Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 6: Ανάλυση Σημάτων σε Ανάπτυγμα Σειράς Fourier

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ανάλυση Σημάτων σε Ανάπτυγμα Σειράς Fourier

1. Ανάπτυγμα σήματος σε Σειρά Fourier
   – Τριγωνομετρική Α’ μορφή
   – Τριγωνομετρική Β’ μορφή
   – Εκθετική μορφή
2. Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier
3. Θεώρημα Parceval για περιοδικές συναρτήσεις

Εισαγωγή (1/2)

- Η ανάλυση των σημάτων και των γραμμικών συστημάτων σε **αναπτύγματα σειρών Fourier** ή/και **μετασχηματισμών Fourier** οδηγεί στην αναπαράσταση των σημάτων με τη **συχνότητα** ως μεταβλητή (αντί του χρόνου).
- Με την ανάλυση κατά Fourier αναπαριστούμε ένα σήμα σε άθροισμα απλών τριγωνομετρικών συναρτήσεων συγκεκριμένης συχνότητας.
- Όταν ένα τέτοιο σήμα διεγείρει ένα γραμμικό σύστημα θα μπορούμε να προσδιορίζουμε την έξοδο του συστήματος ως άθροισμα σημάτων που έχουν τις ίδιες συχνότητες με του σήματος εισόδου, των οποίων όμως το πλάτος και η φάση έχει υποστεί κάποια αλλαγή, που προκαλεί το σύστημα.

Εισαγωγή (2/2)

- **Σειρές Fourier**: είναι χρήσιμες στην περιγραφή των περιοδικών σημάτων και οδηγούν στην έννοια των **φασμάτων**, τα οποία απεικονίζουν πληροφορίες όπως το πλάτος και η φάση, που αφορούν το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος.
- **Μετασχηματισμός Fourier**: εφαρμόζεται τόσο σε περιοδικά όσο και σε μη περιοδικά (απεριοδικά) σήματα.
- Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο ενός αναπτύγματος σε σειρά Fourier όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο.

1. Ανάπτυγμα Σήματος σε Σειρά Fourier

Ανάπτυγμα σήματος σε Σειρά Fourier

Αν για ένα **περιοδικό σήμα** $x(t)$ με περίοδο T_0 ικανοποιούνται οι τρεις ακόλουθες **συνθήκες Dirichlet**:

1. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη σε μία περίοδο, δηλαδή:

   $$\int_0^{T_0} |x(t)|\, dt < +\infty$$

   (δηλ. το σήμα πρέπει να είναι σήμα ενέργειας).

2. Η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής ή ο αριθμός των ασυνεχειών της σε κάθε περίοδο είναι πεπερασμένος.

3. Το πλήθος των μεγίστων και των ελαχίστων της συνάρτησης $x(t)$ σε κάθε περίοδο είναι πεπερασμένο.

τότε το σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί σε **ανάπτυγμα σειράς Fourier**, με τις τρεις ισοδύναμες μορφές που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από όλα τα φυσικά σήματα.

Τριγωνομετρική Α' μορφή

Κάθε περιοδικό σήμα $x(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά άπειρων όρων ημιτόνων και συνημιτόνων:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, cos(n\omega_0 t) + b_n\, sin(n\omega_0 t)$$

όπου ω_0 είναι η θεμελιώδης κυκλική συχνότητα ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) του σήματος $x(t)$, και οι συντελεστές α_0, α_n και b_n δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) sin(n\omega_0 t)\, dt$$

Τριγωνομετρική Β' μορφή

Κάθε περιοδικό σήμα $x(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά άπειρων όρων συνημιτόνων:

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \, cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

όπου :

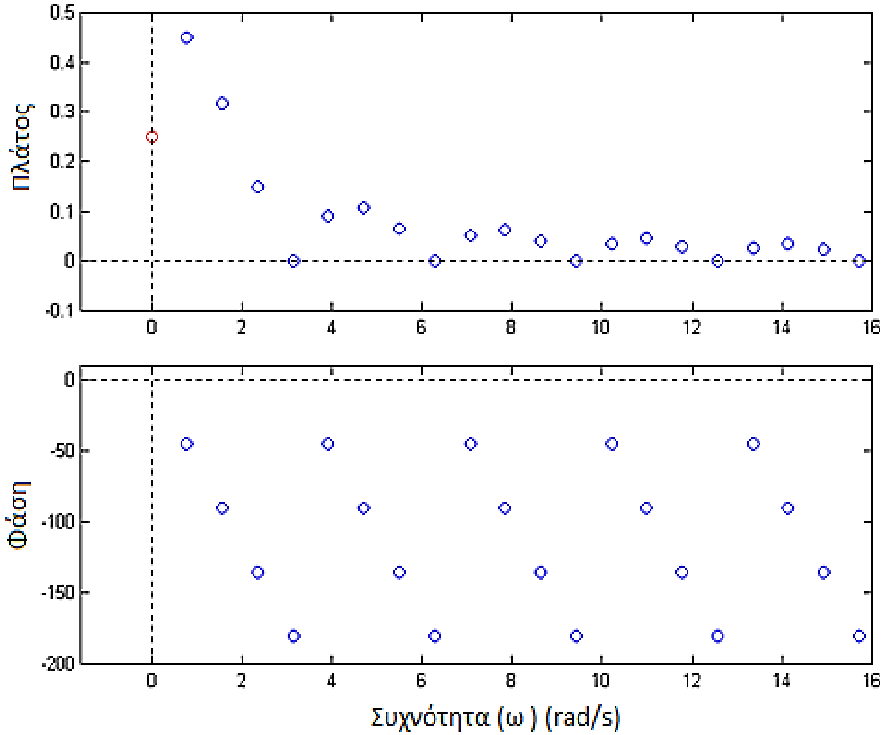
$$c_0 = a_0, \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- Όπως ισχύει και στις άλλες δύο μορφές σειρών Fourier, εφόσον λάβουμε **άπειρους όρους**, τότε η συνάρτηση $x(t)$ περιγράφεται με **μηδενικό σφάλμα**.
- Η δυνατότητα του ισοδύναμου προσδιορισμού ενός σήματος $x(t)$ από τους συντελεστές c_n και φ_n και από τη συχνότητα ω_0 είναι εξόχως σημαντική.

Η έννοια του Φάσματος

Σχεδιάζοντας σε διάγραμμα τους συντελεστές c_n και φ_n ως τη συχνότητα ω ορίζουμε το **φάσμα πλάτους μονής πλευράς** (single sided amplitude spectrum) $c_n = c_n(\omega_n)$ και το **φάσμα φάσης** (phase spectrum) $\varphi_n = \varphi_n(\omega_n)$, αντίστοιχα.



Γενικό παράδειγμα φάσματος πλάτους μονής πλευράς και φάσματος φάσης

Εκθετική μορφή

Το εκθετικό ανάπτυγμα μίας περιοδική συνάρτησης $x(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

όπου οι συντελεστές X_n είναι μιγαδικοί αριθμοί και υπολογίζονται από τη σχέση:

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

Ισχύουν δε τα παρακάτω:

$$X_0 = c_0 = a_0$$

$$X_n = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(\alpha_n - jb_n)$$

Εκθετική μορφή

- Από την ανάπτυξη της εκθετικής μορφής ορίζουμε το **φάσμα πλάτους διπλής πλευράς** (double sided amplitude spectrum) $|X_n| = |X_n(\omega_n)|$ με άρτια συμμετρία και το **φάσμα φάσης** (phase spectrum) $\varphi_n = \varphi_n(\omega_n)$, διπλής πλευράς και αυτό αλλά με περιττή συμμετρία.

- Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή ω λαμβάνει διακριτές τιμές ω_n, η παραπάνω γραφική αναπαράσταση των μιγαδικών συντελεστών σε μορφή πολικών συντεταγμένων (μέτρο και φάση) ονομάζεται **διακριτό φάσμα** (discrete spectrum) του περιοδικού σήματος $x(t)$.

- Η ποσότητα $f_0 = 1/T_0$ ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα** του σήματος $x(t)$.

- Παρατηρούμε ότι οι συχνότητες των μιγαδικών όρων είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας. Το n −στο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας καλείται $\boldsymbol{n}$ **−στη αρμονική**.

Σύνοψη

Το ανάπτυγμα ενός περιοδικού σήματος σε σειρά Fourier εκφράζει ότι το περιοδικό σήμα μπορεί **ισοδύναμα** να περιγραφεί από την περίοδό του T_0 και από τους συντελεστές:

- $\{\alpha_n, b_n\}$ για την τριγωνομετρική Α' μορφή
- $\{c_n, \varphi_n\}$ για την τριγωνομετρική Β' μορφή
- $\{\mathrm{X}_n\}$ για την εκθετική μορφή

Επομένως με το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier μπορούμε να περιγράψουμε ένα **μη αριθμήσιμο σύνολο** (σημεία του $x(t)$), χρησιμοποιώντας ένα **αριθμήσιμο σύνολο** αριθμών, γεγονός που μειώνει την πολυπλοκότητα περιγραφής του σήματος $x(t)$.

2. Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier

Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier (1/2)

Η κανονικοποιημένη ισχύς ενός σήματος $x(t)$στο πεδίο του χρόνου, δίνεται από:

$$S_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt$$

Η κανονικοποιημένη ισχύς για κάθε μορφή ανάπτυξης σειρών Fourier, είναι:

Τριγωνομετρική Α':

$$S_x = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}\right)$$

Τριγωνομετρική Β':

$$S_x = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{c_n^2}{2}\right)$$

Εκθετική:

$$S_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier (2/2)

- Η ακολουθία $\{|X_n|^2\}$ ονομάζεται **πυκνότητα φασματικής ισχύος** ή απλά **φάσμα ισχύος** του περιοδικού σήματος, επειδή υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η ισχύς του σήματος στις συχνότητες $nf_0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- Αν για κάποια τιμή του n το $|X_n|^2$ είναι «μεγάλο», τότε η συγκεκριμένη συχνότητα κατέχει «σημαντικό» ποσοστό από τη συνολική ισχύ του σήματος.

- Παρατηρούμε ότι το φάσμα ισχύος $|X_n|^2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ προκύπτει με τον τετραγωνισμό του φάσματος πλάτους $|X_n|$.

3. Θεώρημα Parseval για περιοδικές συναρτήσεις

Θεώρημα Parseval για περιοδικές συναρτήσεις

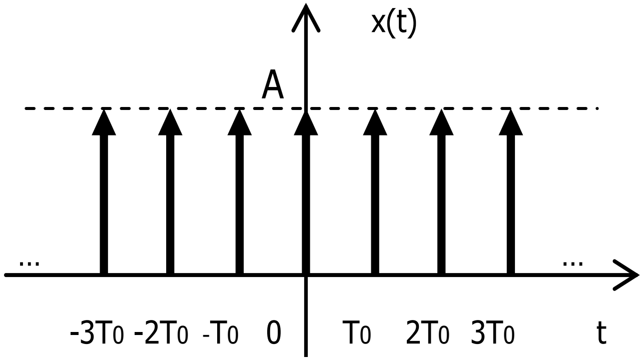
Θεώρημα Parceval:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

- Το αριστερό μέλος υπολογίζει την ισχύ στο πεδίο του χρόνου και στη διάρκεια μίας περιόδου
- Το δεξί μέλος υπολογίζει την ισχύ στο πεδίο της συχνότητας.
- Παρατηρούμε ότι η ανάλυση μίας περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ σε ανάπτυγμα σειράς Fourier δεν μεταβάλει την ισχύ (και την ενέργεια) του σήματος.

Άσκηση 1

Να βρεθεί η ανάπτυξη Fourier του «τραίνου» κρουστικών συναρτήσεων.



<u>Απάντηση</u>: Το τραίνο κρουστικών συναρτήσεων εκφράζεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$x(t) = A\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$$

- Συντελεστές τριγωνομετρικής Α' μορφής:

$$a_0 = \frac{A}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)dt = \frac{A}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2A}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\,cos\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)dt = \frac{2A}{T_0}$$

$$b_n = \frac{2A}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\,sin\left(\frac{2\pi nt}{T_0}\right)\,dt = 0$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

- Συντελεστές τριγωνομετρικής Β' μορφής:

$$c_0 = a_0 = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{T}_0}, \qquad c_n = \frac{2\mathrm{A}}{\mathrm{T}_0}, \qquad \varphi_n = 0$$

- Συντελεστές εκθετικής μορφής:

$$X_n = \frac{A}{\mathrm{T}_0}$$

Επομένως τα αναπτύγματα σε σειρές Fourier του τραίνου κρουστικών, είναι:

- **Τριγωνομετρική Β':**

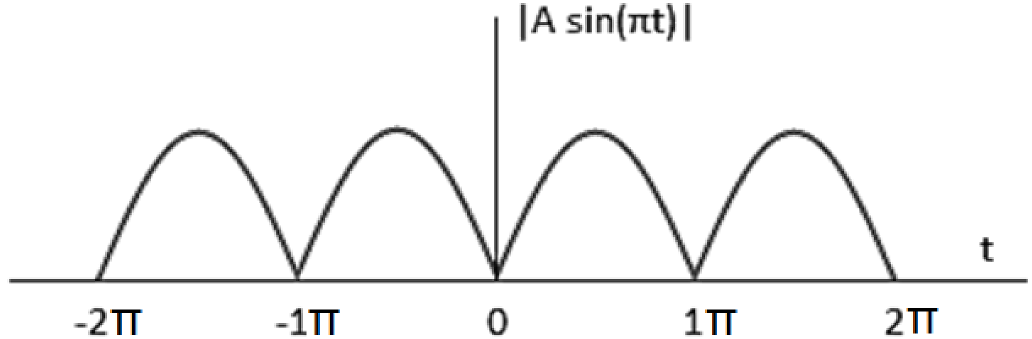
$$x(t) = \frac{A}{T_0} + \frac{2A}{T_0}\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi n t}{\mathrm{T}_0}\right)$$

- **Εκθετική:**

$$x(t) = \frac{A}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi n t}{\mathrm{T}_0}}$$

Άσκηση 2(συνέχεια)

Να βρεθεί η ανάπτυξη Fourier του πλήρως ανορθωμένου ημιτονικού σήματος. Να σχεδιαστούν τα φάσματα πλάτους μονής και διπλής πλευράς και το φάσμα φάσης.



<u>Απάντηση</u>: Το πλήρως ανορθωμένο ημίτονο δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = |A\, sin(\pi t)|$$

Η θεμελιώδης συχνότητά του είναι: $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \Rightarrow \boldsymbol{f_0 = 1\ (Hz)}$.

Άρα η θεμελιώδης περίοδος είναι $T_0 = 1/f_0 \Rightarrow \boldsymbol{T_0 = 1\ (sec)}$.

Άσκηση 2(συνέχεια)

- Συντελεστές τριγωνομετρικής Α’ μορφής:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \int_0^1 A\sin(\pi t)\,dt = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,cos(n\omega_0 t)\,dt = \cdots = -\frac{4A}{\pi(4n^2-1)}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)sin(n\omega_0 t)\,dt = \cdots = 0$$

- Συντελεστές τριγωνομετρικής Β’ μορφής:

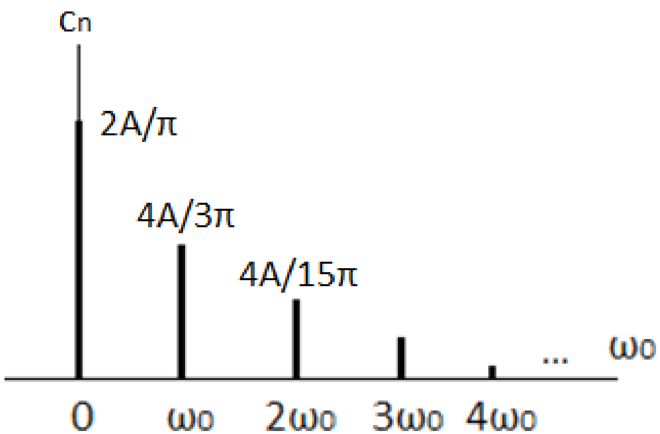
$$c_0 = a_0 = \frac{2A}{\pi}$$

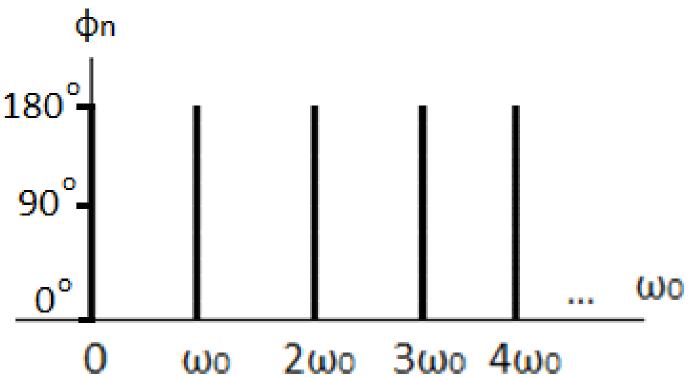
$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |\alpha_n| = \frac{4A}{\pi(4n^2-1)}$$

$$\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = 0^0 = 180^0$$

Άσκηση 2(συνέχεια)

Από την τριγωνομετρική Β’ μορφή σχεδιάζουμε τα **φάσματα πλάτους μονής πλευράς** $\boldsymbol{c_n = c_n(\omega_n)}$ και το **φάσμα φάσης** $\boldsymbol{\varphi_n = \varphi_n(\omega_n)}$.





Επομένως το ανάπτυγμα της συνάρτησης $x(t)$ σε Β’ τριγωνομετρική μορφή, είναι:

$$x(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\omega_0 t)}{(1 - 4n^2)}$$

Άσκηση 2(συνέχεια)

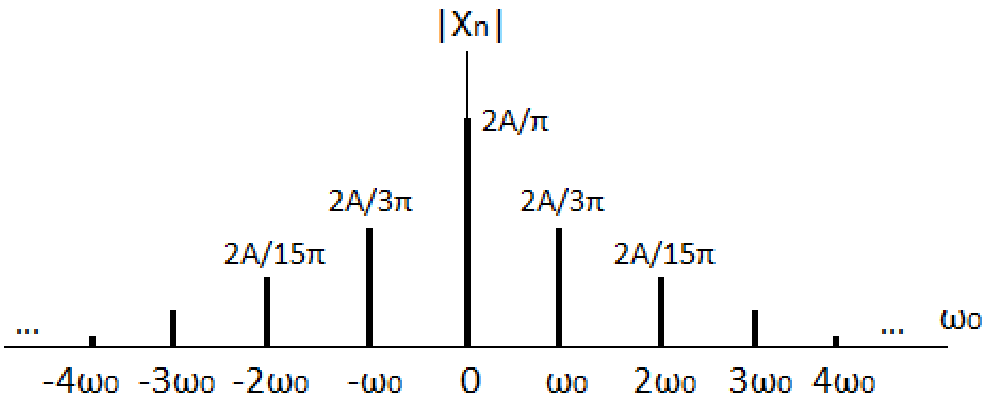
- Συντελεστές εκθετικής μορφής:

$$X_0 = \alpha_0 = \frac{2A}{\pi} \quad \text{και} \quad X_n = \frac{1}{2}(\alpha_n - jb_n) = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{2A}{\pi(1-4n^2)}$$

$$\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = 0^0 = 180^0$$

- Το φάσμα πλάτους διπλής πλευράς φαίνεται δίπλα:

- Το φάσμα φάσης είναι ίδιο με το φάσμα φάσης της προηγούμενης διαφάνειας.



- Το ανάπτυγμα της συνάρτησης $x(t)$ σε εκθετική μορφή, είναι:

$$x(t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1-4n^2)}e^{j2\pi nt}$$

Άσκηση 3

Χρησιμοποιώντας το φάσμα πλάτους διπλής πλευράς της προηγούμενης άσκησης, να υπολογίσετε την ισχύς κάθε αρμονικού όρου ως απόλυτο μέγεθος και ως ποσοστό της συνολικής ισχύος.

<u>Απάντηση</u>: Για να υπολογίσουμε την ισχύ κάθε αρμονικού όρου σε απόλυτο μέγεθος υπολογίζουμε τους συντελεστές $|X_n|^2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ του φάσματος ισχύος. Θυμίζουμε ότι το φάσμα ισχύος προκύπτει από την ύψωση στο τετράγωνο του φάσματος πλάτους:

- Για $n = 0$ έχουμε: $P_0 = |X_0|^2 = \left(\frac{2A}{\pi}\right)^2 = \frac{4A^2}{\pi^2}$.
  Αυτή είναι η συνεχής συνιστώσα (DC).
- Για $n = 1$ έχουμε: $P_1 = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = 2\left(\frac{2A}{3\pi}\right)^2 = \frac{8A^2}{9\pi^2}$.
- Για $n = 2$ έχουμε: $P_2 = |X_2|^2 + |X_{-2}|^2 = 2\left(\frac{2A}{15\pi}\right)^2 = \frac{8A^2}{225\pi^2}$.

Ομοίως υπολογίζουμε και τους υπόλοιπους αρμονικούς όρους.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Για να υπολογίσουμε το ποσοστό ισχύος κάθε αρμονικού όρου ως προς τη συνολική ισχύ, υπολογίζουμε αρχικά τη συνολική ισχύ από το θεώρημα Parceval :

$$P_{total} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 A^2 \sin^2(2\pi t)\,dt = \frac{A^2}{2}$$

Επομένως, το ζητούμενο ποσοστό ισχύος του DC όρου δίνεται από τη σχέση:

$$P'_0 = \frac{P_0}{P_{total}}(\%) = \frac{4A^2/\pi^2}{A^2/2}(\%) \cong 80\%$$

Παρατηρούμε ότι το 80% της συνολικής ισχύος περιέχεται στη συνεχή (DC) συνιστώσα. Άρα το σήμα είναι χαμηλής συχνότητας.

Ανάλογα, υπολογίζουμε το ποσοστό ισχύος και για τους υπόλοιπους όρους:

$$P'_n = \frac{P_n}{P_{total}} = \frac{2|X_n|^2}{P_{total}}, \qquad n = 1,2\ldots$$