Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 3: Εισαγωγή στα Συστήματα

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Εισαγωγή στα Συστήματα

1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων
   - Συστήματα Συνεχούς Χρόνου
   - Συστήματα Διακριτού Χρόνου
2. Συνδέσεις Συστημάτων
3. Είδη Συστημάτων
   - Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
   - Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
   - Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
   - Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
   - Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

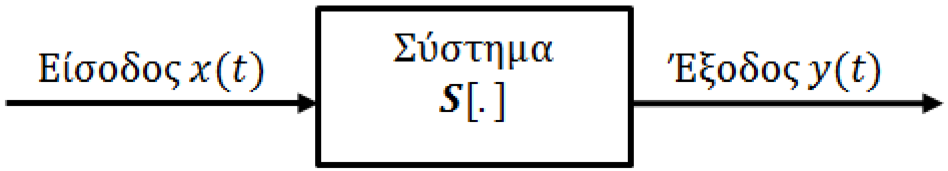
1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων

Ορισμός Συστήματος

Σύστημα είναι κάθε οντότητα που επενεργεί σε κάποιο σήμα $x(t)$ και ως αποτέλεσμα παράγει ένα (νέο) σήμα $y(t)$.

Από μαθηματική άποψη ένα σύστημα θεωρείται ως ένας μετασχηματισμός $\boldsymbol{S}[.]$ που μετασχηματίζει ένα σήμα $x(t)$ σε ένα άλλο σήμα $y(t)$, σύμφωνα με τη σχέση $y(t) = \boldsymbol{S}[x(t)]$.

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται **σχέση εισόδου – εξόδου** και περιγράφει ένα σύστημα στο πεδίο του χρόνου (time domain) με βάση την είσοδο και την έξοδό του, αγνοώντας πλήρως την εσωτερική δομή και περιγραφή του συστήματος.



Σχηματική περιγραφή συστήματος

Το σήμα $x(t)$ που διεγείρει το σύστημα λέγεται **είσοδος** του συστήματος, ενώ το αποτέλεσμα της διαδικασίας διέγερσης, δηλαδή το σήμα $y(t)$ λέγεται **έξοδος** του συστήματος.

Κατηγορίες Συστημάτων (1/3)

(Α) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα **μιας εισόδου - μιας εξόδου** (SISO – Single Input, Single Output). Παραδείγματα απλών συστημάτων μιας εισόδου - μιας εξόδου είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιαστής $y(t) = \alpha\, x(t)$ και το σύστημα καθυστέρησης $y(t) = x(t - t_0)$.

- Συστήματα με **πολλές εισόδους και μία έξοδο** (MISO – Multiple Input, Single Output). Παράδειγμα τέτοιων συστημάτων είναι ο αθροιστής δύο ή περισσοτέρων σημάτων $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ και ο πολλαπλασιαστής $y(t) = x_1(t)\, x_2(t)$.

- Συστήματα με **μία είσοδο και πολλές εξόδους** (SIMO – Single Input, Multiple Output).

- Συστήματα με **πολλές εισόδους και πολλές εξόδους** (MIMO – Multiple Input, Multiple Output).

Κατηγορίες Συστημάτων (2/3)

(Α) Ανάλογα με τη **φύση των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα **συνεχούς χρόνου** ή **αναλογικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι αναλογικά σήματα.

  Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι σήματα διακριτού χρόνου, τότε τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως συστήματα **διακριτού χρόνου**.

- **Αιτιοκρατικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι απλά αιτιοκρατικά σήματα.

  Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι στοχαστικά σήματα, τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως **στοχαστικά συστήματα**.

Κατηγορίες Συστημάτων (3/3)

- **Σύστημα συνεχούς χρόνου** (ΣΣΧ) (continuous time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου **συνεχούς χρόνου** $x(t)$ και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου **συνεχούς χρόνου**:

$$y(t) \; = \; S[x(t)]$$

- **Σύστημα διακριτού χρόνου** (ΣΔΧ) (discrete time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου $\{x(n)\}$ **διακριτού χρόνου** και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου $\{y(n)\}$ **διακριτού χρόνου:**

$$\{y(n)\} \; = \; T[\{x(n)\}]$$

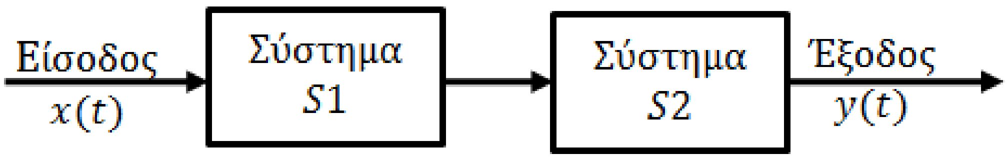
2. Συνδέσεις Συστημάτων

Συνδέσεις Συστημάτων (1/2)

Ένα σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερα συστήματα τα οποία διασυνδέονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους.

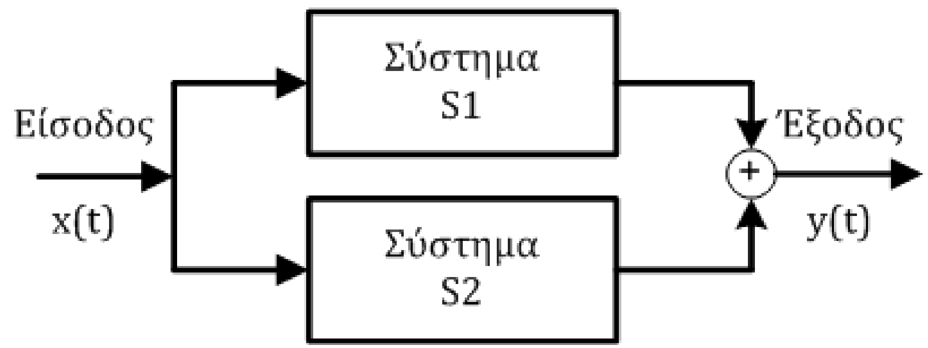
Οι βασικότερες συνδέσεις μεταξύ συστημάτων είναι η **σειριακή**, η **παράλληλη**, η **μεικτή** και η σύνδεση με **ανατροφοδότηση** ή **ανάδραση**.

- **Σειριακή σύνδεση συστημάτων**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S2[\, S1[x(t)]\,]$

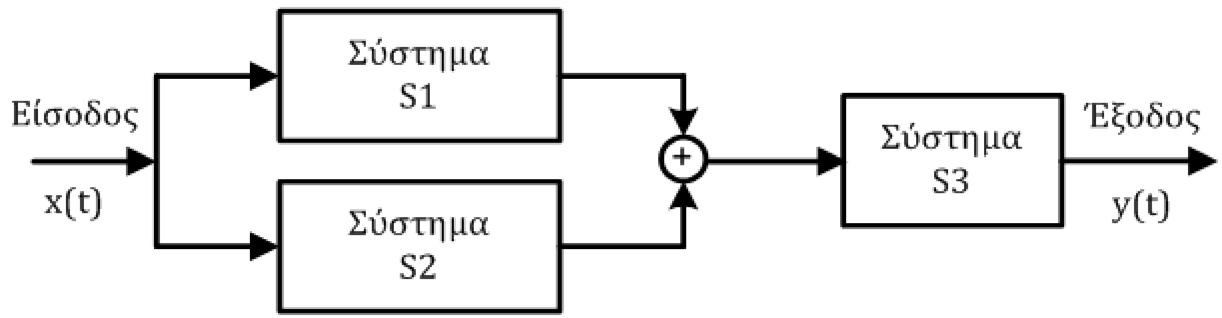
- **Παράλληλη σύνδεση συστημάτων**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S1[x(t)] + S2[x(t)]$

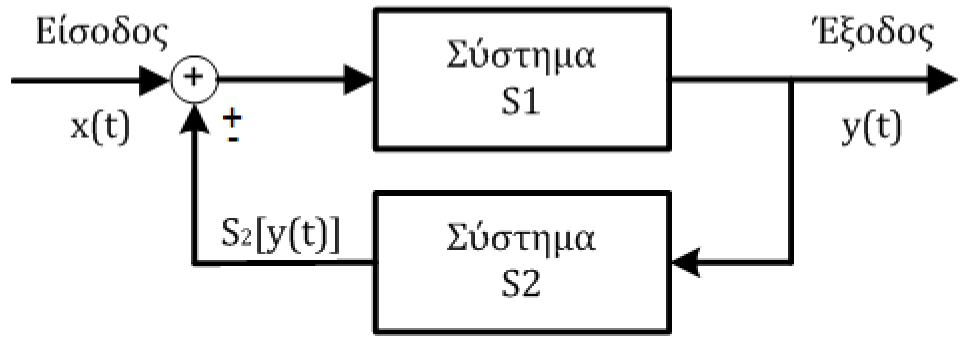
Συνδέσεις Συστημάτων (2/2)

- **Μεικτή σύνδεση συστημάτων**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S3\left[\, S1[x(t)] + S2[x(t)]\right]$

- **Σύνδεση συστημάτων με ανάδραση**



Η έξοδος είναι: $y(t) = S1[x(t) \pm S2[y(t)]]$

3. Είδη Συστημάτων

Είδη Συστημάτων

Ένα σύστημα βρίσκεται σε **κατάσταση ηρεμίας** τη χρονική στιγμή t_0, εάν δεν έχει υποστεί διέγερση από κάποιο σήμα για $t < t_0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει αποθηκευμένη ενέργεια κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

Είδη συστημάτων που βρίσκονται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας:

- Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
- Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
- Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
- Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
- Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα

Ένα σύστημα που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία ονομάζεται **γραμμικό**, όταν και μόνον όταν δοθέντων δύο σημάτων εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ισχύει η σχέση:

$$S[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 S[x_1(t)] + a_2 S[x_2(t)]$$

Δηλαδή, η απόκριση του συστήματος σε είσοδο που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων του συστήματος σε καθένα από τα σήματα αυτά.

Αυτή είναι η **αρχή της υπέρθεσης** (επαλληλίας - superposition) και επεκτείνεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό σημάτων:

$$x_1(t) \xrightarrow{S} y_k(t), \qquad k = 1,2, \dots, M$$

τότε για βαθμωτά a_k, $k = 1,2, \dots, M$, έχουμε:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k x_k(t) \xrightarrow{S} y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k\, y_k(t)$$

Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα

- Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** (causal) όταν η **παρούσα τιμή της εξόδου** του **δεν εξαρτάται** από **μελλοντικές τιμές της εισόδου**.
- Δηλαδή, για κάθε σήμα εισόδου $x(t)$ η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την παρούσα ή/και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου.
- Αντίστροφα, αν η έξοδος $y(t_0)$ τη χρονική στιγμή t_0 **εξαρτάται** από μεταγενέστερες τιμές του σήματος εισόδου $x(t)$, δηλ. για $t \geq t_0$, τότε το σύστημα είναι **μη-αιτιατό**.
- Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι αιτιατό αν οι μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) του συστήματος, ποτέ **δεν προηγούνται** των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο του συστήματος (αιτία).
- Όλα τα φυσικά παθητικά συστήματα έχουν την ιδιότητα της **αιτιότητας**.

Στατικά και Δυναμικά Συστήματα (1/2)

- Ένα σύστημα καλείται **στατικό** ή **σύστημα χωρίς μνήμη**, εάν για κάθε σήμα εισόδου η αντίστοιχη έξοδος για κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την **ίδια** χρονική στιγμή και όχι από προηγούμενες ή μελλοντικές τιμές της.
- Εάν ένα σύστημα δεν είναι στατικό, τότε καλείται **δυναμικό** ή **σύστημα με μνήμη**.
- Η έξοδος ενός δυναμικού συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή, αλλά επίσης και από (μερικές τουλάχιστον) προηγούμενες τιμές της εισόδου (και σε αιτιατά συστήματα και από μελλοντικές τιμές).
- Ένα σύστημα που η έξοδός του τη χρονική στιγμή t προσδιορίζεται πλήρως από τις τιμές της εισόδου στο διάστημα $t - T$ έως t (ισχύει $T \geq 0$), λέμε ότι έχει **μνήμη μήκους T**.
- Εάν το T έχει μία πεπερασμένη τιμή, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα **πεπερασμένης μνήμης**, ενώ αν $T \rightarrow \infty$ το σύστημα είναι γνωστό ως σύστημα **άπειρης μνήμης**.
- Ένα στατικό σύστημα έχει μηδενική μνήμη ($T = 0$).

Στατικά και Δυναμικά Συστήματα (2/2)

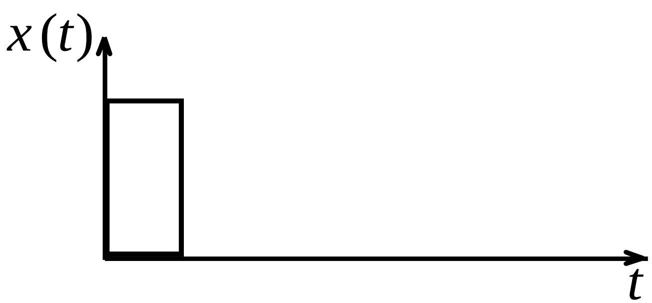
Παραδείγματα στατικών και δυναμικών συστημάτων:

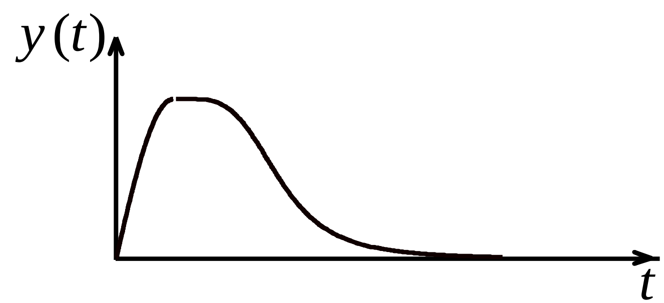
- Η ωμική αντίσταση είναι **σύστημα χωρίς μνήμη**, αφού η τάση στα άκρα της $u_R(t)$ (έξοδος) σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από το ρεύμα $i(t)$ (είσοδος), που την διαρρέει κατά την ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή ισχύει:

$$u_R(t) = R\, i(t)$$

- Ο πυκνωτής είναι ένα **σύστημα με μνήμη**, αφού η τάση $u_c(t)$ στα άκρα του σε κάθε χρονική στιγμή είναι αποτέλεσμα όλου του ιστορικού του ρεύματος $i(t)$ που τον διαρρέει:

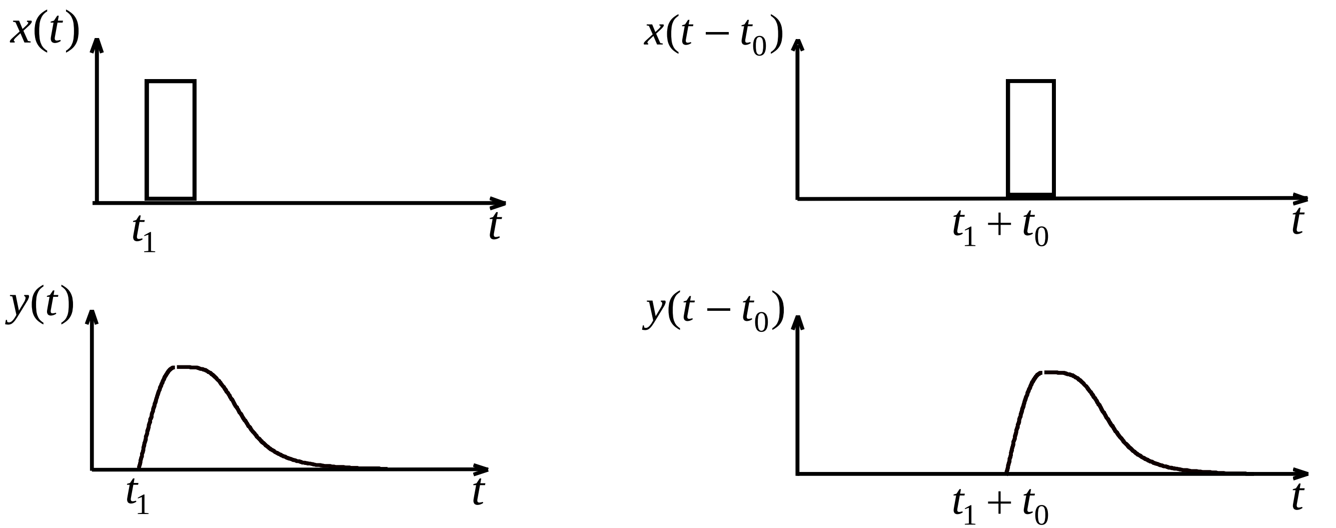
$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$





Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα

- Ένα σύστημα λέγεται **χρονικά αμετάβλητο** ή **χρονικά αναλλοίωτο**, όταν και μόνον όταν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στο σήμα εξόδου.
- Σε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα αν ένα σήμα εισόδου $x(t)$ προκαλεί έξοδο $y(t)$, τότε ένα σήμα εισόδου $x(t-t_0)$ παράγει σήμα εξόδου $y(t-t_0)$.



- Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, υπολογίζουμε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t)$. Αν ισχύει $y(t) \; = \; y(t-t_0)$ για κάθε είσοδο $x(t)$ και κάθε ολίσθηση t_0 τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

- Ένα σύστημα διαθέτει ευστάθεια **Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Εξόδου** και ονομάζεται **ΦΕΦΕ ευσταθές** όταν και μόνον όταν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδός του παραμένει φραγμένη.

- Ένα σύστημα είναι ΦΕΦΕ-ευσταθές (BIBO – bounded input bounded output) όταν για κάθε θετικό αριθμό $M_1 < \infty$ για τον οποίο ισχύει $|x(t)| \leq M_1$, υπάρχει (θετικός) αριθμός $M_2 < \infty$ για τον οποίο να ισχύει $|y(t)| \leq M_2$.

- Η έννοια αυτή της ευστάθειας ενός συστήματος ταυτίζεται με την απαίτηση τα σήματα εισόδου και εξόδου να παραμένουν πεπερασμένα (φραγμένα) σε πλάτος.

Άσκηση 1

Να ελέγξετε αν ισχύει η ιδιότητα της γραμμικότητας στο σύστημα με σχέση εισόδου - εξόδου $y(t) = sin\{x(t)\}$.

<u>Απάντηση</u>: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του συστήματος, τότε η έξοδος του είναι $y_1(t) = sin\{x_1(t)\}$. Αν η είσοδός είναι το σήμα $x_2(t)$, η έξοδος είναι $y_2(t) = sin\{x_2(t)\}$.

Αν στην είσοδο του συστήματος θέσουμε τον γραμμικό συνδυασμό $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$, τότε η έξοδος $y(t)$ είναι:

$$y(t) = sin(a_1x_1(t) + \ a_2x_2(t)) \neq sin(a_1x_1(t)) + sin(a_2x_2(t)) = y'(t)$$

Όπου $y'(t)$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των εξόδων $y_1(t)$ και $y_2(t)$, δηλαδή:

$$y'(t) = \alpha_1y_1(t) + \alpha_2y_2(t)$$

Επειδή ισχύει $y(t) \neq y'(t)$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Άσκηση 2

Να ελέγξετε ως προς τη γραμμικότητα το σύστημα με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t-1)}$$

<u>Απάντηση</u>: Για τις εισόδους $x_1(t)$ και $x_2(t)$, οι έξοδοι $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι:

$$y_1(t) = \frac{x_1(t)}{1+x_1(t-1)} \text{ και } y_2(t) = \frac{x_2(t)}{1+x_2(t-1)}$$

Θέτοντας ως είσοδο τον γραμμικό συνδυασμό $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$, η έξοδος $y(t)$ είναι:

$$y(t) = \frac{x(t)}{1 + x(t-1)} = \frac{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)}{1 + \alpha_1 x_1(t-1) + \alpha_2 x_2(t-1)}$$

Ο γραμμικός συνδυασμός $y'(t)$ των εξόδων $y_1(t)$ και $y_2(t)$ είναι:

$$y'(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) = \alpha_1 \frac{x_1(t)}{1 + x_1(t-1)} + \alpha_2 \frac{x_2(t)}{1 + x_2(t-1)}$$

Παρατηρούμε ότι $y(t) \neq y'(t)$. Άρα το δοθέν σύστημα δεν είναι γραμμικό.

Άσκηση 3

Για κάθε ένα από τα παρακάτω συστήματα, να εξετάσετε αν είναι αιτιατά ή όχι.

1) $y(t) = x^3(t+3)$ 2) $y(t) = e^{-\alpha t}\, u(t)$

Απάντηση:

1) Είναι μη αιτιατό, επειδή η έξοδος εξαρτάται και από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

2) Είναι αιτιατό, επειδή η έξοδος εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της εισόδου.

Άσκηση 4

Ποια από τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις εισόδου – εξόδου είναι στατικά και ποια δυναμικά;

1) $y(t) = \alpha x(t)$ 2) $y(t) = x^2(t)$

3) $y(t) = x(t) + 2x(t-1)$ 4) $y(t) = y(t-1) + x(t)$

<u>Απάντηση</u>:

1) Είναι στατικό, επειδή η έξοδος στη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την είσοδο μόνο στην ίδια χρονική στιγμή.

2) Είναι στατικό (ομοίως).

3) Είναι δυναμικό, επειδή η έξοδος στη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την είσοδο σε προγενέστερη χρονική στιγμή.

4) Είναι δυναμικό, επειδή η έξοδος στη χρονική στιγμή t εξαρτάται από την έξοδο σε προγενέστερη χρονική στιγμή, άρα και από την είσοδο σε προγενέστερη στιγμή.

Άσκηση 5

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = t\,x(t)$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

<u>Απάντηση</u>:

Στο δοθέν σύστημα θέτουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ όπου t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης και λαμβάνουμε ως έξοδο $y(t) = t\,x(t - t_0)$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή δεν ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = (t - t_0)\,x(t - t_0)$.

Επομένως, το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

Άσκηση 6

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = cos[\ x(t)\ ]$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

Απάντηση: Στο δοθέν σύστημα θέτουμε ως είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ όπου t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης και έχουμε ως έξοδο $y(t) = cos[\ x(t - t_0)\ ]$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = cos[\ x(t - t_0)\ ]$.

Επομένως, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Άσκηση 7

Ελέγξτε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου $y(t) = x(t)\ sin(t)$ είναι χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο.

Απάντηση: Στο δοθέν σύστημα για είσοδο το σήμα $x(t - t_0)$ (t_0 μία τυχαία τιμή χρονικής ολίσθησης), η έξοδος είναι $y(t) = x(t - t_0)\sin(t)$.

Παρατηρούμε ότι η έξοδος αυτή δεν ταυτίζεται με την μετατοπισμένη κατά t_0 έξοδο, δηλ. την $y(t - t_0) = x(t - t_0)\ sin(t - t_0)$.

Επομένως το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

Άσκηση 8

Να ελέγξετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου είναι ΦΕΦΕ ευσταθές ή όχι:

$$y(t) = x(t)\ sin(\omega t)$$

<u>Απάντηση</u>:

Από τη σχέση ορισμού του συστήματος και λαμβάνοντας υπόψη ότι $|\sin \omega t| \leq 1$, έχουμε:

$$|y(t)| = |x(t)\ sin(\omega t)| = |x(t)\ ||sin(\omega t)| \leq |x(t)|$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει ότι αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη, τότε και η έξοδος $y(t)$ θα είναι επίσης φραγμένη.

Επομένως το σύστημα είναι ΦΕΦΕ ευσταθές.

Άσκηση 9

Να ελέγξετε αν το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου – εξόδου είναι ΦΕΦΕ ευσταθές ή όχι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

<u>Απάντηση</u>:

Ας θεωρήσουμε ότι ως είσοδο $x(t)$ στο σύστημα δίνουμε μια φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή ότι ισχύει: $|x(t)| \leq a$. Η έξοδος $y(t)$ υπολογίζεται ως:

$$|y(t)| = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leq \int_{-\infty}^{t} \alpha\, d\tau = \alpha \int_{-\infty}^{t} d\tau = \infty$$

Επομένως, η έξοδος δεν είναι φραγμένη, άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Άσκηση 10

Να εξετάσετε αν το σύστημα που περιγράφεται από την παρακάτω σχέση και ονομάζεται διαφοριστής, είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και αιτιατό.

$$y(t) = \boldsymbol{S}[\,x(t)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Απάντηση: α) Έλεγχος για την γραμμικότητα: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του ολοκληρωτή, τότε η έξοδος του είναι το $\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, d\tau$, ενώ αν η είσοδος είναι $x_2(t)$ τότε η έξοδος είναι το $\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\, d\tau$.

Αν στην είσοδο του συστήματος τεθεί ο γραμμικός συνδυασμός $\alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)$, τότε η έξοδος είναι:

$$\int_{-\infty}^{t} [\alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)] d\tau = \alpha_1 \int_{-\infty}^{t} x_1(t)\, d\tau + \alpha_2 \int_{-\infty}^{t} x_2(t)\, d\tau$$

Προφανώς, το σύστημα είναι **γραμμικό**.

Άσκηση 10 (συνέχεια)

β) Έλεγχος για τη χρονική μεταβλητότητα: Αν το σήμα $x(t)$ είναι η είσοδος του ολοκληρωτή, τότε η έξοδός του είναι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Ομοίως, βρίσκουμε (χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $\tau = \xi - t_0$) πως η απόκρισή του στο σήμα $x(t - t_0)$ είναι:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\xi - t_0)\, d\xi = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)\, d\tau = y(t - t_0)$$

Επομένως το σύστημα είναι **χρονικά αμετάβλητο**.

γ) Έλεγχος για την αιτιότητα: Ο ολοκληρωτής είναι **αιτιατό** σύστημα αφού η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την παρούσα και από προηγούμενες τιμές της εισόδου του.

Άσκηση 11

Το σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y(t) = |x(t)|$ αναφέρεται ως σύστημα πλήρους ανόρθωσης. Να εξετάσετε αν το σύστημα είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και αιτιατό.

<u>Απάντηση</u>: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του συστήματος, τότε η έξοδος του είναι $y_1(t) = |x_1(t)|$, ενώ για είσοδο $x_2(t)$ η έξοδος είναι $y_2(t) = |x_2(t)|$. Αν η είσοδος του συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $ax_1(t) + bx_2(t)$, τότε η έξοδος είναι $|ax_1(t) + bx_2(t)| \neq ay_1(t) + by_2(t)$. Επομένως το σύστημα **δεν είναι γραμμικό**.

Το σύστημα είναι **χρονικά αναλλοίωτο**, αφού ισχύει $y(t) = |x(t)|$και $y(t - t_0) = |x(t - t_0)|$.

Το σύστημα είναι επίσης **αιτιατό**, αφού η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου του.