Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα Ι

Διάλεξη 7: Διαμόρφωση Γωνίας (1/2)

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ατζέντα

- Διαμόρφωση γωνίας – Ορισμοί
- Η έννοια της Στιγμιαίας Συχνότητας
- Διαμόρφωση Φάσης (Phase Modulation - PM)
- Διαμόρφωση Συχνότητας (Frequency Modulation - FM)
- Διαμόρφωση Γωνίας Στενής Ζώνης
- Ημιτονοειδής Διαμόρφωση (Διαμόρφωση Απλού Τόνου)

Διαμόρφωση Γωνίας

Η έννοια της Στιγμιαίας Συχνότητας

Διαμόρφωση Φάσης (PM)

Διαμόρφωση Συχνότητας (FM)

Εισαγωγή στις Διαμορφώσεις Γωνίας

Διαμορφωμένη φέρουσα:

$$x_c(t) = A\,cos[\omega_c t + \varphi(t)] \qquad A \text{ και } \omega_c\text{: σταθερές}$$

Η γωνία φάσης $\varphi(t)$ είναι συνάρτηση του σήματος πληροφορίας $m(t)$.

Θέτοντας $\theta(t) = \omega_c t + \varphi(t)$, ορίζουμε τη **στιγμιαία ακτινική συχνότητα** της $x_c(t)$ ως:

$$\omega_i = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Όταν $\varphi(t) = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\alpha$, τότε $\omega_i = \omega_c$

Για το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα $x_c(t)$, ορίζουμε τα ακόλουθα μεγέθη:

- $\varphi(t)$ **Στιγμιαία απόκλιση φάσης**
- $d\varphi(t)/dt$ **Στιγμιαία απόκλιση συχνότητας**
- $\Delta_\omega = |\omega_i - \omega_c|_{max}$ **Μέγιστη απόκλιση συχνότητας**

Ορισμός Διαμόρφωσης Φάσης

- Διαμόρφωση Φάσης (Phase Modulation – PM)

Η στιγμιαία απόκλιση φάσης είναι ανάλογη με το πληροφοριακό σήμα:

$$\varphi(t) = k_p\, m(t)$$

k_p : σταθερά απόκλισης φάσης

Διαμορφωμένο PM σήμα:

$$x_{PM}(t) = A\, cos\left[\omega_c t + k_p\, m(t)\right]$$

Στιγμιαία ακτινική συχνότητα:

$$\omega_i = \omega_c + k_p \frac{dm(t)}{dt}$$

Η ω_i μεταβάλλεται γραμμικά με την παράγωγο του πληροφοριακού σήματος.

Ορισμός Διαμόρφωσης Συχνότητας

- **Διαμόρφωση συχνότητας (Frequency Modulation – FM)**

Η στιγμιαία απόκλιση συχνότητας είναι ανάλογη με το πληροφοριακό σήμα:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = k_f \; m(t) \quad \text{ή} \quad \varphi(t) = k_f \int_{t_o}^{t} m(\lambda) d\lambda + \varphi(t_0)$$

k_f: σταθερά απόκλισης συχνότητας (θεωρούμε $t_0 = -\infty$ και $\varphi(-\infty) = 0$).

Διαμορφωμένο FM σήμα:

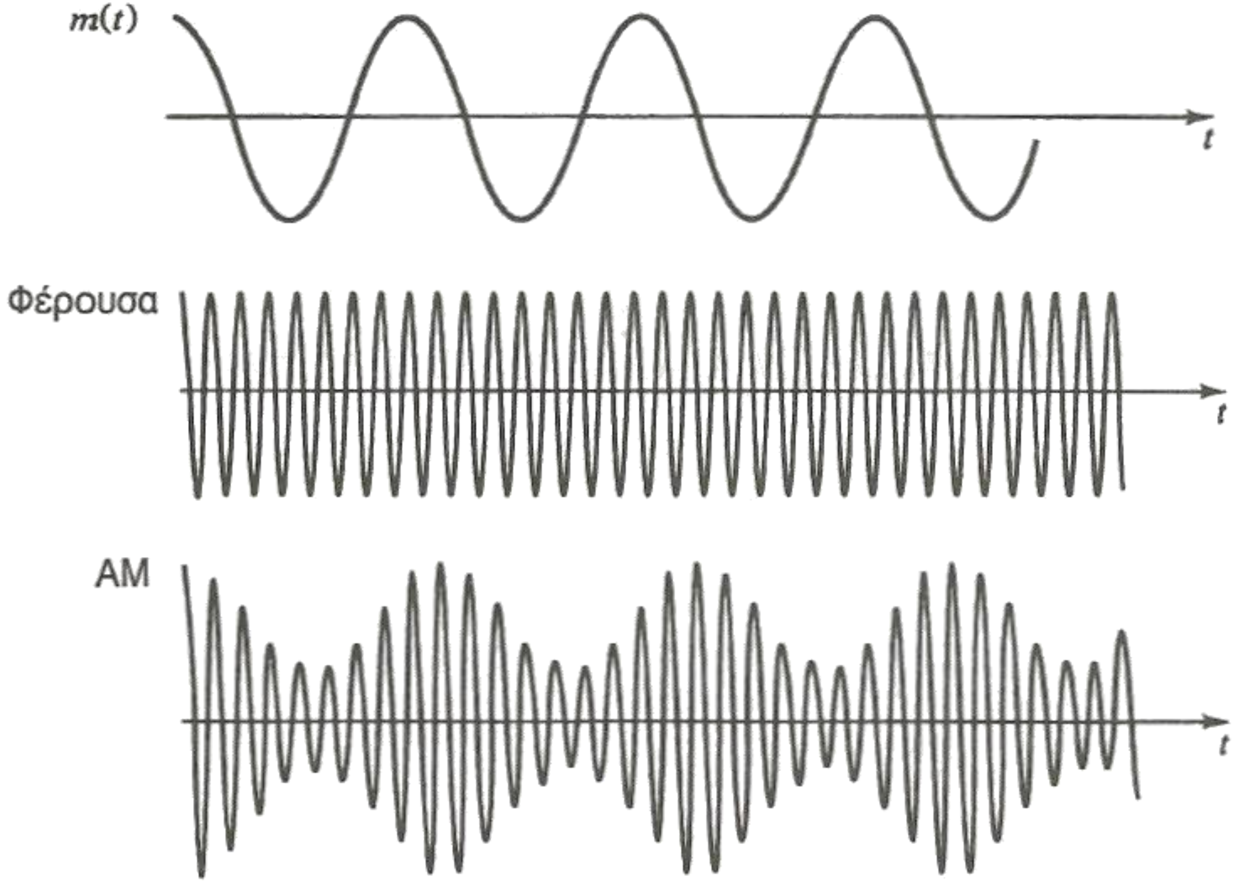
$$x_{FM}(t) = A\, cos \left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda\right]$$

Στιγμιαία ακτινική συχνότητα:

$$\omega_i = \omega_c + k_f\, m(t)$$

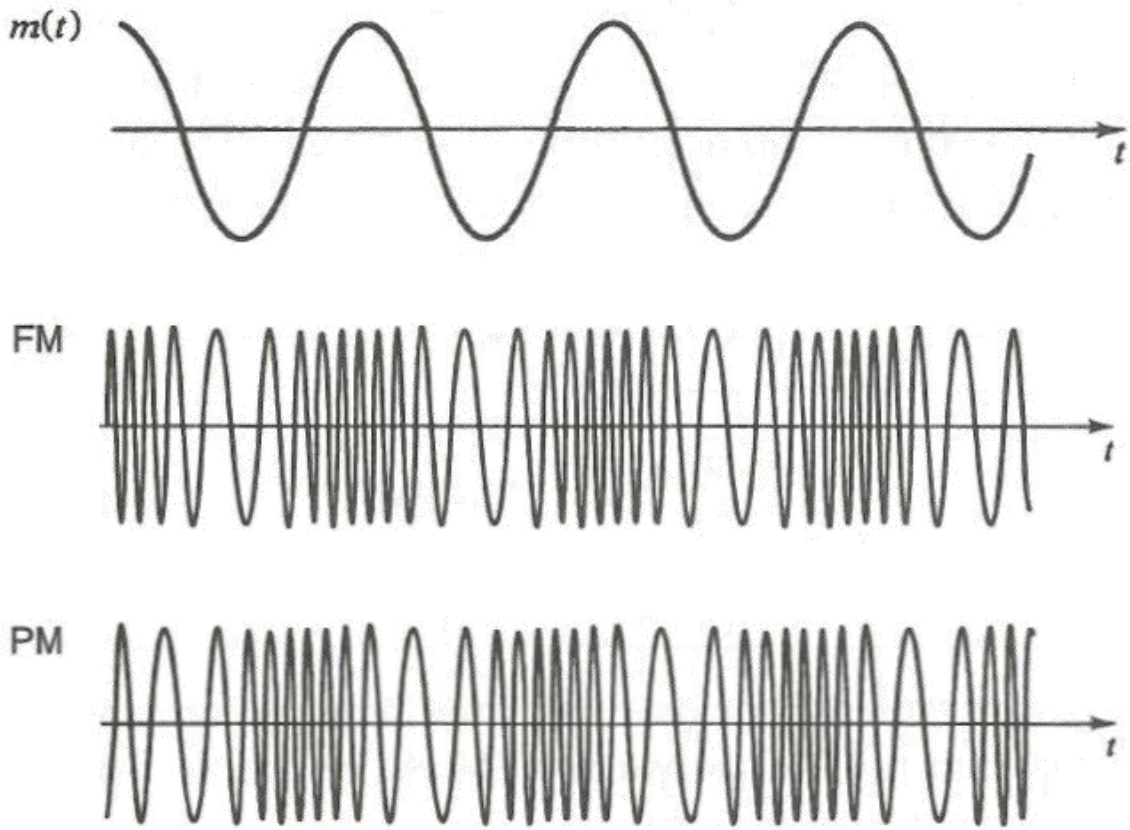
Η ω_i μεταβάλλεται γραμμικά με το διαμορφώνον σήμα.

Διαμόρφωση Πλάτους



Κυματομορφές πληροφοριακού σήματος, φέρουσας και διαμορφωμένου AM

Διαμόρφωση Γωνίας



Κυματομορφές πληροφοριακού σήματος, φέρουσας και διαμορφωμένου FM και PM

Διαμόρφωση Γωνίας Στενής Ζώνης

Narrow Band FM
Narrow Band PM

Διαμόρφωση Γωνίας Στενής Ζώνης

Αν $|\varphi(t)|max \ll 1$ τότε το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα, ονομάζεται **στενής ζώνης** (narrow band) και γράφεται:

$$x_c(t) \approx A\, cos\, \omega_c t - A\, \varphi(t) \sin \omega_c t$$

- **Στενής Ζώνης PM (NBPM)**

$$x_{NBPM}(t) \approx A\, cos\, \omega_c t - A\, k_p\, m(t) \sin \omega_c t$$

- **Στενής Ζώνης FM (NBFM)**

$$x_{NBFM}(t) \approx A\, cos\, \omega_c t - A\, \left[k_f \int_{-\infty}^{t} m(t) \right] \sin \omega_c t$$

Ημιτονοειδής Διαμόρφωση (Διαμόρφωση Απλού Τόνου)

Δείκτης Διαμόρφωσης

Φάσμα Σήματος FM

Δείκτης Διαμόρφωσης (για διαμόρφωση απλού τόνου)

Θεωρώντας ότι $m(t)$ είναι ένα απλό ημίτονο (τόνος), δηλαδή:

$$m(t) = \begin{cases} a_m \, sin \, \omega_m t & \text{για } PM \\ a_m \, cos \, \omega_m t & \text{για } FM \end{cases}$$

προκύπτει ότι:

$$\varphi(t) = \beta \sin \omega_m t$$

όπου:

$$\beta = \begin{cases} k_p a_m & \text{για } PM \\ \dfrac{k_f a_m}{\omega_m} & \text{για } FM \end{cases}$$

Η παράμετρος β ονομάζεται ***δείκτης διαμόρφωσης*** και είναι η μέγιστη τιμή της απόκλισης φάσης και για την PM και για την FM.

Ο δείκτης διαμόρφωσης β ορίζεται μόνο για ημιτονοειδή διαμόρφωση.
Ισούται με:

$$\beta = \frac{\Delta_\omega}{\omega_m}$$

όπου Δ_ω είναι μέγιστη απόκλιση συχνότητας.

Φάσμα Σήματος FM (1/2)

Για διαμόρφωση FM απλού τόνου, αποδεικνύεται ότι το FM σήμα γράφεται:

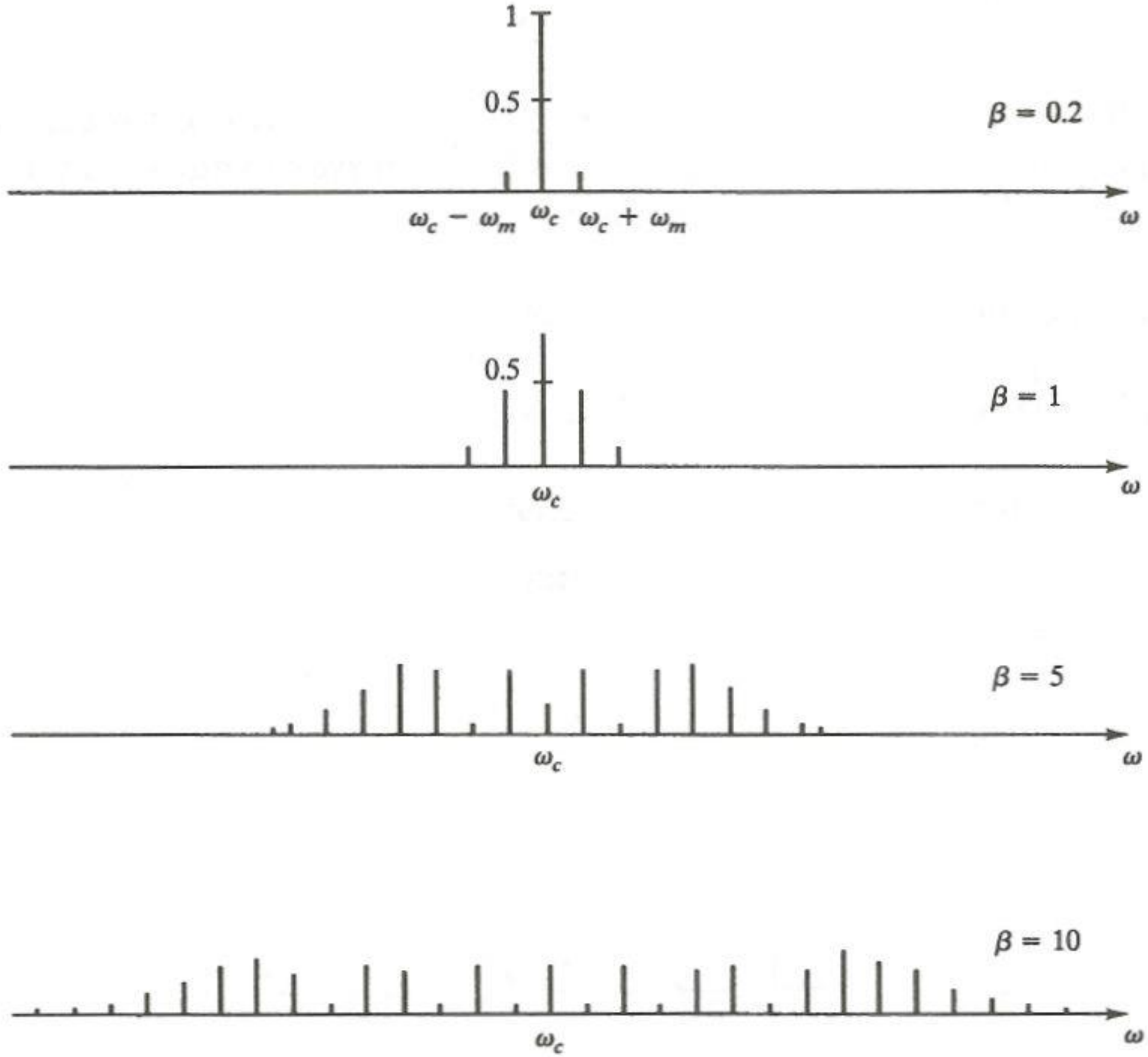
$$x_c(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\, cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

όπου $J_n(\beta)$ είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης n και ορίσματος β.

Σημαντικές Παρατηρήσεις:

- Το φάσμα αποτελείται από μία συνιστώσα στη συχνότητα της φέρουσας και ένα άπειρο πλήθος συνιστωσών πλευρικής ζώνης σε συχνότητες $\omega_c + n\omega_m$ $(n = 1,2,3 \ldots)$.
- Τα σχετικά πλάτη των φασματικών συνιστωσών εξαρτώνται από την τιμή της $J_n(\beta)$, η οποία γίνεται πολύ μικρή για μεγάλες τιμές του n.
- Το πλήθος των σημαντικών φασματικών συνιστωσών είναι συνάρτηση του δείκτη διαμόρφωσης β.
- Αν $\beta \ll 1$ τότε οι μόνες σημαντικές τιμές είναι οι J_0 και J_1.

Φάσμα Σήματος FM (2/2)



Άσκηση 1

Να καθοριστεί η στιγμιαία συχνότητα σε Hz για το καθένα από τα παρακάτω σήματα:

1) $10cos\left(200\,\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

2) $10\,cos(20\,\pi t + \pi t^2)$

3) $cos\,200\pi t\,cos(5\,sin2\pi t) + sin\,200\pi t\,sin(5sin2\pi t)$

<u>Απάντηση</u>:

Ερώτημα 1):

$$\theta(t) = 200\pi t + \frac{\pi}{3}$$

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = 200\pi = 2\pi(100)$$

Άρα η στιγμιαία συχνότητα του σήματος είναι 100 Hz, που είναι σταθερή.

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Ερώτημα 2):

$$\theta(t) = 20\pi t + \pi t^2$$
$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = 20\pi + 2\pi t = 2\pi(10 + t)$$

Η στιγμιαία συχνότητα του σήματος είναι 10 Hz σε χρόνο t=0 και αυξάνει γραμμικά με ταχύτητα 1 Hz/sec.

$$\cos 200\pi\, t \cos(5 \sin 2\, \pi\, t) + \sin 200\, \pi\, t \sin(5 \sin 2\, \pi\, t) = \cos(200\, \pi\, t - 5\, sin2\, \pi\, t)$$

Ερώτημα 3):

$$\theta(t) = 200\, \pi\, t - 5 \sin 2\, \pi\, t$$
$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = 200\pi - 10\pi \cos 2\pi\, t = 2\pi(100 - 5 \cos 2\, \pi\, t)$$

Η στιγμιαία συχνότητα του σήματος είναι 100 Hz σε χρόνο $t = 0$ και ταλαντώνεται ημιτονοειδώς μεταξύ 95 και 105 Hz.

Άσκηση 2

Έστω το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα $x_c(t) = 10\ cos[(10^8)\pi t + 5\ sin\ 2\pi(10^3)t\ ]$. Να βρεθεί η μέγιστη απόκλιση φάσης και η μέγιστη απόκλιση συχνότητας.

<u>Απάντηση</u>: Αν συγκρίνουμε το $x_c(t)$ που δίνεται παραπάνω με τη σχέση:

$$x_c(t) = A\ cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

βρίσκουμε:

$$\theta(t) = \omega_c t + \varphi(t) = (10^8)\pi t + 5 \sin 2\ \pi\ (10^3)\ t$$

$$\varphi(t) = 5sin2\pi(10^3)t$$

Η πρώτη παράγωγος είναι $\varphi'(t) = 5(2\pi)(10^3)cos2\pi(10^3)t$

Έτσι, η μέγιστη απόκλιση φάσης είναι $|\varphi(t)|_{max} = 5\ rad$ και η μέγιστη απόκλιση συχνότητας είναι:

$$\Delta_\omega = |\varphi'(t)|_{max} = 5(2\pi)(10^3)rad/s$$

ή

$$\Delta_f = 5\ kHz$$

Άσκηση 3

Ένα σήμα διαμορφωμένο κατά γωνία περιγράφεται από τη:

$$x_c(t) = 10\cos[2\pi(10^6)t + 0.1\, sin(10^3)\pi t]$$

1) Αν θεωρήσουμε το $x_c(t)$ σαν σήμα PM με $k_p = 10$, να βρεθεί το $m(t)$.
2) Αν θεωρήσουμε το $x_c(t)$ σαν σήμα FM με $k_f = 10$, να βρεθεί το $m(t)$.

<u>Απάντηση</u>:

Ερώτημα 1):

$$x_{PM}(t) = A\, cos\left[\omega_c t + k_p m(t)\right] = 10\, cos[2\pi(10^6)t + 10m(t)]$$
$$= 10\, cos[2\pi(10^6)t + 0.1sin(10^3)\pi t]$$

Έτσι θα είναι:

$$m(t) = 0.01\, sin(10^3)\pi t$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Ερώτημα 2):

$$x_{FM}(t) = A\, cos\left[\omega_c t + k_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda) d\lambda\right] = 10\, cos[2\pi(10^6)t + 0.1 sin(10^3)\pi t]$$

Αν θεωρήσουμε ότι είναι:

$$m(t) = a_m cos(10^3)\pi t$$

Λαμβάνουμε την:

$$10\pi \int_{-\infty}^{t} m(\lambda) d\lambda = 10\pi a_m \int_{-\infty}^{t} cos(10^3)\pi\, \lambda\, d\lambda = \frac{a_m}{100} sin(10^3)\pi t = 0.1 sin(10^3)\pi t$$

έτσι είναι $a_m = 10$

και

$$m(t) = 10\, cos(10^3)\pi t$$