Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 8: Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

1. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier
2. Θεώρημα Parseval
3. Φαινόμενο Gibbs

1. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

1. Γραμμικότητα
2. Ολίσθηση στο Χρόνο
3. Ολίσθηση στη Συχνότητα
4. Αλλαγή Κλίμακας στο Χρόνο
5. Αλλαγή Κλίμακας στη Συχνότητα
6. Ανάκλαση
7. Συζυγία
8. Συμμετρία
9. Παραγώγιση
10. Ολοκλήρωση
11. Ιδιότητα της Συνέλιξης
12. Πολλαπλασιασμός
13. Άρτιο/Περιττό Μέρος Σήματος Πραγματικό/Φανταστικό Μέρος Φάσματος

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (1/10)

1. Γραμμικότητα

Αν $x_i(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_i(\omega)$ και c_i αυθαίρετη (πραγματική ή μιγαδική) σταθερά και $i = 1,2, \dots n$, τότε ισχύει:

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega) + \cdots + c_n X_n(\omega)$$

Η σχέση δηλώνει ότι ο ΜF ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων επιμέρους ΜF για κάθε συνάρτηση.

2. Ολίσθηση στο Χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(\omega) = |X(\omega)| \; e^{j\varphi(\omega) - \omega t_0}$$

Η σχέση δείχνει πως αν το σήμα μετατοπιστεί στο χρόνο κατά t_0, τότε το φάσμα του πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $e^{-j\omega t_0}$.

Έτσι το φάσμα ενός σήματος ολισθημένου στο χρόνο έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό σήμα, ενώ η φάση του αλλάζει γραμμικά.

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί η ιδιότητα της χρονικής ολίσθησης του μετασχηματισμού Fourier.

Απάντηση: Σύμφωνα με τον ορισμό, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t-t_0)$ είναι:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j\omega t}\, dt$$

Θέτοντας $\lambda = t - t_0$, έχουμε:

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda}\, e^{-j\omega t_0}\, d\lambda =$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda} d\lambda = e^{-j\omega t_0}\, X(\omega)$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \Pi_T(t + 2T) + \Pi_T(t - 2T)$$

<u>Απάντηση</u>: Γνωρίζουμε ότι :

$$\Pi_T(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

Με βάση την παρατήρηση αυτή και τις ιδιότητες γραμμικότητας και ολίσθησης στο χρόνο, έχουμε:

$$\mathcal{F}\{\, x(t)\,\} = \mathcal{F}\{\, \Pi_T(t + 2T)\,\} + \mathcal{F}\{\, \Pi_T(t - 2T)\,\} =$$

$$= e^{j2\omega T}\,\frac{2\,sin\,\omega T}{\omega} + e^{-j2\omega T}\,\frac{2\,sin\,\omega T}{\omega}$$

$$= \frac{2\,sin\,\omega T}{\omega}\left(e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T}\right)$$

$$= \frac{4\,sin\,\omega T}{\omega}\,cos\,2\omega T$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (2/10)

3. Ολίσθηση στη Συχνότητα

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό ω_0 ισχύει:

$$e^{j\omega_0 t}\, x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$$

Παρατηρούμε πως ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x(t)$ με τον όρο $e^{j\omega_0 t}$ μετατοπίζει το φάσμα του σήματος κατά ω_0.

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική για τις τηλεπικοινωνίες, επειδή ορίζει μαθηματικά τη διαδικασία της **διαμόρφωσης**.

Άσκηση 3

Να αποδειχθεί η ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier.

<u>Απάντηση</u>: Σύμφωνα με τον ορισμό, ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)\ e^{j\omega_0 t}$ είναι:

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\ e^{j\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{j\omega_0 t}\ e^{-j\omega t}\ dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\ e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = X(\omega - \omega_0)$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$.

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler, το σήμα $y(t)$ γράφεται:

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) = x(t)\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\, x(t)\, e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_0 t}$$

Με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης συχνότητας, ο MF του $y(t)$ είναι:

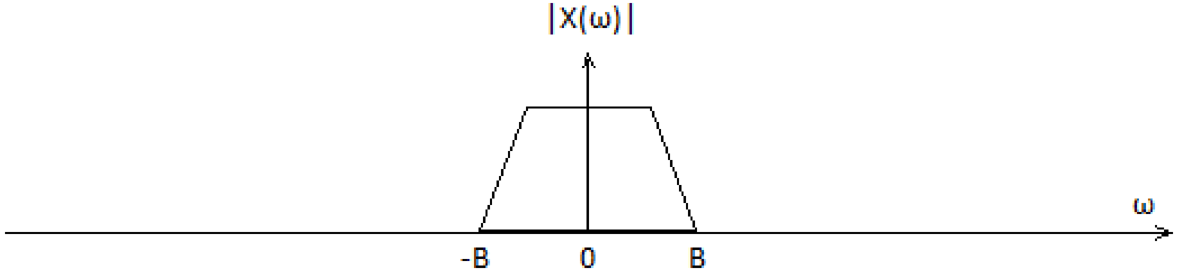
$$Y(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\, x(t)\, e^{j\omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_0 t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\right]$$

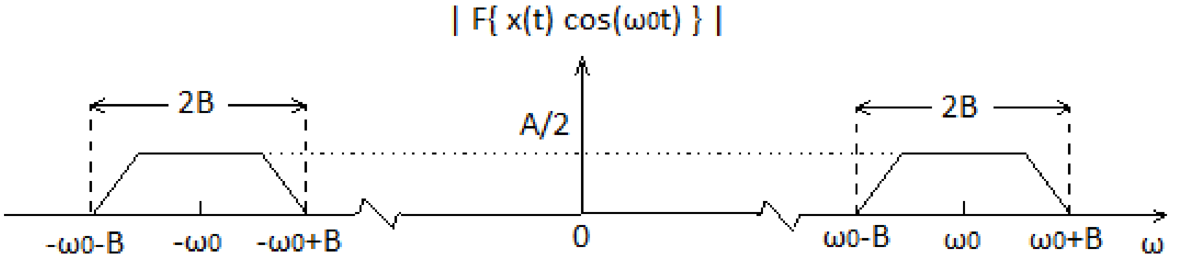
Άσκηση 4 (συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι πολλαπλασιασμός του σήματος $x(t)$ με το $\cos(\omega_0 t)$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του $X(\omega)$, απλά το φάσμα $X(\omega)$ του σήματος **μεταφέρεται** στη περιοχή των συχνοτήτων $\pm\omega_0$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **διαμόρφωση**.

Φάσμα αρχικού σήματος



Φάσμα διαμορφωμένου σήματος



Κατά τη διαμόρφωση ένα σήμα $x(t)$ που μεταφέρει χρήσιμη πληροφορία πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας $\cos(\omega_0 t)$, που ονομάζεται **φέρον σήμα**, με σκοπό τη μετάδοσή του μέσα από ένα κανάλι μετάδοσης.

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) \; = \; cos(\omega_0 t)\, u(t)$.

Απάντηση: Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler το σήμα γράφεται:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας και επειδή γνωρίζουμε ότι ισχύει $u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$, βρίσκουμε τον MF του σήματος $x(t)$ από τη σχέση:

$$cos(\omega_0 t) u(t) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \pi\delta(\omega-\omega_0)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega+\omega_0)} + \pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Άσκηση 6

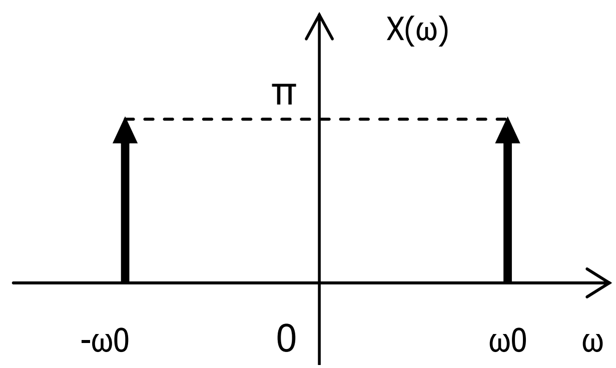
Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = cos(\omega_0 t)$.

<u>Απάντηση</u>: Χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler εκφράζουμε το συνημίτονο ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών όρων, δηλαδή:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

Από την ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας και επειδή $1 \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$, βρίσκουμε τον MF του $x(t)$:

$$cos(\omega_0 t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



Φασματική πλάτους του $x(t) = cos(\omega_0 t)$. Το φάσμα φάσης είναι μηδενικό.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \Pi_T(t)\ cos(\omega_0 t)$.

<u>Απάντηση</u>: Από τη σχέση του Euler γνωρίζουμε $cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$

Επομένως, το δοθέν σήμα $x(t)$ γράφεται:

$$x(t) = \Pi_T(t) \left[\frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}\right] = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \Pi_T(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \Pi_T(t)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι :

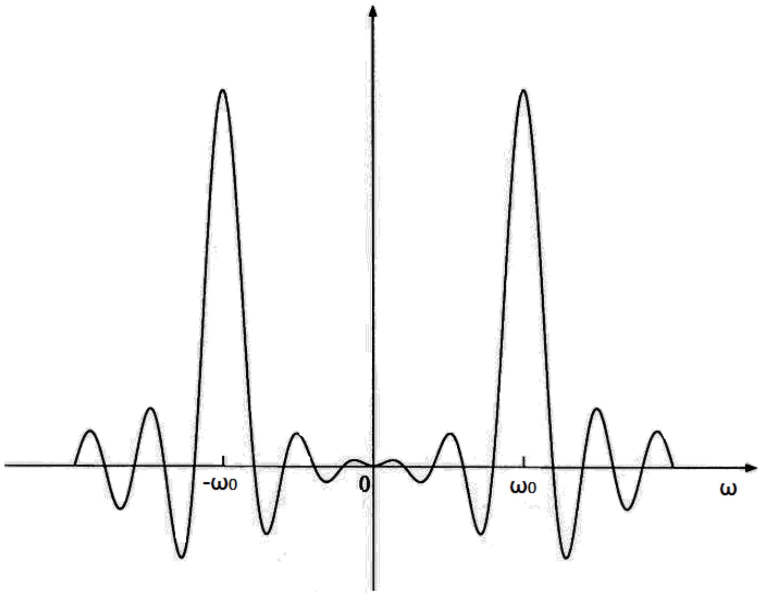
$$\Pi_T(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\ sin(\omega T)}{\omega}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα, έχουμε:

$$x(t) \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \frac{sin(\omega - \omega_0)T}{(\omega - \omega_0)} + \frac{sin(\omega + \omega_0)T}{(\omega + \omega_0)}$$

Άσκηση 7 (συνέχεια)

- Ο MF αποτελείται από δύο **συναρτήσεις δειγματοληψίας**, τοποθετημένες στις συχνότητες $-\omega_0$ και ω_0.
- Παρατηρείται διάχυση του φάσματος του σήματος σε συχνότητες εκατέρωθεν της συχνότητας $\pm\omega_0$ του συνημιτόνου.
- Το φαινόμενο αυτό είναι ανεπιθύμητο, ειδικά στην περίπτωση που θέλουμε να εντοπίσουμε την ακριβή θέση της συχνότητας περισσοτέρων του ενός συνημιτόνων.



- Η διαπίστωση ότι η παραθύρωση προκαλεί παραμόρφωση στο φάσμα είναι πολύ σημαντική επειδή η παραθύρωση είναι μία συχνά χρησιμοποιούμενη διαδικασία στην επεξεργασία των σημάτων, προκειμένου να λάβουμε και να επεξεργαστούμε τμήματα των σημάτων.
- Η ελαχιστοποίηση της επίδρασης του παραθύρου επιτυγχάνεται με αύξηση της διάρκειας T του παραθύρου, επειδή αυτό οδηγεί στη μείωση της διάρκειας των λοβών της συνάρτησης δειγματοληψίας.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (3/10)

4. Αλλαγή Κλίμακας στο Χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α ($\alpha \neq 0$), ισχύει:

$$x(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5. Αλλαγή Κλίμακας στη Συχνότητα

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α ($\alpha \neq 0$), ισχύει:

$$\frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(a\omega)$$

Το σπουδαίο συμπέρασμα των παραπάνω δύο ιδιοτήτων είναι ότι η αλλαγή της κλίμακας του χρόνου επηρεάζει αντιστρόφως ανάλογα την έκταση του μετασχηματισμού Fourier.

Έτσι μπορούμε να «στενεύουμε» ή να «πλατύνουμε» το φάσμα του σήματος με διεύρυνση ή στένευση του χρόνου αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη κλίμακα.

Απεικόνιση της αλλαγής κλίμακας στο χρόνο και στη συχνότητα

(α) Σήμα $x(t)$ και το φάσμα του $X(\omega)$.

(β) Σήμα $x_1(t) = x(\alpha t)$ με $\alpha > 1$ και το φάσμα του $X_1(\omega)$.

Αν $\alpha > 1$, το σήμα μεταβάλλεται πιο γρήγορα στο χρόνο, γεγονός που αντιστοιχεί σε υψηλότερες συχνότητες στο πεδίο συχνοτήτων, άρα, το φάσμα του διαστέλλεται (σχήμα β).

(γ) Σήμα $x_2(t) = x(\alpha t)$ με $0 < \alpha < 1$ και το φάσμα του $X_2(\omega)$.

Αντίθετα, όταν $0 < \alpha < 1$, το σήμα μεταβάλλεται πιο αργά στο χρόνο, γεγονός που αντιστοιχεί σε σήμα χαμηλής συχνότητας, άρα το φάσμα του συμπιέζεται (σχήμα γ).

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (4/10)

6. Ανάκλαση

Αν στην ιδιότητα αλλαγής κλίμακας στο χρόνο θέσουμε $\alpha = -1$, προκύπτει η ιδιότητα της ανάκλασης:

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$$

7. Συζυγία

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ τότε ισχύει:

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega) \text{ και } x^*(-t) \xleftrightarrow{F} X^*(\omega)$$

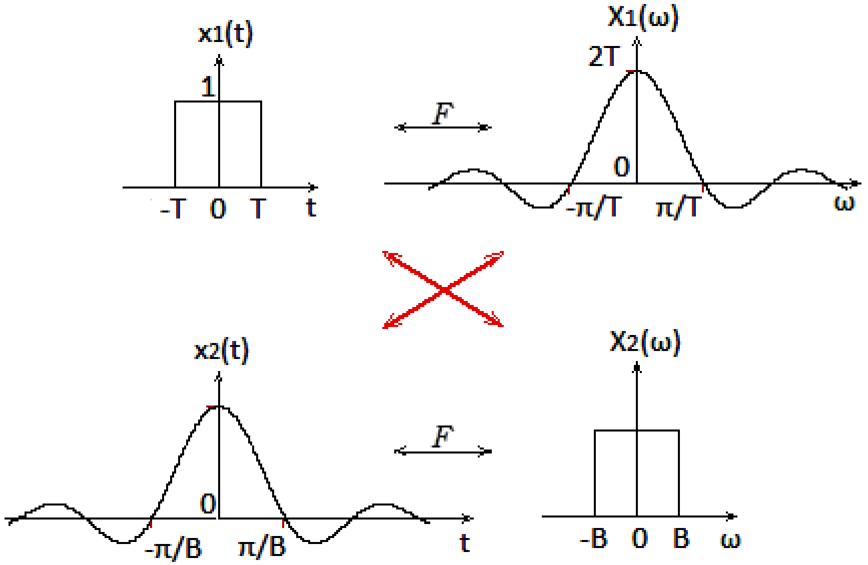
Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (5/10)

8. Συμμετρία (δυϊσμός)

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε το σήμα $y(t) = X(t)$ έχει MF: $Y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$

<u>Επεξήγηση</u>: Αν ο MF της $x(t)$ είναι η Χ(ω), τότε ο MF μίας συνάρτησης $X(t)$ είναι η $2\pi x(-\omega)$.

Ο συμβολισμός $X(t)$ σημαίνει ότι δημιουργούμε μία συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή t, η οποία έχει όμως τη μορφή και τη μαθηματική έκφραση της $X(\omega)$.



Επίσης $2\pi x(-\omega)$ σημαίνει ότι έχουμε μία συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή ω (για την ακρίβεια $-\omega$), η οποία έχει όμως τη μορφή της $x(t)$.

Άσκηση 8

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = 1$

<u>Απάντηση</u>:

Γνωρίζουμε ότι $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας του δυϊσμού, βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = 1$ είναι:

$$X(\omega) = 2\pi\ \delta(-\omega) = 2\pi\ \delta(\omega)$$

Άσκηση 9

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{j\alpha t}$

<u>Απάντηση</u>: Α’ τρόπος - Από την εξίσωση ορισμού του ΜF βρίσκουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\alpha t}\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\alpha-\omega)t}\, dt = 2\pi\, \delta(\omega-\alpha)$$

Β’ τρόπος – Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα, δηλ. $F\left\{e^{j\omega_0 t}x(t)\right\} = X(\omega-\omega_0)$ και το αποτέλεσμα $F\{1\} = 2\pi\, \delta(\omega)$ της προηγούμενης άσκησης.

Ορίζοντας τη συνάρτηση $y(t) = 1 \cdot x(t) = e^{j\alpha t} \cdot 1$ θα έχουμε:

$$Y(\omega) = F\left\{e^{j\alpha t} \cdot 1\right\} = F\{1\}_{\omega \to \omega-\alpha} = 2\pi\, \delta(\omega-\alpha)$$

Καταλήγουμε έτσι στο ίδιο αποτέλεσμα που προέκυψε από την τετριμμένη μέθοδο υπολογισμού.

Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε ότι $F\{e^{-j\alpha t}\} = 2\pi\, \delta(\omega+\alpha)$.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (6/10)

9. Παραγώγιση

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ και ο MF της παραγώγου $d^n x(t)/dt^n$ υπάρχει, τότε αυτός υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\omega X(\omega)$$

ή γενικότερα:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n X(\omega)$$

και για το πεδίο συχνοτήτων:

$$(-jt)^k x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{d^k X(\omega)}{d\omega^k}$$

Άσκηση 10

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης μοναδιαίου τριγωνικού παλμού διάρκειας 2Τ, που δίνεται από τη σχέση:

$$\Lambda_{\mathrm{T}}\,(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\mathrm{T}}, & t < |\mathrm{T}| \\ 0, & t > |\mathrm{T}| \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Η συνάρτηση μοναδιαίου τριγωνικού παλμού μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συναρτήσεων μοναδιαίας κλίσης (ράμπας), σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Lambda_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}\;[r(t+T) - 2r(t) + r(t-T)]$$

Υπολογίζουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης:

$$\Lambda'_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}[u(t+T) - 2u(t) + u(t-T)]$$

$$\Lambda''_{\mathrm{T}}(t) = \frac{1}{T}[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)]$$

Άσκηση 10 (συνέχεια)

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός Fourier της $\Lambda_{\mathrm{T}}(t)$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης, δηλαδή:

$$F\{\Lambda_{\mathrm{T}}(t)\} = F\left\{\frac{1}{(j\omega)^2}\Lambda_{\mathrm{T}}(t)\right\} = F\left\{\frac{1}{(j\omega)^2}\left[\frac{1}{T}[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)]\right]\right\}$$

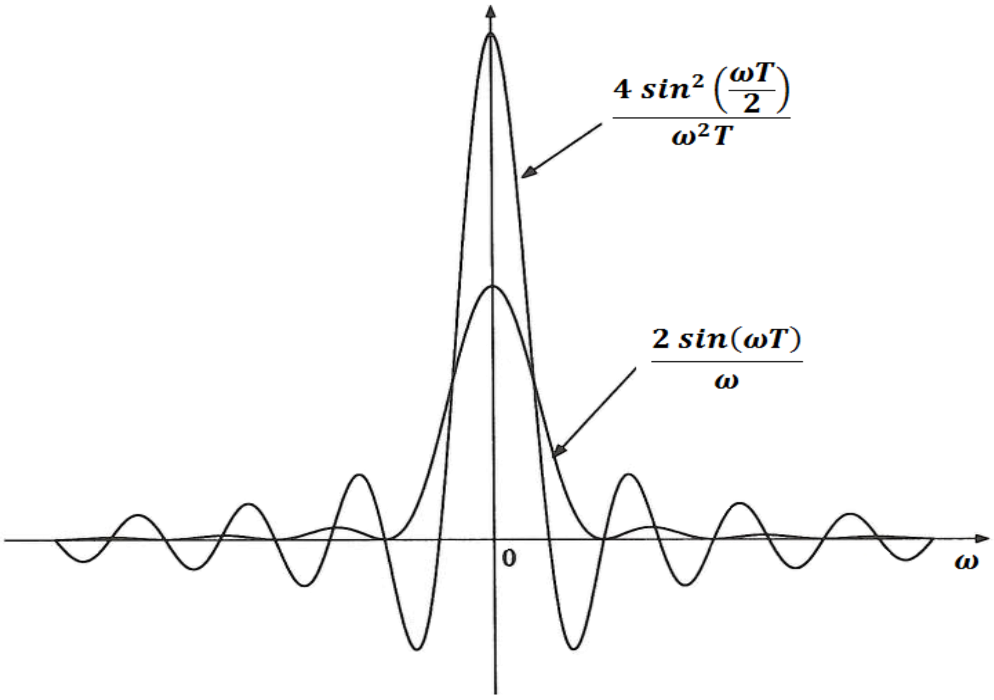
$$= \frac{1}{\omega^2 \mathrm{T}}\,(2 - e^{j\omega\mathrm{T}} - e^{-j\omega\mathrm{T}}) = \cdots = 4\,\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2\mathrm{T}}$$

Θυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού διάρκειας 2T είναι:

$$\Pi_{\mathrm{T}}(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

Άσκηση 10 (συνέχεια)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι μετασχηματισμοί Fourier του τετραγωνικού και του τριγωνικού παλμού (παραθύρου).



Φασματική αναπαράσταση τετραγωνικού και τριγωνικού παραθύρου

Στην περίπτωση του τριγωνικού παλμού, ο κεντρικός λοβός είναι μεγαλύτερου πλάτους ενώ οι δευτερεύοντες λοβοί είναι μικρότερου πλάτους.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (7/10)

10. Ολοκλήρωση

Αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}\, \mathrm{X}(\omega) + \pi\, X(0)\, \delta(\omega)$$

11. Συνέλιξη

Σύμφωνα με αυτή, ο ΜF της συνέλιξης δύο ΓΧΑ σημάτων ισούται με το γινόμενο των επιμέρους ΜF των σημάτων.

Συγκεκριμένα, αν $x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ και $x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$, τότε:

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)\, X_2(\omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (8/10)

Σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$, το οποίο διεγείρεται από είσοδο $x(t)$, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνέλιξης:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ και $h(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} H(\omega)$, τότε από την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(\omega) = H(\omega)\,X(\omega)$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το φάσμα της απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος όταν γνωρίζουμε το φάσμα του σήματος εισόδου $X(\omega)$ και το φάσμα $H(\omega)$ της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος.

Επομένως, η υπολογιστικά δύσκολη σχέση της συνέλιξης μετασχηματιζόμενη κατά Fourier καταλήγει σε ένα απλό γινόμενο συναρτήσεων.

Επιπλέον, η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική επειδή αποτελεί τη βάση για το σχεδιασμό ΓΧΑ συστημάτων στο πεδίο συχνοτήτων (αναλογικά φίλτρα).

Άσκηση 11

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της μοναδιαίας συνάρτησης $u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Η συνάρτηση $u(t)$ γράφεται ως:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt$$

Γνωρίζουμε ότι $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας της ολοκλήρωσης, βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου βήματος είναι:

$$u(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} U(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Άσκηση 12

Να αποδειχθεί η ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier.

<u>Απάντηση</u>: Η συνέλιξη δύο γραμμικών και χρονικά αμετάβλητων (ΓΧΑ) σημάτων δίνεται από τη σχέση:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

Στην παραπάνω σχέση κάνοντας χρήση του ορισμού του MF, έχουμε:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_1(t) * x_2\,(t)]\;\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau \right) e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\tau)\;\, e^{-j\omega t}\, dt \right) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, \mathrm{X}_2(\omega)\;\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = X_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\;\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$= X_2(\omega)\, X_1(\omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (9/10)

12. Πολλαπλασιασμός

Ανάλογη ιδιότητα ισχύει και προς την αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή για τη συνέλιξη των MF $X(\omega)$ και $Y(\omega)$ των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$.

Συγκεκριμένα, αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ και $y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(\omega)$ και $Z(\omega) = X(\omega) * Y(\omega)$, τότε ισχύει:

$$x(t)\, y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * Y(\omega)\right]$$

Άσκηση 13

Να αποδειχθεί η ιδιότητα του πολλαπλασιασμού του μετασχηματισμού Fourier.

<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, έχουμε:

$$X(\omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{X}_1(\omega) * X_2(\omega)]\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}_1(\lambda)\, X_2(\omega-\lambda) d\lambda \right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

θέτουμε $\omega - \lambda = \rho$ και αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, οπότε έχουμε:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}_1(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\rho)\, e^{j(\lambda+\rho)t}\, d\rho \right) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{X}_1(\lambda)\, e^{j\lambda t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\rho)\, e^{j\rho t}\, d\rho \right) d\lambda =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_2(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \right) = 2\pi\, x_1(t)\, x_2(t)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier (10/10)

13. Άρτιο/Περιττό Μέρος Σήματος - Πραγματικό/Φανταστικό Μέρος Φάσματος

Είναι γνωστό ότι κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου $x_e(t)$ και ενός περιττού σήματος $x_o(t)$. Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε ισχύει:

$$x_e(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Re\{X(\omega)\}$$

$$x_o(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} j\ Im\{X(\omega)\}$$

Όπου η συνάρτηση $Re\{\ \}$ επιστρέφει το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης Χ(ω) και η συνάρτηση $Im\{\ \}$ το φανταστικό.

Άσκηση 14

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|}$, όπου $a > 0$.

<u>Απάντηση</u>: Θεωρούμε αρχικά το σήμα $g(t) = e^{-at}u(t)$. Ο MF αυτού δίνεται από τη σχέση:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\, u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

Το σήμα $g(t)$ αναλύεται σε άθροισμα άρτιας και περιττής συνιστώσας, δηλ. $g(t) = g_e(t) + g_0(t)$. Η άρτια συνιστώσα $g_e(t)$ είναι $g_e(t) = \frac{g(t)+g(-t)}{2} = \frac{e^{-a|t|}}{2}$ και ισχύει $x(t) = 2\, g_e(t)$.

Ο MF του $g_e(t)$ βρίσκεται από την τελευταία ιδιότητα του MF, δηλ. $F\{g_e(t)\} = R_e[G(\omega)]$. Άρα:

$$G_e(\omega) = R_e[G(\omega)] = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

Τέλος, κάνοντας χρήση της ιδιότητας της γραμμικότητας του MF, βρίσκουμε:

$$X(\omega) = 2\, G_e(\omega) = \frac{2\, a}{a^2 + \omega^2}$$

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier (1/2)

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Γραμμικότητα	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
Ολίσθηση στο χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Ολίσθηση στη συχνότητα	$e^{j\omega t_0} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Συμμετρία. Αν $(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega)$	$y(t) = X(t)$	$Y(\omega) = 2\pi x(-\omega)$
Πολλαπλασιασμός (Διαμόρφωση)	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$
Συνέλιξη	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)\, X_2(\omega)$
Αλλαγή κλίμακας	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\omega)$

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier (2/2)

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega)\delta(\omega)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$t\, x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Άρτιο μέρος σήματος Πραγματικό μέρος φάσματος	$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(-t)]$	$Re\{X(\omega)\}$
Περιττό μέρος σήματος Φανταστικό μέρος φάσματος	$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x^*(-t)]$	$jIm\{X(\omega)\}$
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\omega)$

2. Θεώρημα Parseval

Θεώρημα Parseval (1/2)

- Το θεώρημα εκφράζει τη **διατήρηση της ενέργειας στο πεδίο των συχνοτήτων**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- Η ολική ενέργεια ενός σήματος μπορεί να υπολογιστεί ισοδύναμα είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο της συχνότητας.

- Στο πεδίο του χρόνου υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα χρονικού διαστήματος $|x(t)|^2$ και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε για όλη τη διάρκεια του σήματος.

- Στο πεδίο της συχνότητας υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα κυκλικής συχνότητας $|X(\omega)|^2/2\pi$ και κατόπιν ολοκληρώνουμε για όλες τις συχνότητες.

Θεώρημα Parseval (2/2)

- Η συνάρτηση $S_x(\omega) = |X(\omega)|^2$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ενέργειας** (energy density spectrum) του σήματος $x(t)$ και εκφράζει την **ενέργεια ανά εύρος ζώνης ενός rad** του σήματος για διάφορες συχνότητες.

- Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που συνεισφέρουν οι συχνότητες από f_1 έως f_2 αρκεί να ολοκληρώσουμε την $|X(\omega)|^2$ μεταξύ αυτών των δύο συχνοτήτων, δηλαδή:

$$E_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{f_1}^{f_2} |X(\omega)|^2 d\omega$$

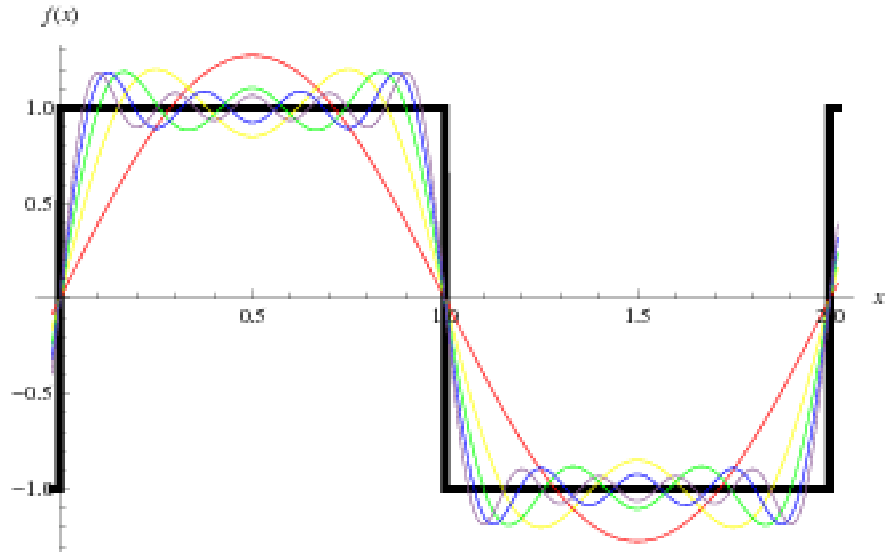
3. Φαινόμενο Gibbs

Φαινόμενο Gibbs

Φαινόμενο Gibbs: Αν η συνάρτηση $x(t)$ που επεκτείνουμε (με σειρά ή μετ/σμό Fourier) παρουσιάζει ασυνέχειες, τότε στο ανάπτυγμα εμφανίζονται κυματισμοί, το πλάτος των οποίων κορυφώνεται στα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης.

- Οφείλεται στο γεγονός ότι σε κάθε χρονική στιγμή t το ανάπτυγμα Fourier συγκλίνει στην τιμή της συνάρτησης $x(t)$ εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, στα οποία συγκλίνει στον **μέσο όρο** των τιμών της συνάρτησης στις δύο πλευρές της ασυνέχειας.

- Καθώς η μεταβλητή t τείνει προς τις θέσεις της ασυνέχειας, το πλήθος N των όρων του αναπτύγματος πρέπει να αυξάνεται, έτσι ώστε το σφάλμα προσέγγισης να είναι μικρότερο από κάποιο όριο.



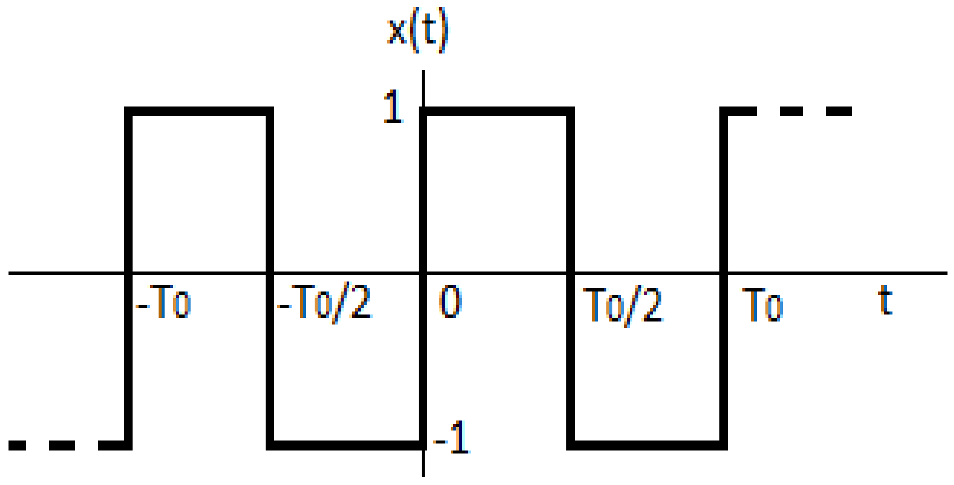
- Αυτό σημαίνει ότι το πλήθος των ταλαντώσεων θα αυξάνει, όμως το μέγιστο πλάτος των ταλαντώσεων θα παραμένει σταθερό και περίπου ίσο με 18%.

Άσκηση 15

Να υπολογιστεί η τριγωνομετρική σειρά Fourier (μορφή Α’) της περιοδικής παλμοσειράς:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -\dfrac{\mathrm{T}_0}{2} < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \dfrac{\mathrm{T}_0}{2} \end{cases} \quad \kappa\alpha\iota \;\; x(t) = x(t + T_0)$$

<u>Απάντηση</u>: Η γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ είναι:



Άσκηση 15 (συνέχεια)

Οι συντελεστές a_0, a_n, b_n που περιγράφουν την Α' τριγωνομετρικής μορφή, είναι:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\ dt\right] = \frac{1}{T_0}\left[-\frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{2}\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\mathrm{T}_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)\cos(n\omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\cos(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\mathrm{T}_0}\left[-\frac{1}{n\omega_0}\left[\sin(n\omega_0 t)\right]_{-T_0/2}^{0} + \frac{1}{n\omega_0}\left[\sin(n\omega_0 t)\right]_{0}^{T_0/2}\right] = 0$$

Άσκηση 15 (συνέχεια)

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\mathrm{T}_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)\sin(n\omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\sin(n\omega_0 t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{n\omega_0 \mathrm{T}_0}\left[[\cos(n\omega_0 t)]_{-T_0/2}^{0} - [\cos(n\omega_0 t)]_{0}^{T_0/2}\right] = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi))$$

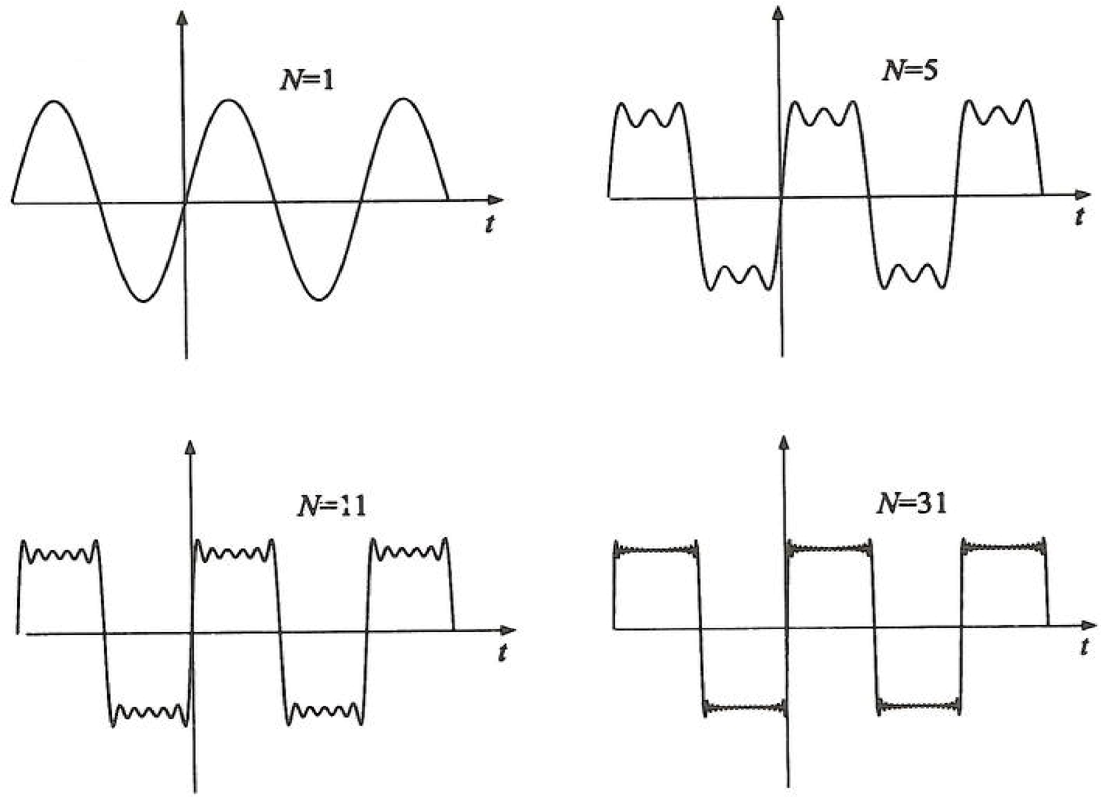
$$= \begin{cases} 0, & n\ \alpha\rho\tau\iota o\varsigma \\ \dfrac{4}{n\pi}, & n\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau \acute{o}\varsigma \end{cases}$$

Επομένως, το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της $x(t)$ είναι:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin n\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3n\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5n\omega_0 t + \cdots\right)$$

Άσκηση 16 (συνέχεια)

Στο σχήμα δίνονται διαδοχικοί υπολογισμοί του αναπτύγματος της $x(t)$ για $\mathrm{N} = 1, 5, 11, 31$ πρώτων αρμονικών



- Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση βελτιώνεται καθώς αυξάνεται το N.
- Οι ταλαντώσεις (αναλλοίωτου πλάτους) παραμένουν στα σημεία ασυνέχειας $n\frac{T_0}{2}$ $, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ως αποτέλεσμα του φαινομένου Gibbs. Αυτές θα πάψουν να εμφανίζονται όταν το N πάρει την τιμή άπειρο.

4. Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\ \delta(\omega)$
A	$2\pi A\ \delta(\omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\ \delta(\omega - \omega_0)$
$cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$sin(\omega_0 t)$	$-\pi j\ [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T \\ 0, & \lvert t\rvert > T \end{cases}$	$2\dfrac{sin(\omega T)}{\omega}$
$\dfrac{sin(\omega_0 t)}{\pi t}$	$\begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_0 \\ 0, & \lvert\omega\rvert > \omega_0 \end{cases}$
$e^{-at}u(t), \quad Re(a) > 0$	$\dfrac{1}{\alpha + j\omega}$
$t\, e^{-at}u(t), \quad Re(a) > 0$	$\dfrac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \quad Re(a) > 0$	$\dfrac{1}{(\alpha + j\omega)^n}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$