Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 9: Μελέτη ΓΧΑ Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Fourier

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μελέτη ΓΧΑ Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Fourier

1. Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος
2. Σχέση Σειράς Fourier και Μετασχηματισμού Fourier
3. Μελέτη Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Fourier
   - Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος
   - Αναπαράσταση πλάτους – φάσης της απόκρισης συχνότητας
   - Απόκριση ΓΧΑ Συστήματος σε Ημιτονοειδή Είσοδο
   - Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με Μετασχηματισμό Fourier

1. Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος (1/3)

- Υπάρχουν σήματα, όπως περιοδικές, κρουστικές, βηματικές συναρτήσεις, κλπ, που δεν υπακούουν στις συνθήκες Dirichlet, αλλά έχουν μετασχηματισμό Fourier.
- Τα περισσότερα από τα σήματα αυτά έχουν άπειρη ενέργεια αλλά συχνά η ισχύς τους $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt$ είναι πεπερασμένη (σήματα ισχύος).
- Τα σήματα αυτά μπορούν να έχουν μετασχηματισμό Fourier αν επιτραπεί η παρουσία κρουστικών συναρτήσεων σε αυτόν.
- Άλλωστε οι MF των περιοδικών σημάτων $e^{j\omega t}, cos(\omega_0 t),\ sin(\omega_0 t)$ περιέχουν κρουστικές συναρτήσεις.
- Δοθέντος ενός περιοδικού σήματος $x(t)$, ορίζουμε το **«αποκομμένο»** (truncated) σήμα $x_T(t)$ που προκύπτει από μία περίοδο του $x(t)$, από τη σχέση:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος (2/3)

- Αποδεικνύεται ότι ο MF ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ είναι ένα άπειρο άθροισμα **όρων**, που καθένας τους είναι το **γινόμενο** του MF της «αποκομμένου» σήματος $x_T(t)$ επί μία μετατοπισμένη στη συχνότητα κρουστική συνάρτηση $\delta(\omega)$.

- Μαθηματικά ο MF ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ περιγράφεται από τη σχέση:

$$X(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

όπου με $X_T(\omega)$ συμβολίζεται ο MF του «αποκομμένου» (truncated) σήματος $x_T(t)$.

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος (3/3)

- Αποδεικνύεται ότι οι όροι (γινόμενα) αυτοί είναι ίσοι με τους **συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier** του περιοδικού σήματος, δηλαδή:

$$X_n = \omega_0 \, X_T(n\omega_0)$$

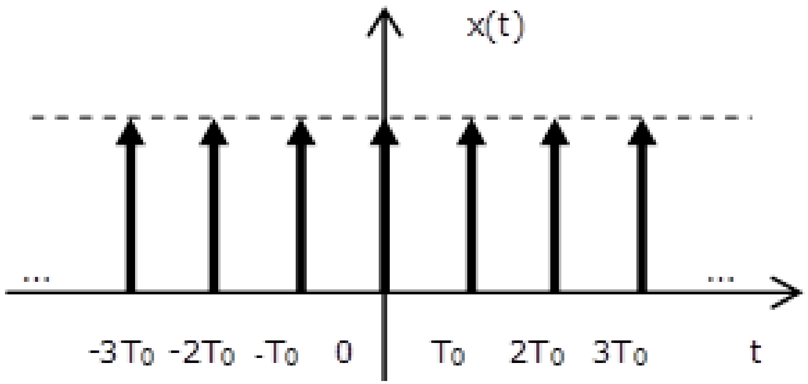
- Η σχέση αυτή υποδεικνύει έναν απλούστερο τρόπο υπολογισμού των συντελεστών της σειράς Fourier μίας περιοδικής συνάρτησης $x(t)$.

- Συγκεκριμένα:

  1. Από το περιοδικό σήμα $x(t)$ υπολογίζουμε το «αποκομμένο» σήμα $x_T(t)$.
  2. Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος $x_T(t)$, χρησιμοποιώντας είτε τον ορισμό είτε τις ιδιότητες του MF.
  3. Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος στις συχνότητες $\omega_0 = 2\pi n/T_0$ για να βρούμε τη n −στή αρμονική και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε επί ω_0.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του «τραίνου» κρουστικών παλμών



<u>Απάντηση</u>: Το σήμα αυτό είναι μία περιοδική συνάρτηση και εκφράζεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

Εφόσον το $x(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση, το ανάπτυγμά του σε εκθετική μορφή σειράς Fourier, είναι:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{όπου } \omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}_0}$$

Οι συντελεστές X_n της εκθετικής μορφής σειράς Fourier δίνονται από:

$$X_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\mathrm{T}_0/2}^{\mathrm{T}_0/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{\mathrm{T}_0}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

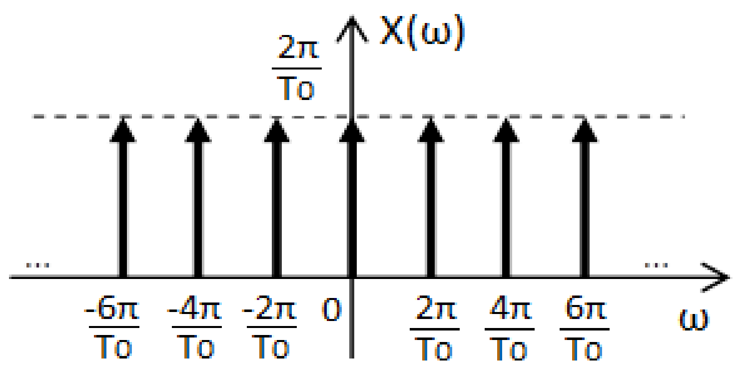
Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε ότι το $x(t)$ γράφεται ως:

$$x(t) = \frac{1}{\mathrm{T}_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

και υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Fourier, έχουμε:

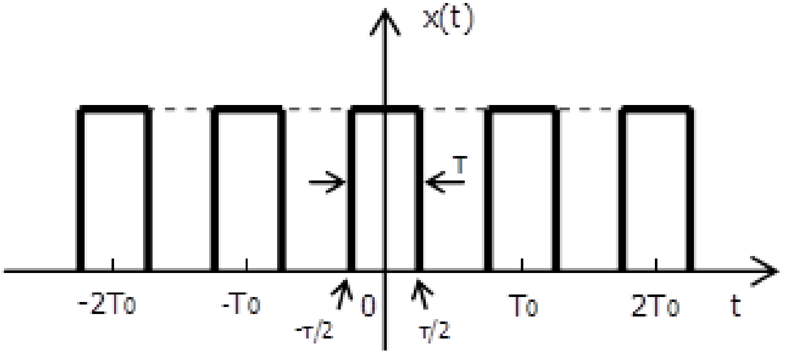
$$X(\omega) = \frac{1}{\mathrm{T}_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left\{e^{jn\omega_0 t}\right\} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Επομένως, ο ζητούμενος MF ενός τραίνου κρουστικών συναρτήσεων είναι πάλι ένα τραίνο κρουστικών συναρτήσεων.



Άσκηση 2

Να υπολογιστεί ο ΜF του περιοδικού τετραγωνικού σήματος $x(t)$ με διάρκεια παλμού τ και περίοδο T_0.



<u>Απάντηση</u>: Ακολουθούμε την ίδια μέθοδο επίλυσης με την προηγούμενη άσκηση. Το δοθέν περιοδικό τετραγωνικό σήμα αναπτύσσεται στη σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

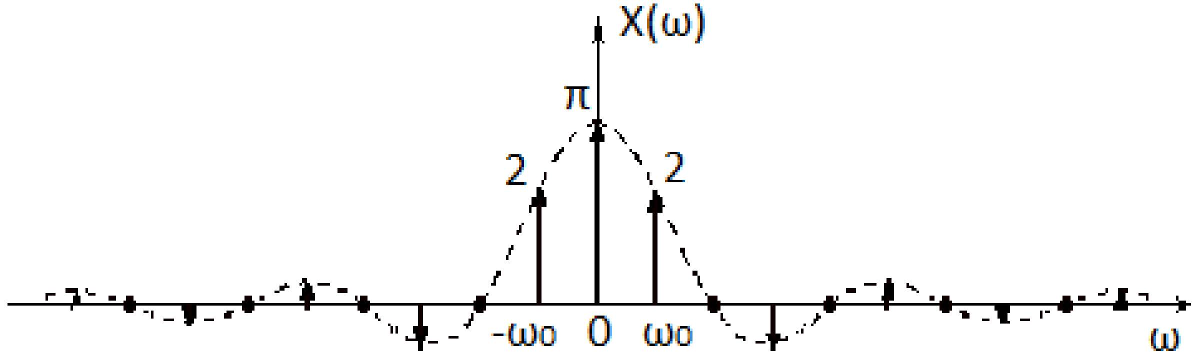
όπου:

$$a_n = \frac{\tau\omega_0}{2\pi}\frac{\sin\left(\frac{n\omega_0 t}{2}\right)}{\left(\frac{n\omega_0 t}{2}\right)} = \frac{\tau\omega_0}{2\pi}\, sinc\left(\frac{n\omega_0 t}{2}\right)$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Λόγω γραμμικότητας του MF και επειδή ισχύει $e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, βρίσκουμε τον MF του περιοδικού σήματος από τη σχέση:

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, \delta(\omega - n\omega_0)$$



Το φάσμα του περιοδικού τετραγωνικού σήματος

2. Σχέση Σειράς Fourier και Μετασχηματισμού Fourier

Σχέση Σειράς Fourier και Μετασχηματισμού Fourier

- Η απεικόνιση ενός σήματος είτε σε σειρά Fourier είτε σε μετασχηματισμό Fourier, αποτελεί το ανάπτυγμα του σήματος σε **άθροισμα σημάτων απλών συχνοτήτων**.
- Αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει ως το **όριο** της σειράς Fourier καθώς η περίοδος του σήματος $T_0 \to \infty$.
- Αυτό συμβαίνει επειδή η απόσταση μεταξύ των αρμονικών του διακριτού φάσματος της σειράς Fourier συνεχώς μικραίνει και τείνει στο μηδέν, οπότε το φάσμα του μετασχηματισμού Fourier γίνεται συνεχές.
- Για περιοδικά σήματα το ανάπτυγμα σε σήματα απλών συχνοτήτων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της σειράς Fourier.
- Για μη περιοδικά σήματα αν επιθυμούμε το ανάπτυγμα σε σήματα απλών συχνοτήτων σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε απαιτείται ο μετασχηματισμός Fourier. Αν μας ενδιαφέρει η ανάλυση σε ένα πεπερασμένου εύρους διάστημα, τότε επιλέγουμε τη σειρά Fourier.

3. Μελέτη Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Fourier

Μελέτη ΓΧΑ Συστημάτων
με τον Μετασχηματισμό Fourier

1. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος
2. Αναπαράσταση πλάτους – φάσης της απόκρισης συχνότητας
3. Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με Μετασχηματισμό Fourier

3.1 Απόκριση Συχνότητας

1. Απόκριση Συχνότητας ΓΧΑ Συστήματος

Ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα σε αρχική ηρεμία, περιγράφεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση $h(t)$, και μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο $y(t)$ του συστήματος για οποιαδήποτε είσοδο $x(t)$ μέσω της συνέλιξης:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Λύνοντας ως προς $H(\omega)$, έχουμε:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Η συνάρτηση $H(\omega)$ ονομάζεται **απόκριση συχνότητας** του συστήματος και είναι ο ΜF της κρουστικής απόκρισης $h(t)$:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

Εναλλακτικός Υπολογισμός Εξόδου ΓΧΑ Συστήματος

Όταν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την είσοδο $x(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος και ζητείται η εύρεση της εξόδου $y(t)$, είναι υπολογιστικά απλούστερο (αντί της συνέλιξης) να υπολογιστούν:

- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ με MF στην $h(t)$
- Η συνάρτηση $Y(\omega)$ από τη σχέση $Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega)$
- Η έξοδος $y(t)$ με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην $Y(\omega)$.

Ανάλογα πράττουμε αν γνωρίζουμε την είσοδο $x(t)$ και την έξοδο $y(t)$ και ζητείται η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή είναι υπολογιστικά απλούστερο να υπολογιστούν:

- Τα $X(\omega)$ και $Y(\omega)$
- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ από τη σχέση $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$
- Η κρουστική απόκριση $h(t)$ με αντίστροφο MF στην $H(\omega)$

3.2 Αναπαράσταση πλάτους – φάσης της απόκρισης συχνότητας

2. Αναπαράσταση πλάτους – φάσης

Επειδή η απόκριση συχνότητας $H(\omega)$ ενός ΓΧΑ συστήματος είναι μία μιγαδική συνάρτηση, μπορεί να γραφεί σε **πολική μορφή** ως:

$$H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\theta_{\mathrm{H}}(\omega)}$$

όπου $|H(\omega)|$ είναι το **πλάτος** του συστήματος και $\theta_{\mathrm{H}}(\omega)$ είναι η **φάση** του. Οι γραφικές παραστάσεις των $|H(\omega)|$ και $\theta_{\mathrm{H}}(\omega)$ ονομάζονται **απόκριση πλάτους** και **απόκριση φάσης** του συστήματος, αντίστοιχα.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)|\,|X(\omega)|$$

$$\theta_Y(\omega) = \theta_H(\omega) + \theta_X(\omega)$$

Η επίδραση ενός ΓΧΑ συστήματος σε ένα σήμα εισόδου, είναι:

- ο πολλαπλασιασμός του μέτρου του MF του σήματος εισόδου επί το μέτρο της απόκρισης συχνότητας (συνάρτηση μεταφοράς)
- η μετατόπιση της φάσης του MF του σήματος εισόδου κατά τη φάση της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.

3.3 Περιγραφή Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης με Μετασχηματισμό Fourier

3. Περιγραφή Γ.Δ.Ε . με MF (1/2)

Η περιγραφή της συμπεριφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος μέσω της συνέλιξης αποτελεί έναν **έμμεσο τρόπο** περιγραφής, ο οποίος **αδυνατεί** να περιγράψει την εσωτερική δομή του συστήματος.

Συχνά χρησιμοποιούμε μία **γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές** που **συσχετίζει** τα σήματα εισόδου – εξόδου:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} \beta_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

όπου τα α_n, b_m είναι πραγματικές σταθερές.

3. Περιγραφή Γ.Δ.Ε . με MF (2/2)

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγου $F\{x^n(t)\} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n X(\omega)$ του MF σε κάθε μέλος της Δ.Ε. έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \left[\sum_{n=0}^{N} a_n (j\omega)^n \right] Y(\omega)$$

$$\sum_{m=0}^{M} \beta_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \stackrel{F}{\longleftrightarrow} \left[\sum_{m=0}^{M} \beta_m (j\omega)^m \right] X(\omega)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τα β' μέλη, βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} \beta_m (j\omega)^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n (j\omega)^n}$$

Η εξίσωση είναι μοναδικά ορισμένη ακόμα και για διαφορετικές αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης. Αυτό συμβαίνει επειδή ο MF υπολογίζεται από το $-\infty$, στο οποίο θεωρούμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία, δηλαδή ότι οι αρχικές συνθήκες που συνοδεύουν τη διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης είναι μηδενικές.

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την απόκριση πλάτους και φάσης του ΓΧΑ συστήματος, με κρουστική απόκριση $h(t) = u(t-2) - u(t+1)$.

<u>Απάντηση</u>: Η απόκριση συχνότητας (συνάρτηση μεταφοράς) του συστήματος θα προκύψει από τον ΜF της κρουστικής απόκρισης. Είναι:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-2) e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} u(t+1) e^{-j\omega t} dt$$

Επειδή οι βηματικές συναρτήσεις $u(t-2)$ και $u(t+1)$ ορίζονται ως:

$$u(t-2) = \begin{cases} 1 \ \ \gamma\iota\alpha \ t > 2 \\ 0 \ \ \gamma\iota\alpha \ t < 2 \end{cases} \quad \kappa\alpha\iota \quad u(t+1) = \begin{cases} 1 \ \gamma\iota\alpha \ \ t > -1 \\ 0 \ \gamma\iota\alpha \ \ t < -1 \end{cases}$$

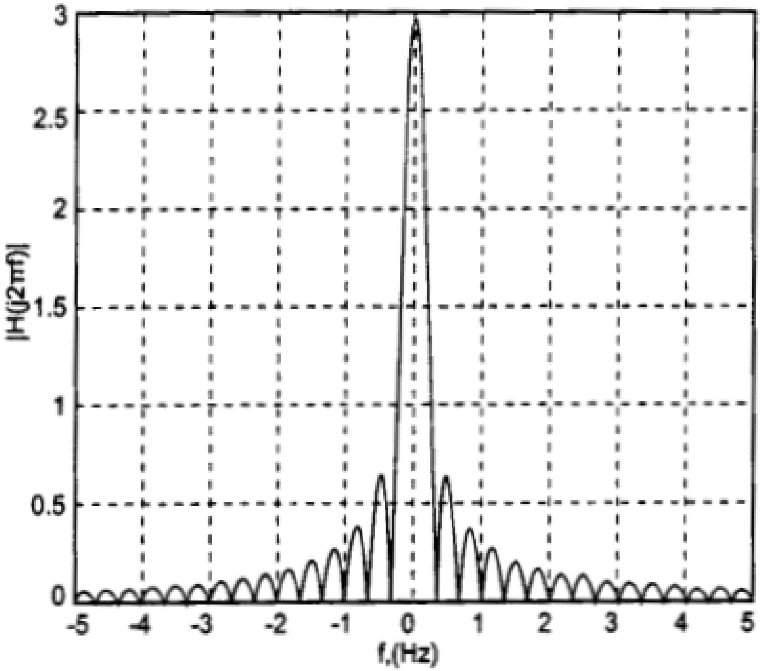
θα είναι:

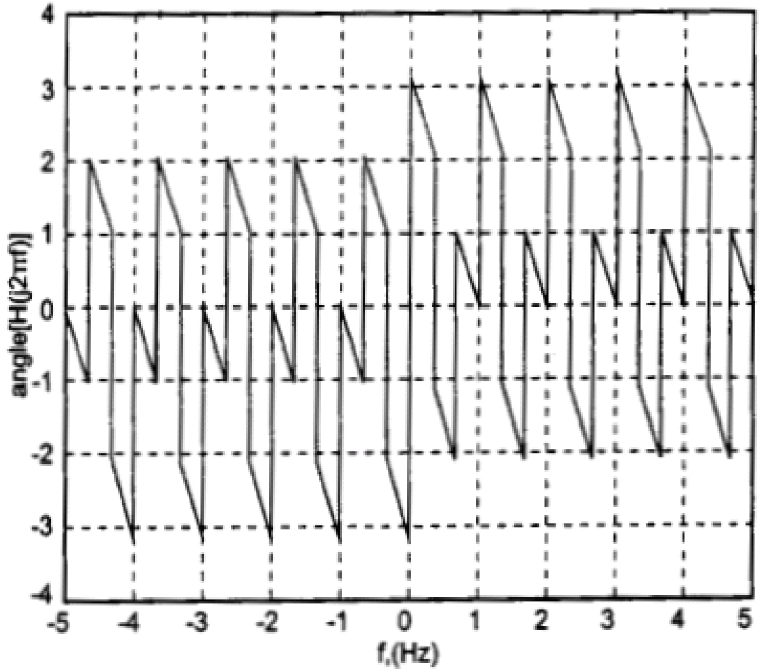
$$H(\omega) = \int_{2}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt - \int_{-1}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt = -e^{\frac{-j\omega}{2}} \frac{2\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\omega} = -3e^{-j\omega}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Έτσι, το μέτρο και η φάση είναι:

$$|H(\omega)| = 3\left|\operatorname{sinc}\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)\right| \quad \kappa\alpha\iota \quad \measuredangle H(\omega) = -\frac{\omega}{2} = -\pi f$$





Οι συναρτήσεις πλάτους $|H(\omega)|$ και φάσης $\measuredangle H(\omega)$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το μέτρο και η φάση ενός ΓΧΑ συστήματος, του οποίου η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(\omega) = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega}$$

<u>Απάντηση</u>: Από την εξίσωση ορισμού της απόκρισης συχνότητας βρίσκουμε το μέτρο και τη φάση της. Είναι:

$$|H(\omega)| = \frac{|1 - j\omega|}{|1 + j\omega|} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} = 1$$

$$\measuredangle H(\omega) = \measuredangle H\{1 - j\omega\} - \measuredangle H\{1 + j\omega\} = \tan^{-1}(-\omega) - \tan^{-1}(\omega) = 2\tan^{-1}(\omega)$$

Άσκηση 5

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει απόκριση συχνότητας που δίνεται από τη σχέση:

$$H(\omega) = \frac{5 + j\omega}{6 + 5j\omega - \omega^2}$$

1) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα.
2) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.
3) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδο εφαρμοστεί το σήμα $x(t) = e^{-5t}u(t)$.

Απάντηση: 1) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Από τον ορισμό της συνάρτησης μεταφοράς έχουμε:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{5 + j\omega}{6 + 5j\omega - \omega^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(\omega)(6 + 5j\omega - \omega^2) = X(\omega)(5 + j\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (j\omega)^2\, Y(\omega) + 5j\omega\, Y(\omega) + 6\, Y(\omega) = j\omega\, X(\omega) + 5\, X(\omega)$$

Μετατρέπουμε την παραπάνω σχέση σε διαφορική εξίσωση λαμβάνοντας υπόψη ότι από την ιδιότητα της παραγώγισης του μετασχηματισμού Fourier, ισχύει:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = (j\omega)^2 Y(\omega), \qquad F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = (j\omega)Y(\omega), \qquad F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = (j\omega)X(\omega)$$

οπότε λαμβάνουμε τη σχέση:

$$F\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 5F\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 6y(t) = F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 5\,x(t)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Επομένως η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα είναι:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5\,x(t)$$

2) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος θα υπολογιστεί με αντίστροφο μετασχηματισμού Fourier στη δοθείσα απόκριση συχνότητας $H(\omega)$.

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο του αθροίσματος σε απλά κλάσματα, και έχουμε:

$$H(\omega) = \frac{5 + j\omega}{6 + 5j\omega - \omega^2} = \frac{5 + j\omega}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} = \frac{3}{2 + j\omega} - \frac{2}{3 + j\omega}$$

Ανατρέχοντας σε πίνακες στοιχειωδών μετασχηματισμών, βρίσκουμε:

$$h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\} = 3\,F^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j\omega}\right\} - 2\,F^{-1}\left\{\frac{1}{3 + j\omega}\right\} = (3e^{-2t} - 2e^{-3t})\,u(t)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

3) Για τον υπολογισμό της εξόδου $y(t)$, εργαζόμαστε στο πεδίο της συχνότητας λόγω υπολογιστικής απλότητας. Αρχικά υπολογίζουμε τον ΜF της εισόδου $X(\omega)$:

$$X(\omega) = F\{e^{-5t}u(t)\} = \frac{1}{5 + j\omega}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της εξόδου $Y(\omega)$:

$$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega) = \frac{5 + j\omega}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} \frac{1}{(5 + j\omega)} = \frac{1}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)}$$

$$= \frac{1}{(2 + j\omega)} - \frac{1}{(3 + j\omega)}$$

Τέλος, με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier ανακτούμε την έξοδο $y(t)$:

$$y(t) = F^{-1}\{Y(\omega)\} = \cdots = (e^{-2t} - e^{-3t}\,)\, u(t)$$