Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 7: Μετασχηματισμός Fourier

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μετασχηματισμός Fourier

1. Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier
2. Φυσική Σημασία του Μετασχηματισμού Fourier
3. Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier

1. Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier

Εισαγωγή

- Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί επέκταση των σειρών Fourier σε **περιοδικά** και **μη-περιοδικά σήματα**.

- Αποδεικνύεται ότι ένα οποιοδήποτε σήμα μπορεί να αναπτυχθεί στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ μέσω του μετασχηματισμού Fourier ως ένας **γραμμικός συνδυασμός απείρων αρμονικών εκθετικών σημάτων**.

- Όπως και στις σειρές Fourier, τα σήματα εκφράζονται με τη βοήθεια μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων διαφόρων συχνοτήτων, όμως στον μετασχηματισμό Fourier οι συχνότητες είναι **συνεχείς** και όχι διακριτές.

Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier (1/2)

Ευθύς Μετασχηματισμός Fourier (MF)

- Ορίζουμε ως **μετασχηματισμό Fourier** μίας συνάρτησης $x(t)$ τη μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $X(\omega)$, που δίνεται από τη σχέση:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

- Επιτρέπει τον υπολογισμό της χρονικής συνάρτησης $x(t)$ όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Ορισμός του Μετασχηματισμού Fourier (2/2)

Αν αντί της κυκλικής συχνότητας ω, χρησιμοποιήσουμε τη **γραμμική συχνότητα f** (όπου $f = \omega/2\pi$), οι ορισμοί του ευθύ και του αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier είναι:

- Ευθύς μετασχηματισμός Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

- Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

Συμβολισμοί Μετασχηματισμού Fourier

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση $X(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- Για να δηλώσουμε ότι η $x(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $X(\omega)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

- Μερικές φορές χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συμβολισμός ως συντομογραφία των δύο συμβολισμών:

Ευθύς μετασχηματισμός Fourier	$x(t) \xrightarrow{F} X(\omega)$
Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier	$X(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} x(t)$

- ή απλά $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$

Φάσμα Μετασχηματισμού Fourier

- Ο μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα (περιοδικό ή μη περιοδικό) σήμα $x(t)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ σε ένα **συνεχές φάσμα περιοδικών εκθετικών σημάτων**.

- Το φασματικό περιεχόμενο στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων $[\omega, \omega + d\omega]$ είναι $X(\omega)$.

- Η συνεισφορά των συχνοτήτων στο απειροστό διάστημα $[\omega, \omega + d\omega]$ έχει «πλάτος» $X(\omega)$ $(d\omega/2\pi)$.

- Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier δεν είναι ένα φάσμα πλάτους αλλά η **φασματική πυκνότητα πλάτους**.

2. Φυσική Σημασία του Μετασχηματισμού Fourier

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier (1/2)

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση, άρα γράφεται ως:

$$\mathrm{X}(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$$

όπου $R(\omega)$ το πραγματικό μέρος και $I(\omega)$ το φανταστικό μέρος του $X(\omega)$.

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση αποδεικνύεται ότι η $R(\omega)$ είναι **άρτια** συνάρτηση, ενώ η $\mathrm{I}(\omega)$ είναι **περιττή** συνάρτηση και δίνονται από:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)\, d\omega$$

$$I(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(\omega t)\, d\omega$$

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier (2/2)

Ο μετασχηματισμός Fourier X(ω) ως μιγαδική συνάρτηση, γράφεται επίσης ως:

$$X(\omega) = |X(\omega)|\ e^{\,j\varphi(\omega)}$$

- $|X(\omega)|$: **φάσμα πλάτους** (amplitude spectrum)
- $\varphi(\omega)$: **φάσμα φάσης** (phase spectrum)

Το φάσμα του MF είναι **συνεχές**, σε αντίθεση με το φάσμα των σειρών Fourier που είναι διακριτό.

Το πλάτος |X(ω)| και η φάση $\varphi(\omega)$ υπολογίζονται από:

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right]$$

3. Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier

Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier

Τα ολοκληρώματα ορισμού του ευθύ και του αντίστροφου MF δεν υπάρχουν πάντα.

Οι ικανές συνθήκες για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος είναι οι συνθήκες Dirichlet.

- **Ικανή Συνθήκη 1**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή να ισχύει:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$$

  ή με άλλα λόγια, το σήμα $x(t)$ να είναι χρονικώς πεπερασμένο δηλ. να είναι σήμα ενέργειας. Η συνθήκη αυτή είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία.

- **Ικανή Συνθήκη 2**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι συνεχής ή να περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, καθεμιά από τις οποίες να είναι πεπερασμένου ύψους.

- **Ικανή Συνθήκη 3**. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι φραγμένης κύμανσης, δηλαδή να μπορεί να παρασταθεί με καμπύλη πεπερασμένου μήκους σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

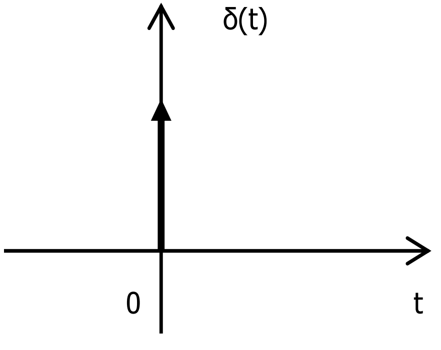
Άσκηση 1

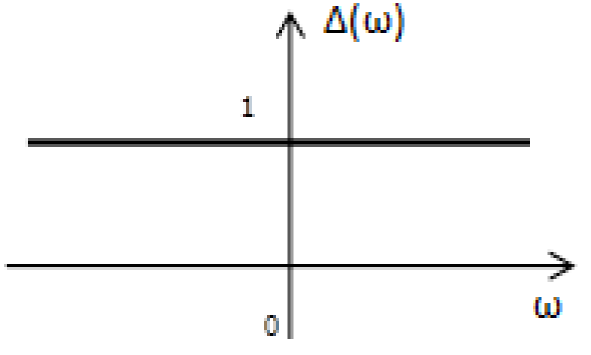
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του κρουστικού παλμού $\delta(t)$.

Απάντηση: Από τον ορισμό του MF έχουμε:

$$\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{0} = 1$$

Χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα ολίσθησης της $\delta(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\, dt = x(t_0)$





Στο φάσμα $\Delta(\omega)$ υπάρχουν άπειρες συχνότητες με μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση. Αυτό εξηγεί την σπουδαία αξία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων.

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$

<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t+1) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-1) e^{-j\omega t} dt$$

Χρησιμοποιούμε τη γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(t_0)$$

Ως συνάρτηση δοκιμής θεωρούμε την $\varphi(t) = e^{-j\omega t}$, οπότε έχουμε:

$$X(\omega) = e^{-j\omega t}\Big|_{t=-1} + e^{-j\omega t}\Big|_{t=1} = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = \cos(\omega)$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = A\, e^{-\alpha t} u(t)$

Απάντηση: Από την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier θα έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{A}{\alpha + j\omega}$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\, u(t)$

<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier και αντικαθιστώντας το συνημίτονο από τον τύπο του Euler, προκύπτει:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)\, t} \left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)\, t}\, e^{j\omega_0 t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)\, t}\, e^{-j\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-\left(\alpha + j(\omega - \omega_0)\right)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\left(\alpha + j(\omega + \omega_0)\right)t} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_0)}\right]$$

$$= \frac{\alpha + j\omega}{\alpha^2 + 2j\omega\alpha + (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού $\Pi_T(t)$ διάρκειας $2T$, δηλαδή:

$$x(t) \equiv \Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή το σήμα είναι μηδέν για $t < -T$ και $t > T$, ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

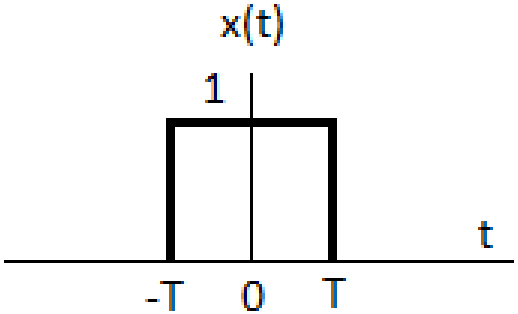
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{-j\omega}\int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}\, d(-j\omega t) =$$

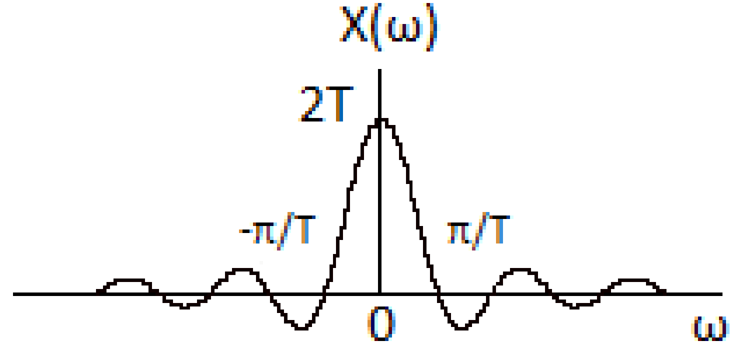
$$= \frac{j}{\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-T}^{T} = \frac{j}{\omega}\left[e^{-j\omega T} - e^{-j\omega(-T)}\right] = \frac{j}{\omega}\ [e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}\ ] = 2\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

Στην επίλυση χρησιμοποιήθηκαν οι γνωστές σχέσεις του Euler, δηλ.:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j sin\theta \ \text{ και } \ e^{-j\theta} = \cos\theta - j sin\theta$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)





Ο τετραγωνικός παλμός διάρκειας 2T και ο μετασχηματισμός Fourier του.

Παρατηρήσεις:

1. Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ γενικά είναι μία μιγαδική συνάρτηση, όμως στην περίπτωση του τετραγωνικού παλμού είναι μια πραγματική συνάρτηση.

2. Η τιμή του μετασχηματισμού Fourier στη συχνότητα μηδέν υπολογίζεται από το παρακάτω όριο:

$$X(0) = \lim_{\omega \to 0} \frac{2\sin(\omega T)}{\omega} = \lim_{\omega \to 0} 2\,T\cos(\omega T) = 2T$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

3. Οι τιμές στις οποίες μηδενίζεται το $X(\omega)$ είναι τα **φασματικά μηδενικά**, δίνονται από την εξίσωση $\sin(\omega T) = 0$ και είναι οι συχνότητες $\omega = k\pi/T$, όπου $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

4. Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier διέρχεται περιοδικά από το μηδέν και το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώνεται ασυμπτωτικά στο μηδέν.

5. Το φάσμα τείνει στο μηδέν καθώς περνάμε σε υψηλές συχνότητες, δηλαδή όταν $|\omega| \to \infty$.

Η λύση $\mathrm{X}(\omega) = 2\sin(\omega T)/\omega$ είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας $sinc(x)$.

Επομένως, ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier του μπορεί να γραφεί και ως:

$$X(\omega) = \frac{2\sin(\omega \mathrm{T})}{\omega} = 2\mathrm{T}\frac{\sin\left(\pi\frac{\omega\mathrm{T}}{\pi}\right)}{\pi\frac{\omega\mathrm{T}}{\pi}} = 2\mathrm{T}sinc\left(\frac{\omega\mathrm{T}}{\pi}\right)$$

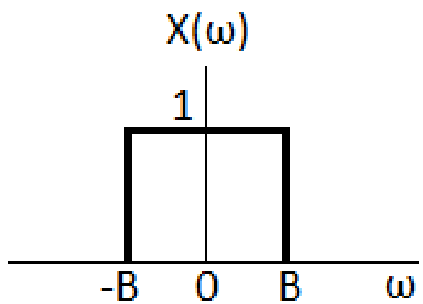
Άσκηση 6

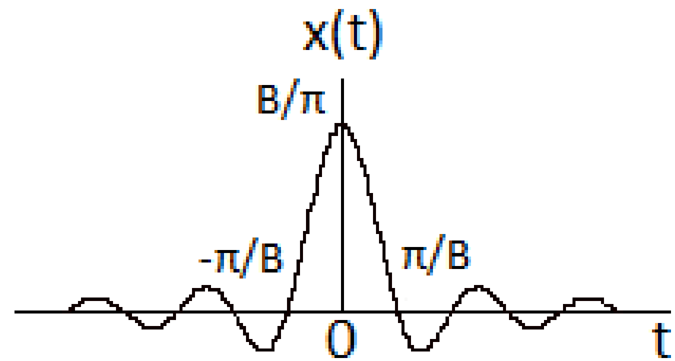
Να βρεθεί το σήμα του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι ορθογώνιο παράθυρο συχνοτήτων με πλάτος B, δηλαδή ισχύει:

$$\mathrm{X}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \mathrm{B} \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος είναι ίσος με μηδέν για $\omega < -\mathrm{B}$ και $\omega > \mathrm{B}$, το σήμα θα είναι:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{B}}^{+\mathrm{B}} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi j t} e^{j\omega t}\Big|_{-\mathrm{B}}^{+\mathrm{B}} = \frac{1}{2\pi j t} 2j\sin(\mathrm{B}t) = \frac{\sin(\mathrm{B}t)}{\pi t} = \frac{B}{\pi} sinc\left(\frac{Bt}{\pi}\right)$$





Περιγραφή του $x(t)$ στα πεδία συχνότητας και χρόνου, αντίστοιχα.

Άσκηση 6 (συνέχεια)

Παρατηρήσεις:

- Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, η λύση περιγράφεται από τη συνάρτηση δειγματοληψίας.
- Συγκρίνοντας την παρούσα και την προηγούμενη άσκηση παρατηρούμε μια μορφής **συμμετρία**, δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού (στο χρόνο) είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας (στη συχνότητα) και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού (στη συχνότητα) είναι πάλι η συνάρτηση δειγματοληψίας (στο χρόνο).

Άσκηση 7

Να προσδιοριστούν τα φάσματα πλάτους και φάσης του σήματος:

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \mu\varepsilon \quad \alpha > 0$$

<u>Απάντηση</u>: Για να υπολογίσουμε τα φάσματα πρέπει να βρεθεί ο MF. Το σήμα $x(t)$ γράφεται και ως $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$ και είναι γνωστό (άσκηση 3) ότι διαθέτει τον μετασχηματισμό Fourier :

$$X(\omega) = A/(\alpha + j\omega)$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος και τη φάση της συνάρτησης $X(\omega)$ την γράφουμε σε καρτεσιανή μορφή. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με τον όρο $\alpha - j\omega$, οπότε έχουμε:

$$X(\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega} = \frac{A}{\alpha + j\omega} . \frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} = \frac{A\alpha - jA\omega}{\alpha^2 + \omega^2} =$$

$$= \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j\,\frac{A\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

Από την παραπάνω μορφή της $X(\omega)$ προκύπτει :

- Φάσμα πλάτους:

$$|X(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{A\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{A\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2} = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

- Φάσμα φάσης:

$$\Theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{A\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)}{\left(\frac{A\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Άσκηση 8

Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\omega) = \frac{4 + 10j\omega}{-\omega^2 + 6j\omega + 8}$$

<u>Απάντηση</u>: Μετατρέπουμε τον παρανομαστή σε μορφή γινομένου και στη συνέχεια «σπάμε» το κλάσμα σε δύο επιμέρους κλάσματα, οπότε έχουμε:

$$X(\omega) = \frac{4 + 10j\omega}{(2 + j\omega)(4 + j\omega)} = -\frac{8}{2 + j\omega} + \frac{18}{4 + j\omega}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της άσκησης 3, έχουμε:

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = F^{-1}\left\{-\frac{8}{2 + j\omega}\right\} + F^{-1}\left\{\frac{18}{4 + j\omega}\right\}$$

$$= -8\, e^{-2t}\, u(t) + 18\, e^{-4t} u(t)$$

$$= [18\, e^{-4t} - 8\, e^{-2t}]\, u(t)$$

Άσκηση 9

Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\omega) = \cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right)$$

<u>Απάντηση</u>: Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler η συνάρτηση $X(\omega)$ γράφεται:

$$X(\omega) = \cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} e^{j\,[4\omega + (\pi/_3)]} + e^{-j\,[4\omega + (\pi/_3)]}$$

$$= \frac{1}{2} e^{j4\omega} e^{j\pi/_3} + \frac{1}{2} e^{-j4\omega} e^{-j\pi/_3}$$

Εισάγοντας τη μορφή αυτή στον ορισμό του αντίστροφου MF, έχουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{j\pi/_3}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t+4)}\, dt + \frac{e^{-j\pi/_3}}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-4)} dt =$$

$$= \frac{e^{j\pi/_3}}{4\pi}\delta(t+4) + \frac{e^{-j\pi/_3}}{4\pi}\delta(t-4)$$

Χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της κρουστικής συνάρτησης $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega$