Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 5: Γραφική Μέθοδος Υπολογισμού του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

1. Γραφική Μέθοδος Υπολογισμού του Συνελικτικού Ολοκληρώματος

Γραφικός Υπολογισμός

Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια της συνέλιξης $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- **Ανάκλαση της $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\tau})$**. Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση $h(\tau)$ και παράγουμε την $h(-\tau)$.
- **Χρονική μετατόπιση της $\boldsymbol{h}(-\boldsymbol{\tau})$ κατά $\boldsymbol{t}$**. Μετατοπίζουμε την $h(-\tau)$ κατά t και έτσι προσδιορίζουμε την $h(t-\tau)$.
- **Πολλαπλασιασμός της $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\tau})$ με την είσοδο $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\tau})$** ώστε να υπολογίσουμε το γινόμενο $x(\tau)\, h(t-\tau)$.
- **Ολοκλήρωση** ή Εμβαδομέτρηση. Ολοκληρώνουμε το γινόμενο αυτό (ή υπολογίζουμε το εμβαδό του σήματος που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου). Το αποτέλεσμα είναι ίσο με την έξοδο του συστήματος $y(t)$ κατά τη χρονική στιγμή t, δηλ. κατά την ποσότητα της μετατόπισης στο βήμα 2.
- **Επανάληψη**. Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για τις διάφορες τιμές του χρόνου t, δηλ. $-\infty < t < +\infty$.

Άσκηση 1

Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος δίνεται από τη σχέση: $h(t) = e^{-t}u(t)$. Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος, όταν η είσοδός του είναι το σήμα $x(t) \; = \; u(t) \; - \; u(t-2)$.

<u>Απάντηση</u>: Με τη βοήθεια του σχήματος παρατηρούμε ότι $h(t-\tau)\; x(\tau) = 0$ για κάθε $t < 0$. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι: $y(t) = 0$ όταν $t < 0$

Στο σχήμα (ε) η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης $h(t-\tau)$ έχει μετατοπιστεί κατά $0 \leq t \leq 2$. Η έξοδος του συστήματος είναι:

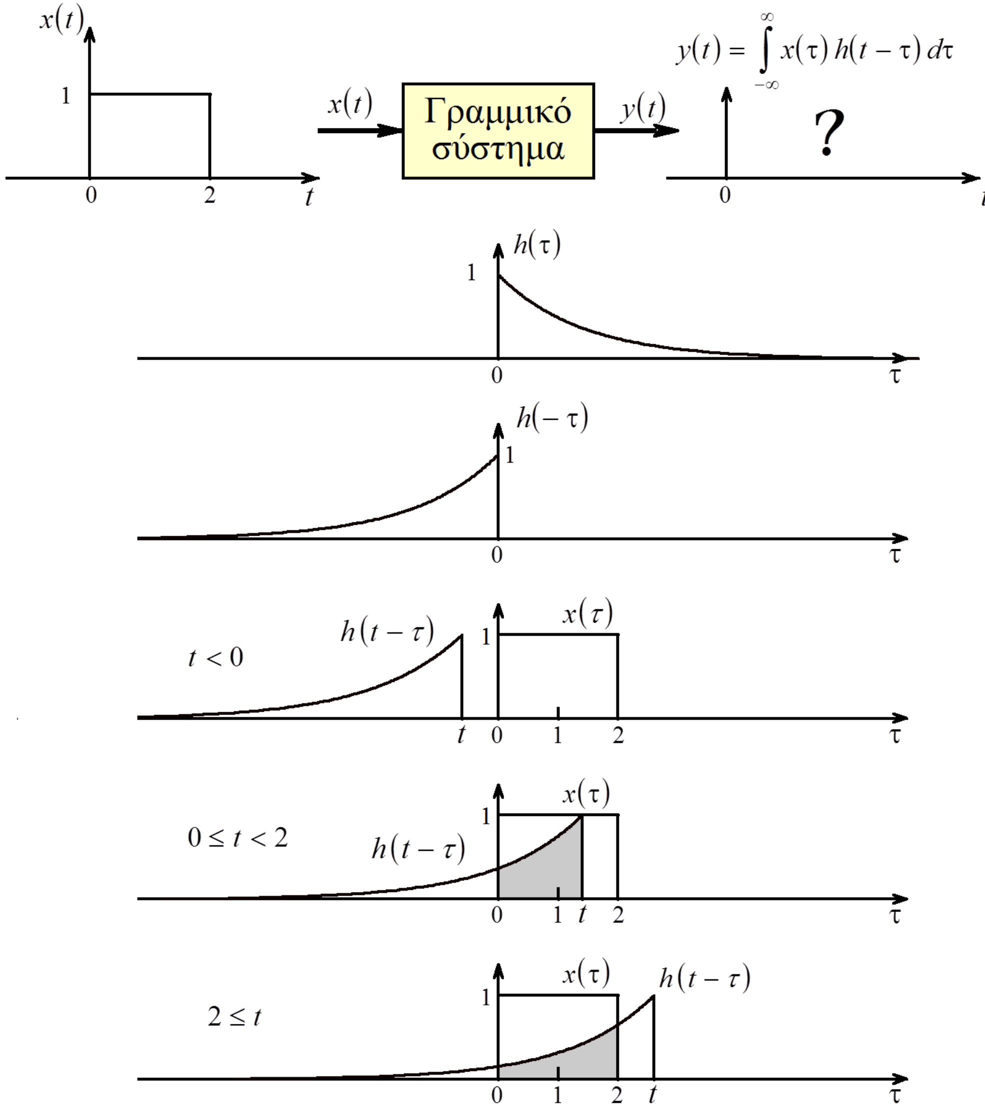
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)dt$$

και επειδή, όταν $\tau < 0$ είναι $x(\tau) = 0$, ενώ όταν $\tau > t$ είναι $h(t-\tau) = 0$, τα όρια του ολοκληρώματος γίνονται:

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(t-\tau)dt = \int_{0}^{t} 1.\, e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{\tau-t}\Big|_{0}^{t} = 1 - e^{-t}, \qquad 0 \leq t \leq 2$$

που είναι ίσο με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου σχήματος, στο σχήμα (ε).

Άσκηση 1 (συνέχεια)



Άσκηση 1 (συνέχεια)

Όταν $t > 2$, με τη βοήθεια του σχήματος (στ), βρίσκουμε:

$$y(t) = \int_0^2 1.\, e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{\tau - t}\Big|_0^2 = e^{2-t} - e^{-t} = (e\rrbracket^2 - \llbracket 1)e^{-t}, t > 2$$

Επομένως, η έξοδος $y(t)$ του συστήματος είναι:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \leq t < 2 \\ (e^2 - 1)e^{-t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση:

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το σήμα:

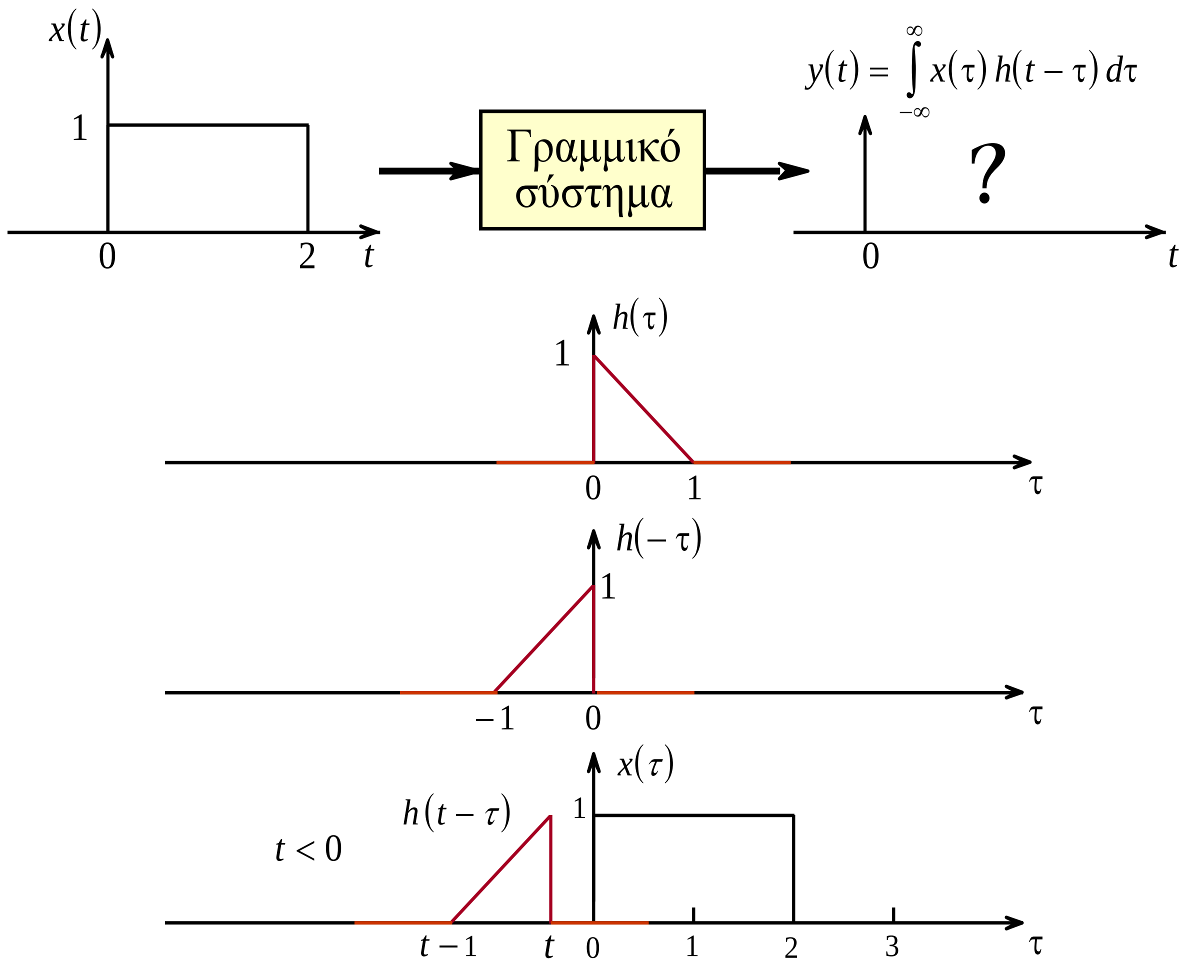
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Απάντηση: Το ΓΧΑ σύστημα και η είσοδος του περιγράφονται στο σχήμα (α).

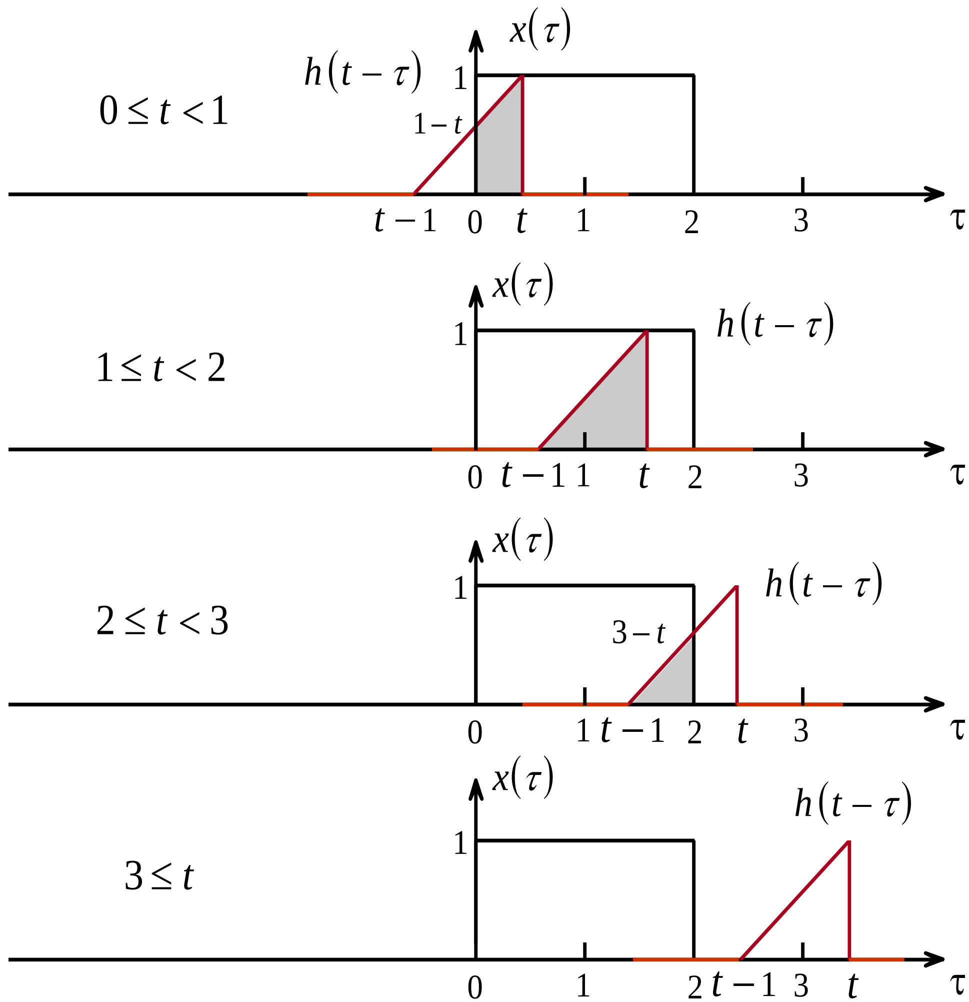
Στο σχήμα (β) δίνεται η κρουστική απόκριση του συστήματος, στο σχήμα (γ) δίνεται η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης του συστήματος, $h(-\tau)$, στο σχήμα (δ) η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης έχει μετατοπιστεί κατά $t < 0, h(t-\tau)$.

Παρατηρούμε ότι $h(t-\tau)\, x(\tau) = 0$ για $t < 0$. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι $y(t) = 0$ όταν $t < 0$. Στο σχήμα (ε) η κατοπτρική μορφή της κρουστικής απόκρισης $h(t-\tau)$ έχει μετατοπιστεί κατά $0 \le t \le 1$.

Άσκηση 2 (συνέχεια)



Άσκηση 2 (συνέχεια)



Άσκηση 2 (συνέχεια)

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που περιγράφουν την είσοδο $x(t)$ και την κρουστική απόκριση $h(t)$, η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) = \int_{0}^{t} 1\, h(t-\tau) = t - \frac{t^2}{2}, \qquad \text{όταν } 0 < t < 1$$

και είναι ίση με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τραπεζίου στο σχήμα (ε).

Στο σχήμα (στ) η $h(t-\tau)$ έχει μετατοπιστεί κατά $1 \le t \le 2$. Η έξοδος του συστήματος είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου στο σχήμα (στ) και δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} 1\, h(t-\tau) = \frac{1}{2} \ \text{ όταν } 1 \le t \le 2$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Στο σχήμα (ζ) η $h(t-\tau)$ έχει μετατοπιστεί κατά $2 \ \leq \ t \ \leq \ 3$. Η έξοδος του συστήματος τώρα είναι ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τριγώνου του σχήματος (ζ) και ισούται με:

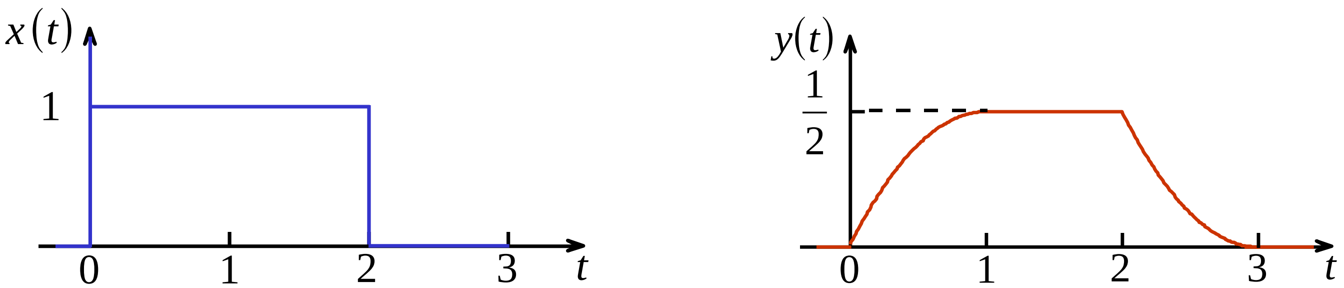
$$y(t) = \int_{t-1}^{2} 1 \, h(t-\tau) = \frac{1}{2}(3-t)^2 \ \text{όταν } 2 \leq t \leq 3$$

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα (η) το γινόμενο $h(t-\tau)\, x(\tau)$ είναι ίσο με μηδέν για κάθε τιμή του χρόνου t μεγαλύτερη από 3. Έτσι η έξοδος του συστήματος είναι $y(t) = 0$ όταν $3 \ < \ t$.

Η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t) = \begin{cases} t - t^2/2 & \text{όταν } 0 \leq t < 1 \\ 1/2 & \text{όταν } 1 \leq t < 2 \\ (3-t)^2/2 & \text{όταν } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)



(α) Η είσοδος και (β) η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος

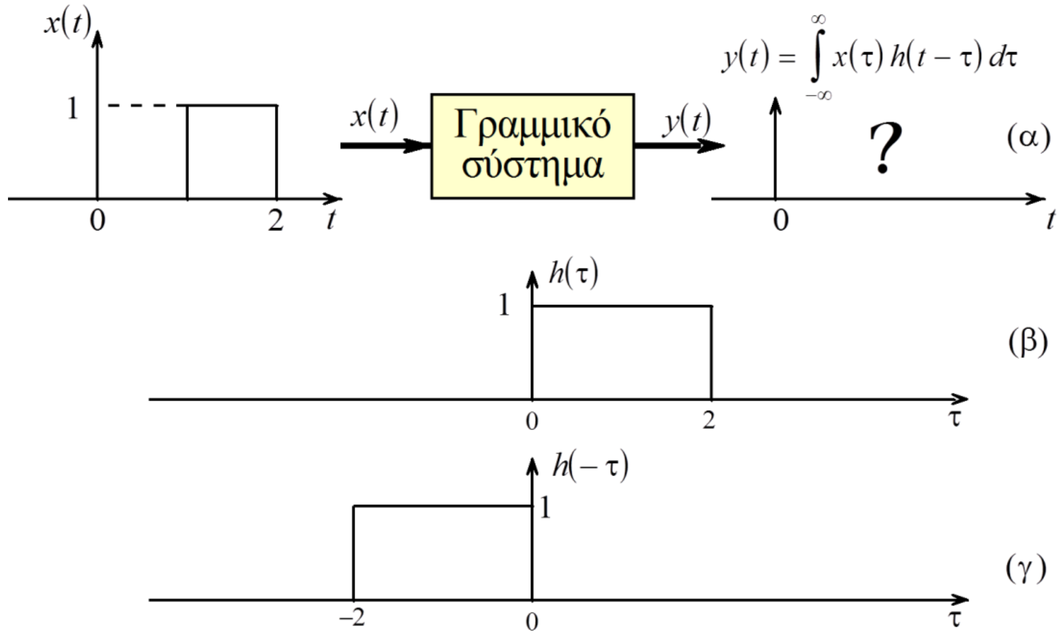
Άσκηση 3

Η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι $h(t) = u(t) - u(t-2)$. Με τη βοήθεια του ολοκληρώματος της συνέλιξης να υπολογίσετε την έξοδο του συστήματος όταν η είσοδος είναι $x(t) = u(t-1) - u(t-2)$.

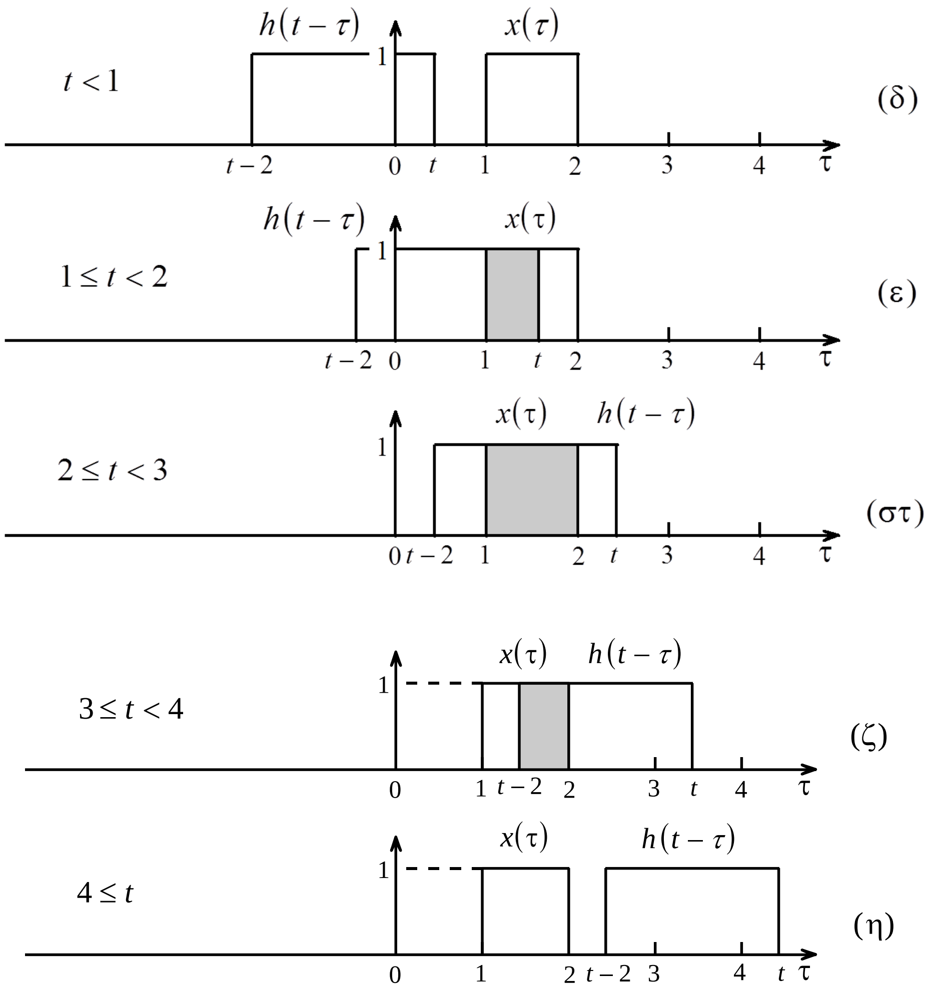
<u>Απάντηση</u>: Ακολουθώντας ίδια διαδικασία επίλυσης με τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, προσδιορίζεται η έξοδος του συστήματος, η οποία είναι:

$$y(t) = \begin{cases} t-1 & \text{όταν } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{όταν } 2 \leq t < 3 \\ 4-t & \text{όταν } 3 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

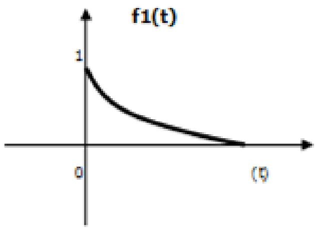


Άσκηση 3 (συνέχεια)

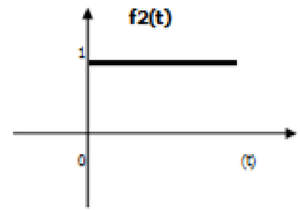


Άσκηση 4

Χρησιμοποιώντας τη γραφική μέθοδο να υπολογισθεί το συνελικτικό ολοκλήρωμα $g(t)$ των συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$, που δείχνονται στο σχήματα (α) και (β).



(α) $f_1(t) = e^{-t}$



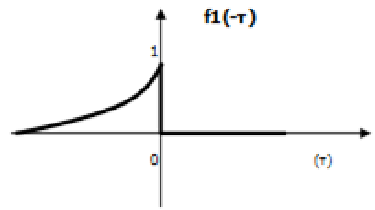
(β) $f_2(t) = u(t)$

<u>Απάντηση</u>:

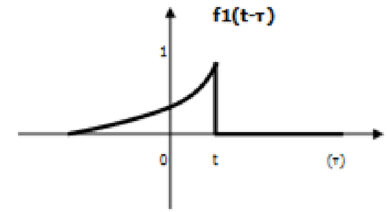
Η διαδικασία υπολογισμού με τη γραφική μέθοδο δείχνεται στα σχήματα (γ) έως (στ) (επόμενη διαφάνεια) και το αποτέλεσμα είναι:

$$g(t) = 1 - e^{-t}$$

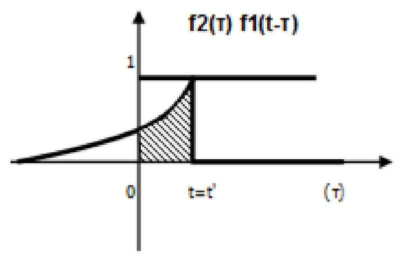
Άσκηση 4 (συνέχεια)



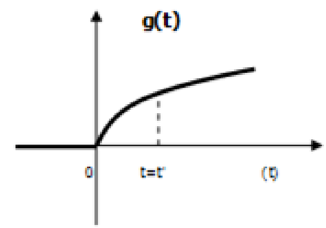
(γ) Δίπλωση $f_1(-\tau) \;=\; e^{\tau}$



(δ) Μετατόπιση
$f_1(t-\tau) \;=\; e^{-(t-\tau)}$



(ε) Πολλαπλασιασμός
$f_2(\tau) f_1(t-\tau) \;=\; 1\, e^{-(t-\tau)}$



(στ) Ολοκλήρωση
$g(t) \;=\; 1 - \; e^{-t}$

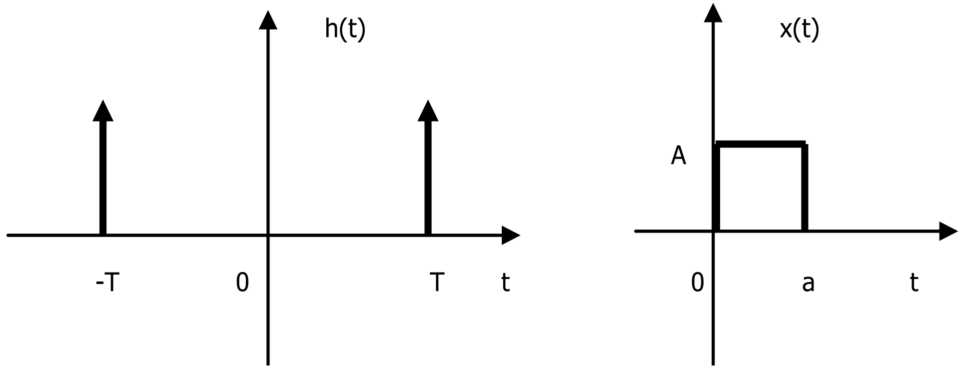
Με τον αναλυτικό τρόπο υπολογισμού του συνελικτικού ολοκληρώματος, έχουμε:

$$g(t) = \; f_1(t) * \; f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) dt = \int_0^t 1\; e^{-(t-\tau)} dt =$$

$$e^{-t}\left([e^{\tau}]_0^t\right) = e^{-t}[e^t - 1] = 1 - e^{-t}$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί η συνέλιξη των συναρτήσεων του σχήματος:



<u>Απάντηση</u>: Από το σχήμα προκύπτει ότι η συνάρτηση $h(t)$ γράφεται ως $h(t) = \delta(t - T) + \delta(t + T)$. Άρα η συνέλιξη των δύο σημάτων είναι:

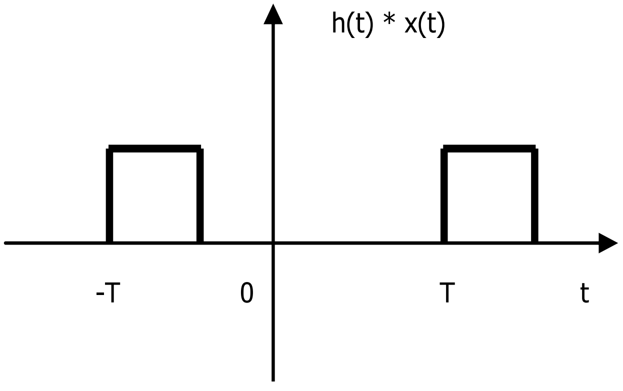
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)]\, x(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - T)\, x(t - \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau + T)\, x(t - \tau)\, d\tau$$

$$= x(t - T) + x(t + T)$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Το αποτέλεσμα, δηλαδή η συνέλιξη των $x(t)$ και $h(t)$ δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι με τη συνέλιξη οποιασδήποτε συνάρτησης και κρουστικής συνάρτησης $\delta(t)$, επανασχηματίζεται η αρχική συνάρτηση, η θέση της όμως καθορίζεται από την τετμημένη της κρουστικής συνάρτησης.