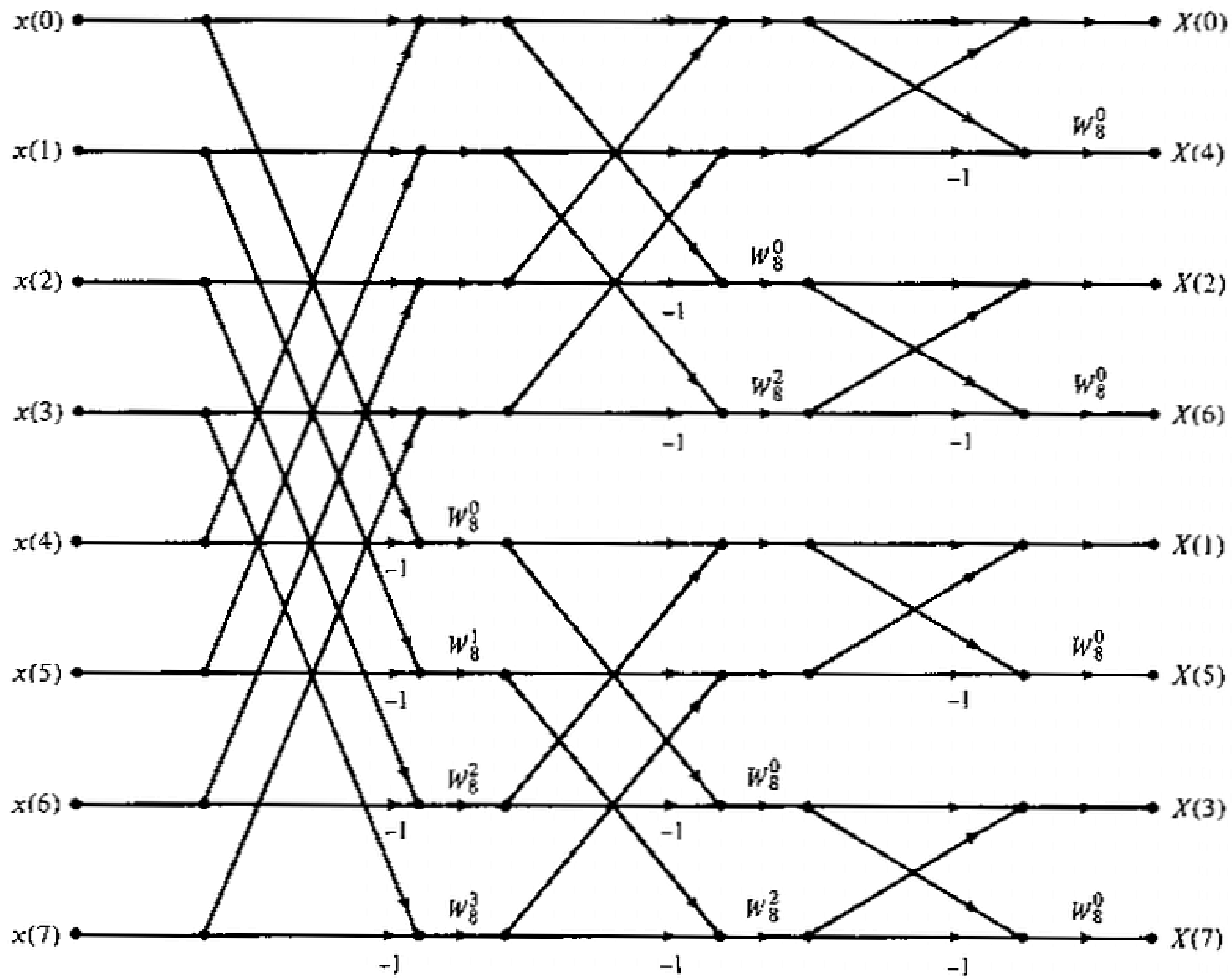
# Πλήρεις Αλγόριθμοι FFT με Βάση το 2

Πλήρης αλγόριθμος FFT διαίρεσης στο χρόνο, 8 σημείων με βάση το 2



# Πλήρεις Αλγόριθμοι FFT με Βάση το 2

Πλήρης αλγόριθμος FFT διαίρεσης στη συχνότητα, 8 σημείων με βάση το 2



# Άσκηση 1

Έστω ότι για έναν πολλαπλασιασμό απαιτείται χρόνος 1 μs και ότι ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης του DFT προσδιορίζεται από το χρόνο υπολογισμού όλων των πολλαπλασιασμών.

(α) Πόσος χρόνος θα απαιτηθεί για τον απευθείας υπολογισμό ενός DFT 1024 σημείων;

(β) Πόσος χρόνος θα απαιτηθεί αν χρησιμοποιήσουμε αλγόριθμό FFT;

(γ) Ομοίως τα (α) και (β) για DFT 4096-σημείων

<u>Απάντηση</u>

(α) Πλήθος μιγαδικών πολλαπλασιασμών: $N^2$

Χρόνος DFT-1024 σημείων $t_{DFT} = 1024^2 . 10^{-6}\,\text{sec} \approx 1.05\, sec$

(β) Πλήθος μιγαδικών πολλαπλασιασμών για radix-2 FFT: $\frac{N}{2}\log N$

Χρόνος FFT-1024 σημείων $t_{FFT} = 5120\,.\,10^{-6}\,\text{sec} = 5{,}12\, ms$

(γ) $t_{DFT} = 4096^2 . 10^{-6}\,\text{sec} = 16.78\, sec$

$t_{FFT} = \frac{4096}{2}\log(4096) . 10^{-6}\,\text{sec} = 24.576\,.\,10^{-6} sec = 24{,}576\, ms$