Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 4: Μελέτη των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μελέτη των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων

- Η Κρουστική Απόκριση των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων
- Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα
- Αναλυτικός Υπολογισμός του Συνελικτικού Ολοκληρώματος
- Ιδιότητες της Συνέλιξης
  - Αντιμεταθετική ιδιότητα
  - Προσεταιριστική ιδιότητα
  - Επιμεριστική ιδιότητα
  - Ταυτοτική ιδιότητα
  - Ιδιότητα Ομογένειας
  - Ιδιότητα Εύρους

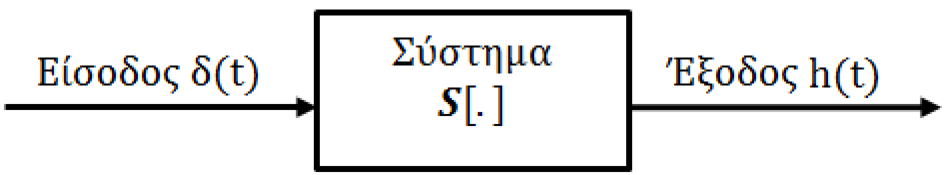
1. Κρουστική Απόκριση Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων

Κρουστική Απόκριση ΓΧΑ Συστημάτων

- **Κρουστική απόκριση** ονομάζεται η έξοδος που παράγει ένα σύστημα όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$.

- Αν το σύστημα είναι **γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο** (ΓΧΑ), η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \boldsymbol{S}[\delta(t)]$$

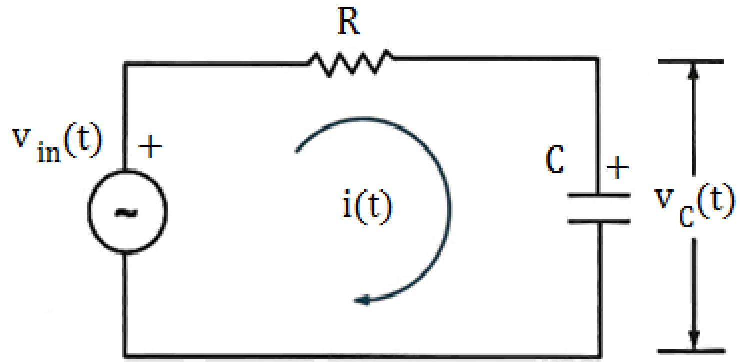


- Αν το σύστημα είναι **γραμμικό αλλά όχι και χρονικά αμετάβλητο** , η κρουστική απόκριση $h(t, \tau)$ του συστήματος με είσοδο την μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t-\tau)$ που εφαρμόζεται κατά τη χρονική στιγμή τ, είναι:

$$h(t, \tau) = \boldsymbol{S}[\delta(t-\tau)]$$

Κρουστική Απόκριση RC Κυκλώματος (1/2)

- Για το διπλανό ΓΧΑ σύστημα (RC κύκλωμα) επιθυμούμε να διατυπώσουμε μία σχέση που να συνδέει την τάση της πηγής $v_{in}(t)$ (είσοδο) και την τάση στα άκρα του πυκνωτή $v_c(t)$ (έξοδος).



- Χρησιμοποιώντας το νόμο του Kirchoff αποδεικνύεται ότι το RC κύκλωμα περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) 1ου βαθμού με σταθερούς συντελεστές:

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_{in}(t)$$

Κρουστική Απόκριση RC Κυκλώματος (2/2)

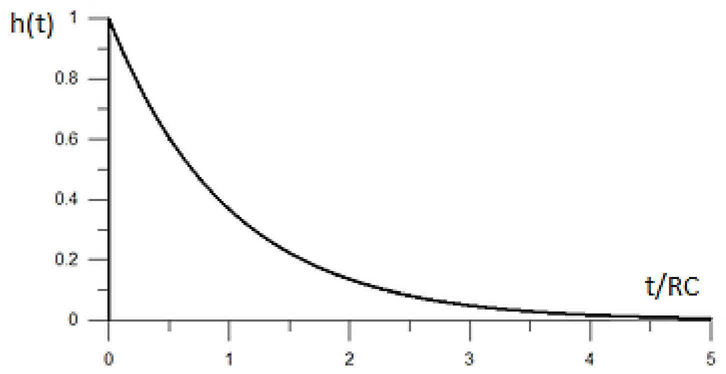
- Θεωρώντας ότι το κύκλωμα RC βρίσκεται σε αρχική ηρεμία, δηλαδή ότι ισχύει $v_c(0) = 0$, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι:

$$v_c(t) = e^{-t/RC} \frac{1}{RC} \int_{0^-}^{t} e^{\tau/RC} \, v_{in}(t) \, dt$$

- Η κρουστική απόκριση $h(t)$ βρίσκεται αν θέσουμε ως είσοδο τη μοναδιαία κρουστική συνάρτηση, δηλαδή $v_{in}(t) = \delta(t)$ και είναι:

$$h(t) = e^{-t/RC} \frac{1}{RC} \int_{0^-}^{t} e^{\tau/RC} \, \delta(t) \, dt = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \, u(t)$$

- Από την μορφή της γραφικής παράστασης παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι δυναμικό.



Κρουστική απόκριση RC κυκλώματος

2. Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε ΓΧΑ Συστήματα

- Αποδεικνύεται ότι η έξοδος $y(t)$ ενός **ΓΧΑ συστήματος** που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία και έχει κρουστική απόκριση $h(t)$, όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το σήμα $x(t)$, δίνεται από:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

- Το ολοκλήρωμα ονομάζεται **συνέλιξη** (convolution) ή δίπλωση ή συνελικτικό ολοκλήρωμα μεταξύ των συναρτήσεων $x(t)$ και $h(t)$ και συμβολικά γράφεται ως:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Αν το σύστημα εκτός από **ΓΧΑ είναι και αιτιατό** τότε η συνέλιξη απλοποιείται σε:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

3. Αναλυτικός Υπολογισμός του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

Αναλυτικός Υπολογισμός

- Ο αναλυτικός υπολογισμός χρησιμοποιείται όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ μπορούν να παρασταθούν από απλές αναλυτικές εκφράσεις.
- Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ είναι ασυνεχείς ή διαθέτουν διαφορετική αναλυτική παράσταση για διάφορα διαστήματα χρόνου.
- Αν δοθούν δύο συναρτήσεις $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ που ορίζονται αντίστοιχα στα διαστήματα $\{L_1, U_1\}$ και $\{L_2, U_2\}$, εκλέγουμε σαν κάτω όριο ολοκλήρωσης το $max(L_1, L_2)$ και σαν άνω όριο ολοκλήρωσης το $max(U_1, U_2)$.
- Τα όρια L_1 και U_1 της συνάρτησης $x(\tau)$ δεν μεταβάλλονται, ενώ αντίθετα τα όρια της συνάρτησης $h(t-\tau)$ μεταβάλλονται καθώς μεταβάλλεται το t.
- Η γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων βοηθά στην εύρεση των σωστών ορίων ολοκλήρωσης.

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος **μέσης τιμής**:

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Απάντηση: Η κρουστική απόκριση του συστήματος μέσης τιμής $h(t)$ είναι ίση με την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η συνάρτηση $\delta(t)$, δηλαδή:

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} du(\tau) = \frac{1}{T} u(t)\Big|_{t-T}^{t} = \frac{1}{T}[u(t) - u(t-T)]$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι:

$$\delta(\tau) = \frac{du(\tau)}{d\tau}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκρισή του συστήματος που ονομάζεται ολοκληρωτής και περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y(t) = \boldsymbol{S}[\, x(t)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

<u>Απάντηση</u>:

Η κρουστική απόκρισή του **ολοκληρωτή** είναι ίση με την έξοδό του όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η συνάρτηση $\delta(t)$ και ισχύει:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau = u(t)$$

Άσκηση 3

Το σύστημα που ονομάζεται **διαμορφωτής** περιγράφεται από την παρακάτω σχέση εισόδου-εξόδου:

$$y(t) = \boldsymbol{S}[x(t)] = x(t)\ cos(\omega_0 t)$$

Να εξετάσετε αν ο διαμορφωτής είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο και αιτιατό σύστημα και κατόπιν υπολογίσετε την κρουστική απόκρισή του.

<u>Απάντηση</u>: (α) Έλεγχος γραμμικότητας: Αν το σήμα $x_1(t)$ είναι η είσοδος του διαμορφωτή, τότε η έξοδος του είναι $y_1(t) = \boldsymbol{S}[x_1(t)] = x_1(t)\ cos(\omega_0 t)$ και αν είσοδος είναι το $x_2(t)$ τότε η έξοδος είναι $y_2(t) = \boldsymbol{S}[x_2(t)] = x_2(t)\ cos(\omega_0 t)$.

Αν η είσοδος του συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $\alpha_1\ x_1(t) + \alpha_2\ x_2(t)$, τότε η έξοδος είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\ cos(\omega_0 t) \\ &= [\alpha_1\ x_1(t) + \alpha_2\ x_2(t)]\ cos(\omega_0 t) \\ &= \alpha_1[x_1(t)\ cos(\omega_0 t)] + \alpha_2[x_2(t)\ cos(\omega_0 t)] \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

Επομένως ότι το σύστημα είναι **γραμμικό**.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

(β) Έλεγχος χρονικής μεταβλητότητας: Αν το σήμα $x(t)$ είναι η είσοδος του διαμορφωτή τότε η έξοδος είναι $y(t) = x(t)\,cos(\omega_0 t)$. Η απόκριση του συστήματος στο σήμα $x(t - t_0)$ είναι $y_1(t) = x(t - t_0) cos(\omega_0 t)$. Παρατηρούμε ότι γενικά ισχύει $y_1(t) \neq y(t - t_0)$, δηλαδή ο διαμορφωτής είναι σύστημα **χρονικά μεταβαλλόμενο**.

(γ) Έλεγχος αιτιότητας: Ο διαμορφωτής είναι **αιτιατό** σύστημα εφόσον η έξοδός του εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της εισόδου του.

Επειδή το σύστημα είναι χρονικά μεταβαλλόμενο, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση της συνέλιξης , επειδή αυτή ισχύει μόνο για ΓΧΑ συστήματα.

Επομένως θα υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση του διαμορφωτή από τη γενικότερη σχέση $h_\tau(t) = \boldsymbol{S}[\ \delta(t - \tau)\ ]$, οπότε έχουμε:

$$h_\tau(t) = \delta(t - \tau)\ cos(\omega_0 t) = \delta(t - \tau)\ cos(\omega_0 \tau)$$

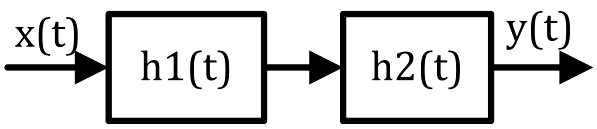
4. Ιδιότητες της Συνέλιξης

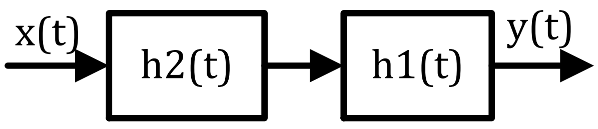
Αντιμεταθετική ιδιότητα

Η αντιμεταθετική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

Η φυσική σημασία της ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, από το οποίο προκύπτει πως αν δύο συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά τότε μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά σύνδεσής τους χωρίς να αλλάξει η τελική έξοδος $y(t)$.





Προσεταιριστική ιδιότητα

Η προσεταιριστική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$

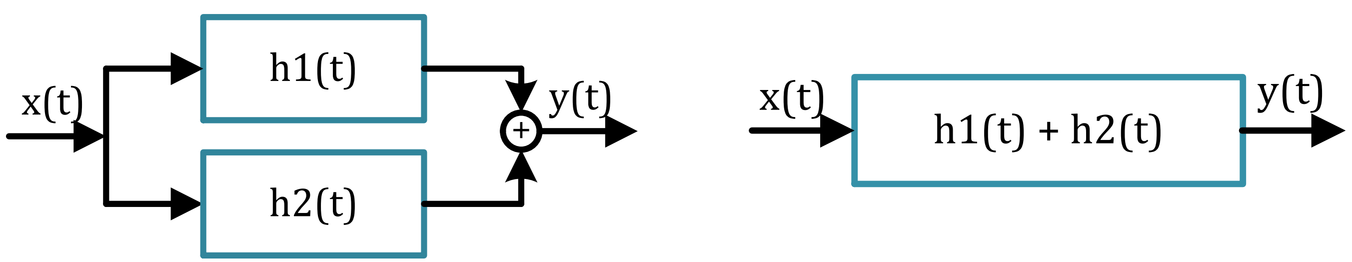
Η φυσική σημασία της προσεταιριστικής ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, από το οποίο προκύπτει πως όταν δύο συστήματα συνδέονται σε σειρά μπορούν να αντικατασταθούν με ένα τρίτο σύστημα, το οποίο έχει κρουστική απόκριση ίση με τη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των δύο σε σειρά συνδεμένων συστημάτων.

Επιμεριστική ιδιότητα

Η επιμεριστική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας, αν δύο συστήματα συνδεθούν παράλληλα τότε μπορούν να αντικατασταθούν από ένα τρίτο σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων.



Ταυτοτική ιδιότητα

Η ταυτοτική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Η ταυτοτική ιδιότητα υποδηλώνει ότι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ είναι το **ουδέτερο στοιχείο** της πράξης της συνέλιξης.

Κατ' αναλογία, ισχύει και η ακόλουθη ιδιότητα, η οποία χρησιμοποιείται στη διαδικασία της διαμόρφωσης:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

Λοιπές Ιδιότητες

- Η **ιδιότητα της ομογένειας** περιγράφεται από τη σχέση:

$$[a\, x(t)] * h(t) = a[x(t) * h(t)] = x(t) * [a\, h(t)]$$

- Η **ιδιότητα του εύρους** αναφέρει ότι η χρονική διάρκεια της συνέλιξης $z(t) = x(t) * y(t)$ δύο σημάτων συνεχούς χρόνου $x(t)$ και $y(t)$ με διάρκεια T_1 και T_2, αντίστοιχα, ισούται με το άθροισμα των χρόνων $T_1 + T_2$.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ και $y(t) = e^{-\beta t}u(t)$. Θεωρήστε $\alpha \neq \beta, \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Απάντηση: Η συνέλιξη των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}\, u(\tau)\, e^{-\beta(t-\tau)}\, u(t-\tau)\, d\tau$$

όπου οι βηματικές συναρτήσεις $u(\tau)$ και $u(t-\tau)$ ορίζονται ως:

$$u(\tau) = \begin{cases} 1\ \gamma\iota\alpha\ \tau > 0 \\ 0\ \gamma\iota\alpha\ \tau < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1\ \gamma\iota\alpha\ \tau < t \\ 0\ \gamma\iota\alpha\ \tau > t \end{cases}$$

Στη γενική περίπτωση το παραπάνω ολοκλήρωμα θα πρέπει να υπολογισθεί στο άπειρο διάστημα $(-\infty,\ +\infty)$. Ωστόσο, η ύπαρξη των δύο βηματικών συναρτήσεων περιορίζει τον υπολογισμό στην περιοχή $0 < \tau < t$, αφού οι βηματικές συναρτήσεις είναι και οι δύο διάφορες του μηδενός (και ίσες με τη μονάδα) μόνο στο διάστημα $0 < \tau < t$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Με βάση τη διαπίστωση αυτή, βρίσκουμε ότι:

$$z(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}\, e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau = e^{-\beta t} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{-\beta t} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)\tau}}{\beta-\alpha}\right]_0^t = \frac{e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}\left[e^{(\beta-\alpha)t} - 1\right] = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για την περιοχή τιμών $t > 0$ και επειδή για $t < 0$ είναι $z(t) = 0$ μπορούμε να συνδυάσουμε τις παραπάνω περιπτώσεις σε μία απλή εξίσωση γράφοντας:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} & \gamma\iota\alpha\ t > 0 \\ 0 & \gamma\iota\alpha\ t < 0 \end{cases} = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} u(t)$$

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τη συνέλιξη ανάμεσα στα σήματα $x(t) = u(t)$ και $y(t) = u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Διαπιστώνουμε ότι η άσκηση αυτή αποτελεί υποπερίπτωση της προηγούμενης άσκησης και συγκεκριμένα για $\alpha = \beta = 0$. Όμως αν κάνουμε χρήση της λύσης:

$$z(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} u(t)$$

θα οδηγηθούμε στην απροδιόριστη μορφή $0/0$. Για το λόγο αυτό, εφαρμόζουμε τον κανόνα Del' Hospital και βρίσκουμε:

$$z(t) = \lim_{\alpha \to \beta} \left\{ \frac{\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)}{\frac{d}{d\alpha}(\beta - \alpha)} u(t) \right\} = -\lim_{\alpha \to \beta} \{-te^{-\alpha t} u(t)\} = te^{-\beta t} u(t) = t\,u(t)$$

όπου $t\,u(t) = r(t)$ είναι η γνωστή συνάρτηση ράμπας.

Επομένως, η συνέλιξη της βηματικής συνάρτησης $u(t)$ με τον εαυτό της οδηγεί στη συνάρτηση ράμπας $r(t)$.