Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

# Σήματα και Συστήματα

## Διάλεξη 11: Μετασχηματισμός Laplace

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

# Μετασχηματισμός Laplace

1. Μαθηματικός ορισμός μετασχηματισμού Laplace
2. Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace
3. Πόλοι και μηδενικά του μετασχηματισμού Laplace
4. Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace

# Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την επεξεργασία διαδικασιών που τις μεταφέρει από το πεδίο του χρόνου $t$, στο πεδίο της συχνότητας $s$ και αντιστρόφως.

Δίνει απλές αλγεβρικές λύσεις σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα.

Η χρήση του μετασχηματισμού Laplace είναι ευρεία επειδή:

- Μπορεί να υπολογιστεί για περισσότερες κατηγορίες συναρτήσεων σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier.
- Προσφέρει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων που δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας, ενσωματώνοντας κατάλληλα τις αρχικές συνθήκες.
- Η χρήση του μιγαδικού πεδίου συχνοτήτων και των πόλων/μηδενικών, εμπλουτίζει αλλά και απλοποιεί τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων.

Ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιείται κυρίως στη μελέτη συστημάτων, ενώ ο μετασχηματισμός Fourier στη μελέτη σημάτων.

# 1. Μαθηματικός ορισμός μετασχηματισμού Laplace

# Αμφίπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Ο **αμφίπλευρος** (bilateral) μετασχηματισμός Laplace ορίζεται από:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Το $s$ είναι μία μιγαδική ποσότητα της μορφής $s = \sigma + j\omega$, οπότε το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\, dt$$

Παρατηρούμε ότι :

- Για $\sigma = 0$ ο μετασχηματισμός Laplace **συμπίπτει** με τον μετασχηματισμό Fourier.
- Ο όρος $e^{-\sigma t}$ (που δεν υπάρχει στον μετασχηματισμό Fourier), είναι αυτός που εξασφαλίζει τη **σύγκλιση** του ολοκληρώματος άρα και την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace ακόμα και όταν ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει.

# Μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace

Ο **μονόπλευρος** (unilateral) μετασχηματισμός Laplace ορίζεται από:

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Ένας πιο πλήρης μαθηματικά ορισμός του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace δίνεται από:

$$X(s) = \lim_{\alpha \to 0^-} \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Όταν αναφερόμαστε απλά στον μετασχηματισμό Laplace συνήθως υπονοείται ο μονόπλευρος ML.
- Η χρήση του μονόπλευρου ML είναι πιο συχνή, επειδή:
  - συνήθως ενδιαφερόμαστε να αναλύσουμε αιτιατά συστήματα.
  - δίνει τη δυνατότητα μελέτης συστημάτων τα οποία δεν βρίσκονται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας.

# 2. Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace

# Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace

- Για τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, το σύνολο των τιμών της $X(s)$ που **συγκλίνουν απόλυτα**, δηλαδή το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί στο διάστημα $[0, +\infty)$, είναι είτε της μορφής $Re\{s\} > a$ είτε της μορφής $Re\{s\} \geq a$, όπου $a$ είναι μία πραγματική σταθερά, $-\infty \leq a \leq \infty$.

- Η σταθερά $a$ είναι γνωστή ως **τετμημένη της απόλυτης σύγκλισης** και εξαρτάται από τη συνάρτηση $x(t)$.

- Το υποσύνολο των τιμών του μιγαδικού επιπέδου $s$, για τις οποίες ο μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει (απόλυτα ή υπό συνθήκες) ονομάζεται **περιοχή σύγκλισης** (Region of Convergence - ROC) του μετασχηματισμού.

# 3. Πόλοι και μηδενικά του μετασχηματισμού Laplace

# Πόλοι και μηδενικά του μετασχηματισμού Laplace

Έστω ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος εκφρασμένος σε ρητή μορφή:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^{-2} + \cdots + b_{\mathrm{M}} s^{-\mathrm{M}}}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^{-2} + \cdots + \alpha_{\mathrm{N}} s^{-\mathrm{N}}}$$

Παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρανομαστή, το κλάσμα γράφεται:

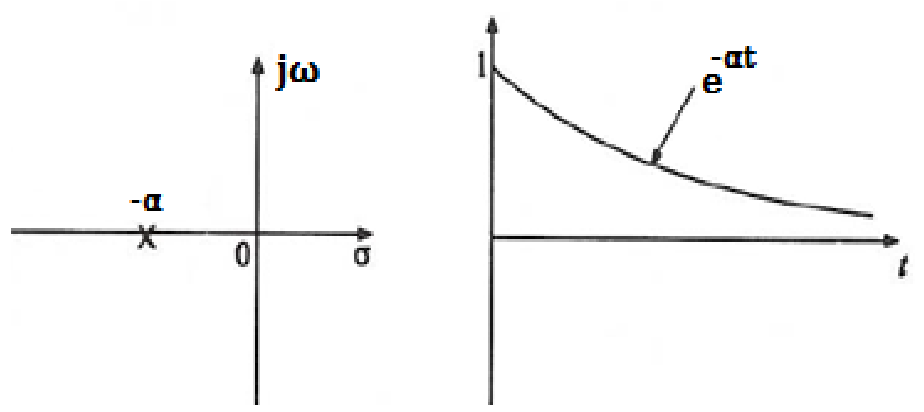
$$X(s) = \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \ldots . (s - z_M)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \ldots . (s - p_N)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)} s^{M-N}$$

- $\alpha_i, i = 1,2, \ldots, N$ και $b_j, j = 1,2, \ldots, M$: σταθερές (πραγματικοί αριθμοί)
- Μ και Ν: οι βαθμοί των πολυωνύμων (θετικοί ακέραιοι).
- **Μηδενικά** (zeros): οι τιμές του $s$ που μηδενίζουν τον **αριθμητή** $(z_1, z_2, \ldots, z_M)$
- **Πόλοι** (poles): οι τιμές του $s$ που μηδενίζουν τον **παρανομαστή** $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$
- Η περιοχή σύγκλισης του ML μιας συνάρτησης **δεν περιλαμβάνει πόλους**.

# Πόλοι και Ευστάθεια Συστήματος (1/4)

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι **ευσταθές** όταν όλοι οι **πόλοι** του μετασχηματισμού Laplace της κρουστικής απόκρισής του έχουν **αρνητικό** πραγματικό μέρος.

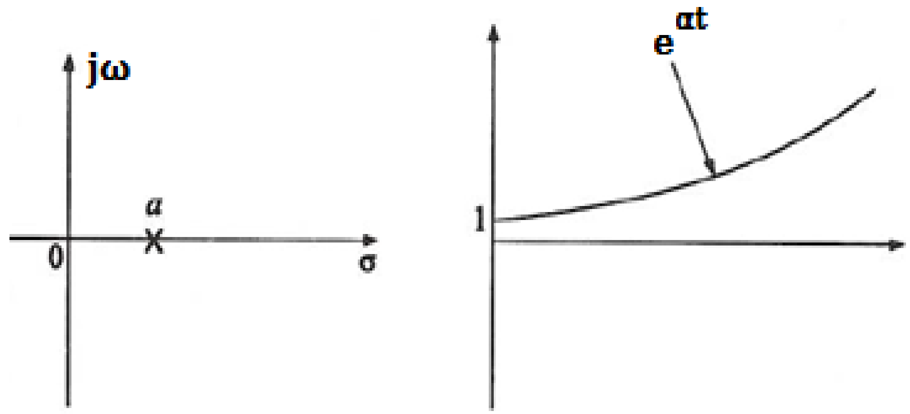
- Σήματα χρόνου που είναι πολλαπλασιασμένα με $e^{-at}$, $(a > 0)$ εμφανίζουν πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο της μιγαδικής συχνότητας $s$ και είναι **ευσταθή**.




Πόλοι ευσταθούς συστήματος

# Πόλοι και Ευστάθεια Συστήματος (2/4)

Σήματα χρόνου που είναι πολλαπλασιασμένα με δυνάμεις του $t$ εμφανίζουν πόλους στο δεξιό ημιεπίπεδο του $s$ και είναι **ασταθή**.

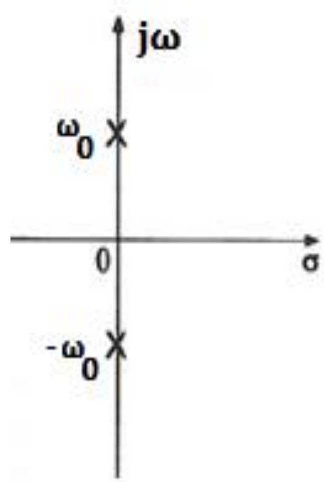


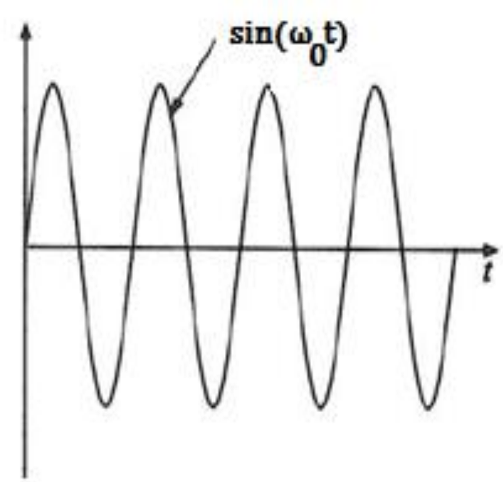

Πόλοι ασταθούς συστήματος

# Πόλοι και Ευστάθεια Συστήματος (3/4)

Σήματα που περιέχουν **ημιτονοειδείς** όρους (ταλάντωση) εμφανίζουν **μιγαδικούς συζυγείς πόλους**.

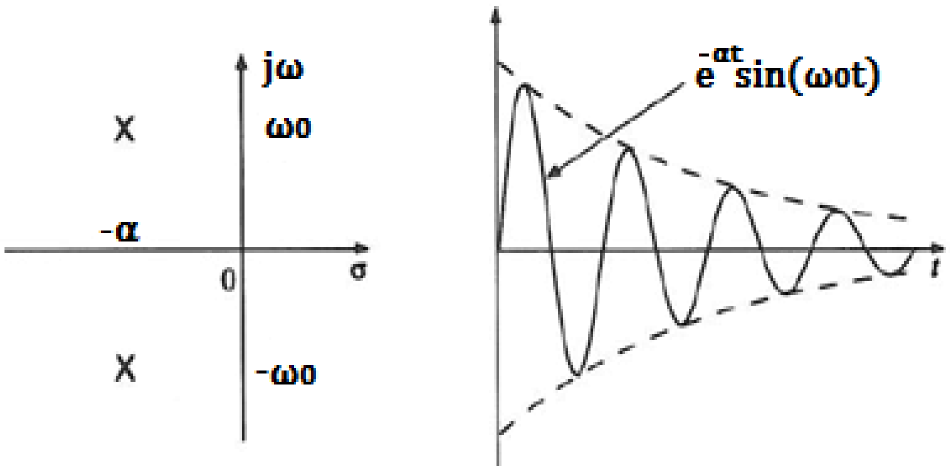
- Αν το πραγματικό μέρος των συζυγών πόλων είναι μηδέν τότε έχουμε συντηρούμενη ταλάντωση.
- Αλλιώς η ταλάντωση είναι εκθετικά φθίνουσα ή εκθετικά αύξουσα.



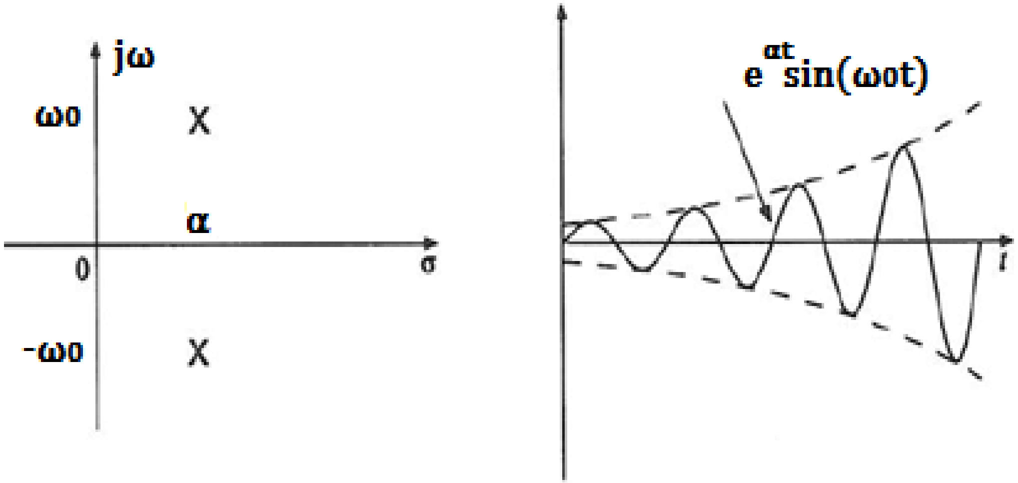




Πόλοι οριακά ευσταθούς συστήματος

# Πόλοι και Ευστάθεια Συστήματος (4/4)




Πόλοι ευσταθούς συστήματος




Πόλοι ασταθούς συστήματος

# Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $x(t) = u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_{0}^{\infty}$$

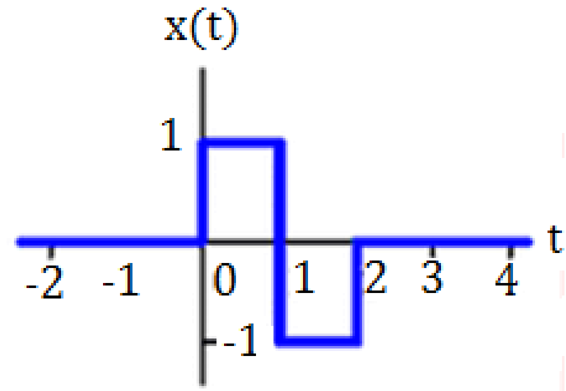
$$= -\frac{1}{s}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-st} - e^{0}\right] = -\frac{1}{s}[0-1] = \frac{1}{s}$$

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού, ορίζεται από τις τιμές του $s$ για τις οποίες μπορεί να υπολογιστεί το παραπάνω ολοκλήρωμα. Αυτό γίνεται όταν συγκλίνει το όριο, γεγονός που απαιτεί ο εκθέτης – $st$ να λαμβάνει αρνητική τιμή ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν, άρα πρέπει να ισχύει $s > 0$.

Επομένως η περιοχή σύγκλισης ορίζεται για $Re\{s\} > 0$.

# Άσκηση 2

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:




<u>Απάντηση</u>: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{1} e^{-st}dt - \int_{1}^{2} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \frac{1}{s}e^{-st}\Big|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$$

$$= -\frac{1}{s}[e^{-s} - 1 + e^{-2s} + e^{-s}] = \frac{e^{-2s} - 2e^{s} + 1}{s}$$

Επειδή τα ολοκληρώματα συγκλίνουν για όλες τις τιμές του $s$, προκύπτει ως περιοχή σύγκλισης όλο το μιγαδικό επίπεδο $s$.

# Άσκηση 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

*1)* $x_1(t) = e^{-\alpha t}\, u(t)$

*2)* $x_2(t) - e^{-\alpha t}\, u(-t)$

<u>Απάντηση</u>: 1) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha+s} e^{-(\alpha+s)t}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha+s}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-(\alpha+s)t} - e^{0}\right]$$

Παρατηρούμε ότι το όριο μπορεί να υπολογιστεί όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός. Αυτό συμβαίνει επειδή μία τιμή εκθέτη $-\infty$, κάνει τον όριο να τείνει στο μηδέν. Αντίθετα, αν ο εκθέτης είναι θετικός, τότε το όριο τείνει στο $+\infty$, άρα το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

Άρα ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει μόνο στην περίπτωση που ισχύει :

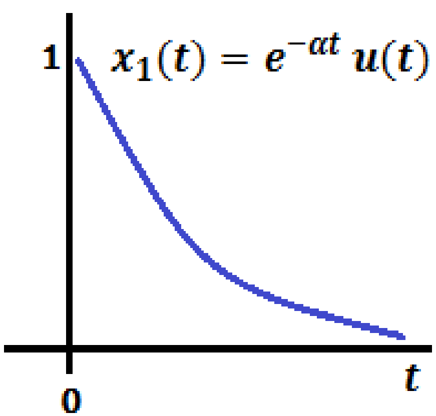
$$\alpha + s > 0 \Rightarrow (a+\sigma) + j\omega > 0 \Rightarrow (a+\sigma) > 0 \Rightarrow \sigma > -\alpha$$

# Άσκηση 3 (συνέχεια)

Επειδή είναι γνωστό ότι $Re\{s\} = \sigma$, καταλήγουμε στη διαπίστωση ότι η περιοχή σύγκλισης του ζητούμενου μετασχηματισμού Laplace ορίζεται από τη σχέση $\boldsymbol{Re\{s\} > -\alpha}$ και η τιμή του είναι:

$$\boldsymbol{X_1(s) = \frac{1}{\alpha + s}}$$

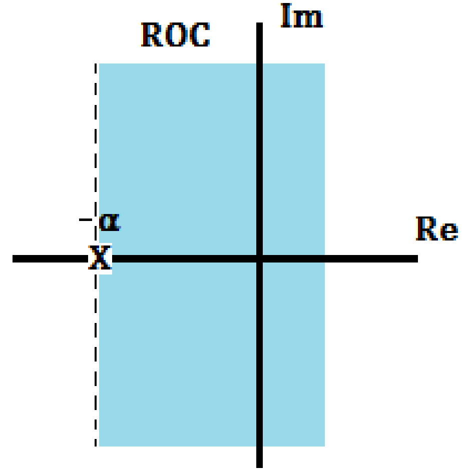
**Συνάρτηση Χρόνου**




**Μετασχηματισμός Laplace**

$$X_1(s) = \frac{1}{\alpha + s}$$

**Περιοχή Σύγκλισης**



# Άσκηση 3 (συνέχεια)

2) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο και έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-at}\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(\alpha+s)t}\, dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{\alpha+s} e^{-(\alpha+s)t}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\alpha+s}\left[e^{0} - \lim_{t\to-\infty} e^{-(\alpha+s)t}\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha} + s\left[\lim_{t\to-\infty} e^{-(\alpha+s)t} - e^{0}\right]$$

Το όριο μπορεί να υπολογιστεί όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός. Επειδή το $t$ είναι αρνητικός (αφού $t \to -\infty$), το ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο αν:

$$\alpha + s < 0 \Rightarrow (a+\sigma) + j\omega < 0 \Rightarrow (a+\sigma) < 0 \Rightarrow \sigma < -\alpha$$

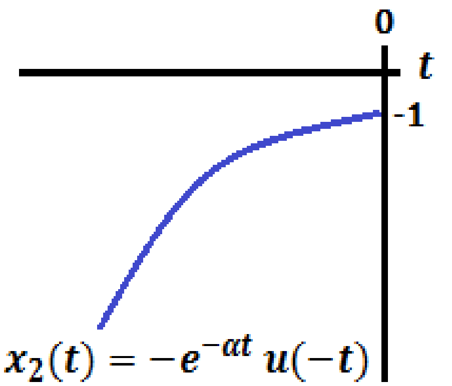
Και στην περίπτωση αυτή η τιμή του ML είναι η ίδια με την προηγούμενη, δηλ.

$$\boldsymbol{X_2(s) = \frac{1}{\alpha + s}}$$

όμως η περιοχή σύγκλισης είναι $\boldsymbol{Re\{s\} < -\alpha}$

# Άσκηση 3 (συνέχεια)

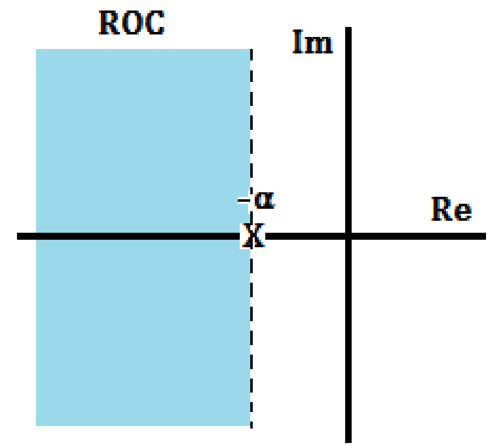
**Συνάρτηση Χρόνου**




**Μετασχηματισμός Laplace**

$$X_2(s) = \frac{1}{\alpha + s}$$

**Περιοχή Σύγκλισης**




<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Δύο διαφορετικά σήματα έχουν τον ίδιο ΜL αλλά διαφορετικές περιοχές σύγκλισης.
- Και τα δύο σήματα είναι ευσταθή, ενώ η οριακή τιμή (πόλος) της περιοχής σύγκλισης και στις δύο περιπτώσεις βρίσκεται στο αρνητικό (αριστερό) ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου συχνοτήτων s.

# Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

1) $x_1(t) = \delta(t)$ 2) $x_2(t) = \delta(t - t_0)$

<u>Απάντηση</u>: 1) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt = e^{-st}\big|_{t=0} = e^0 = 1$$

Η περιοχή σύγκλισης ορίζεται για $Re(s) > -\infty$, δηλ. είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο.

Σχόλιο: Στη λύση του ολοκληρώματος χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της επιλογής της συνάρτησης δ(t), δηλ.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) x(t)\, dt = x(0)$$

# Άσκηση 4 (συνέχεια)

β) Εργαζόμενοι ομοίως, έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st}\, dt = e^{-st}\big|_{t=t_0} = e^{-st_0}$$

Η περιοχή σύγκλισης ορίζεται για $Re(s) > -\infty$, δηλ. είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο.

# Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

1) $x_1(t) = [\cos(\omega_0 t)]\ u(t)$ 2) $x_2(t) = [\sin(\omega_0 t)]\ u(t)$

Απάντηση: 1) Από τον ορισμό του ML και τη σχέση Euler $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right]$:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\omega_0 t)]\, u(t) e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\ e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{j\omega_0 t}\, e^{-st}\, dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-j\omega_0 t}\, e^{-st} dt = \frac{1}{2} L\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} + \frac{1}{2} L\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right] = \frac{s}{s^2 + {\omega_0}^2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $Re(s) > 0$

# Άσκηση 5 (συνέχεια)

β) Εργαζόμενοι ομοίως  και χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler για τη συνάρτηση ημιτόνου, δηλ. $\sin\varphi = \frac{1}{2j}\left[e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right]$, έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\sin(\omega_0 t)]\, u(t) e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} \sin(\omega_0 t)\; e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{j\omega_0 t}\, e^{-st}\, dt - \frac{1}{2j}\int_0^{\infty} e^{-j\omega_0 t}\, e^{-st} dt = \frac{1}{2j} L\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} - \frac{1}{2j} L\left\{e^{-j\omega_0 t}\right\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right] \quad = \frac{\omega_0}{s^2 + {\omega_0}^2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι $Re(s) > 0$

# Άσκηση 6

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

1) $x_1(t) = [e^{-\alpha t}cos(\omega_0 t)]\, u(t)$ 2) $x_2(t) = [e^{-\alpha t}sin(\omega_0 t)]\, u(t)$

<u>Απάντηση</u>: 1) Με βάση τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\alpha t}cos(\omega_0 t)]\, u(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, cos(\omega_0 t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{j\omega_0 t}\, e^{-st}\, dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega_0 t}\, e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2}L\left\{e^{-(a-j\omega_0)t}\right\} + \frac{1}{2}L\left\{e^{-(a+j\omega_0)t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+a-j\omega_0} + \frac{1}{s+a+j\omega_0}\right]$$

$$= \frac{s+a}{(s+a)^2 + {\omega_0}^2}$$

Περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -a$

# Άσκηση 6 (συνέχεια)

2) Εργαζόμενοι ομοίως, έχουμε:

$$X_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\alpha t} sin(\omega_0 t)]\, u(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, sin(\omega_0 t)\, e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{j\omega_0 t}\, e^{-st}\, dt - \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega_0 t}\, e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j} L\left\{e^{-(a-j\omega_0)t}\right\} - \frac{1}{2j} L\left\{e^{-(a+j\omega_0)t}\right\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s+a-j\omega_0} - \frac{1}{s+a+j\omega_0}\right]$$

$$= \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + {\omega_0}^2}$$

Περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -a$

# 4. Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace

# Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace (1/3)

| Σήμα $x(t)$ | ML $X(s)$ | Περιοχή Σύγκλισης |
|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $Re(s) > -\infty$ (όλο το επίπεδο $s$) |
| $\delta(t-t_0)$ | $e^{-t_0 s}$ | $Re(s) > -\infty$ |
| $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $Re(s) > 0$ |
| $u(t-t_0)$ | $\frac{e^{-t_0 s}}{s}$ | $Re(s) > 0$ |
| $r(t)$ | $\frac{1}{s^2}$ | $Re(s) > 0$ |
| $\frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$ | $s^n$ | $Re(s) > -\infty$ |

# Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace (2/3)

| Σήμα $x(t)$ | ML $X(s)$ | Περιοχή Σύγκλισης |
|---|---|---|
| $e^{-at}\,u(t)$ | $\dfrac{1}{s+a}$ | $Re(s) > -a$ |
| $e^{+at}\,u(t)$ | $\dfrac{1}{s-a}$ | $Re(s) > a$ |
| $e^{j\omega_0 t}\,u(t)$ | $\dfrac{1}{s-j\omega_0}$ | $Re(s) > 0$ |
| $cos(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ | $Re(s) > 0$ |
| $sin(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ | $Re(s) > 0$ |

# Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Laplace (3/3)

| Σήμα $x(t)$ | ML $X(s)$ | Περιοχή Σύγκλισης |
|---|---|---|
| $e^{-at}cos(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ | $Re(s) > -a$ |
| $e^{-at}sin(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ | $Re(s) > -a$ |
| $t^n\,u(t)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $Re(s) > 0$ |
| $e^{-at}\,t^n\,u(t)$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ | $Re(s) > -a$ |
| $t\,cos(\omega_0 t)\,u(t)$ | $\frac{s^2-\omega_0^2}{(s^2+\omega_0^2)^2}$ | $Re(s) > 0$ |