Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 12: Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace – Ο αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

1. Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace
2. Θεωρήματα συνέλιξης στο χρόνο και τη συχνότητα
3. Θεώρημα αρχικής και τελικής τιμής
4. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
   – Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα

1. Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace

1. Γραμμικότητα
2. Ολίσθηση στον χρόνο
3. Ολίσθηση στη μιγαδική συχνότητα
4. Κλιμάκωση στο χρόνο και στη μιγαδική συχνότητα
5. Μιγαδική συζυγία
6. Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου
7. Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος
8. Παραγώγιση στη μιγαδική συχνότητα
9. Ολοκλήρωση στη μιγαδική συχνότητα

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (1/5)

1. Γραμμικότητα

Εάν $x_1(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_1(s)$ με περιοχή σύγκλισης (ΠΣ) R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_2(s)$ με ΠΣ R_2 τότε για κάθε α_1, α_2 ισχύει:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{L} a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s) \quad \text{με ΠΣ } R_1 \cap R_2$$

2. Ολίσθηση στον χρόνο

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R τότε για κάθε t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0} X(s) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (2/5)

2. Ολίσθηση στον χρόνο

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R τότε για κάθε t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \xrightarrow{L} e^{-st_0} X(s) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

3. Ολίσθηση στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, τότε για κάθε s_0 ισχύει:

$$x(t)\, e^{s_0 t} \xrightarrow{L} X(s - s_0) \text{ με ΠΣ } \; R + Re\{s_0\}$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (3/5)

4. Κλιμάκωση στο χρόνο και στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, τότε για κάθε $b > 0$ ισχύει:

$$x(bt) \xrightarrow{L} \frac{1}{|b|} X\left(\frac{s}{b}\right) \text{ με ΠΣ } R/b$$

5. Μιγαδική συζυγία

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, τότε για τη συζυγή συνάρτηση $x^*(t)$ θα ισχύει:

$$x^*(t) \xrightarrow{L} X^*(s^*) \text{ με την ίδια ΠΣ } R$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (4/5)

6. Μετασχηματισμός Laplace παραγώγου

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, τότε:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s) - x(0^-) \text{ με την ιδια ΠΣ } R$$

Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η ιδιότητα της παραγώγισης είναι ίδια για τον μονόπλευρο και τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace.

7. Μετασχηματισμός Laplace ολοκληρώματος

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ τότε:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s}X(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\, d\tau \qquad \text{με ΠΣ } R \cap \{Re\{s\} > 0\}$$

Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η ιδιότητα της ολοκλήρωσης είναι ίδια για τον μονόπλευρο και τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Laplace (5/5)

8. Παραγώγιση στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ με ΠΣ R, τότε:

$$-t\, x(t) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds} \qquad \text{με ΠΣ } R$$

Επεκτείνοντας σε πολλαπλή παράγωγο, έχουμε:

$$(-t)^n\, x(t) \xrightarrow{L} \frac{d^n X(s)}{ds^n} \qquad \text{με ΠΣ } R$$

9. Ολοκλήρωση στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ τότε:

$$\frac{1}{t} x(t) \xrightarrow{L} \int_0^{\infty} X(u)du \qquad \text{με ΠΣ } R$$

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί ο ΜL του σήματος $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$

<u>Απάντηση</u>: Γνωρίζουμε ότι ο ML του $e^{-at}\,u(t)$ είναι $1/(s+a)$ με περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -a$. Επομένως για κάθε επιμέρους τμήμα του $x(t)$, ο ML είναι:

$$e^{-t}\,u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+1}$$

με περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -1$, και:

$$e^{-2t}\,u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+2}$$

με περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -2$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας, έχουμε:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

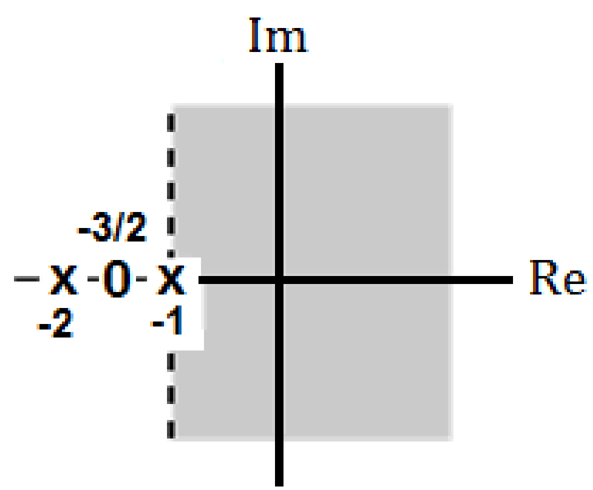
Περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης, δηλ. $Re(s) > -1$.

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Από την (κλασματική) μορφή του μετασχηματισμού Laplace, παρατηρούμε ότι υπάρχουν:

- ένα μηδενικό στη θέση $Re(s) = -3/2$
- δύο πόλοι στις θέσεις $Re(s) = -1$ και $Re(s) = -2$

Εφόσον οι πόλοι του μετασχηματισμού βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, το σύστημα είναι **ευσταθές**.



Άσκηση 2

Να υπολογιστεί ο ML του $x(t) = (1 - (1 - t)e^{-3t})u(t)$

<u>Απάντηση</u>: Η δοθείσα συνάρτηση αναλύεται στο άθροισμα $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, όπου:

$$x_1(t) = u(t)$$

$$x_2(t) = -e^{-3t}u(t)$$

$$x_3(t) = te^{-3t}u(t)$$

Οι μετασχηματισμοί Laplace των παραπάνω συναρτήσεων, είναι:

$$X_1(s) = \frac{1}{s}, \qquad Re(s) > 0$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+3}, \qquad Re(s) > -3$$

$$X_3(s) = \frac{1}{(s+3)^2}, \qquad Re(s) > -3$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας βρίσκουμε ότι ο ML, είναι:

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{(s+3)^2} = \frac{4s+9}{s(s+3)^2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι η τομή των τριών επιμέρους περιοχών σύγκλισης, άρα $Re(s) > 0$.

Από τη λύση που βρήκαμε συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα συνάρτηση $x(t)$ έχει

- Ένα μηδενικό στη θέση $s = -9/4$
- Έναν απλό πόλο στη θέση $s = 0$
- Έναν διπλό πόλο στη θέση $s = -3$

Αφού οι πόλοι της συνάρτησης σήματος βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο (και στο μηδέν), συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση περιγράφει ένα **ευσταθές σύστημα**.

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t) = t\cos(\omega t)$

Απάντηση: Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα του ML, δηλαδή

$$-t\,x(t) \xrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}$$

θα έχουμε:

$$L\{t\cos(\omega t)\} = -\frac{d}{ds}\left\{L\{\cos(\omega t)\}\right\}$$

Από τον πίνακα γνωστών ML διαπιστώνουμε ότι $cos(\omega t) \xrightarrow{L} s/(s^2+\omega^2)$ και επομένως θα έχουμε:

$$t\cos(\omega t) \xrightarrow{L} -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

2. Θεωρήματα συνέλιξης στο χρόνο και τη συχνότητα

Συνέλιξη στο χρόνο

Εάν $x_1(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_1(s)$ με ΠΣ R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_2(s)$ με ΠΣ R_2 τότε η συνέλιξη $x_1(t) * x_2(t)$ έχει μετασχηματισμό Laplace που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_1(s)\, X_2(s) \quad \text{με ΠΣ } R_1 \cap R_2$$

Συνέλιξη στη μιγαδική συχνότητα

2. Συνέλιξη στη μιγαδική συχνότητα

Εάν $x_1(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_1(s)$ με ΠΣ R_1 και $x_2(t) \xrightarrow{L} \mathrm{X}_2(s)$ με ΠΣ R_2 τότε το γινόμενο $x_1(t)\, x_2(t)$ έχει μετασχηματισμό Laplace:

$$x_1(t)\, x_2(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s)$$

Αντίστροφα, μπορούμε να διατυπώσουμε την ιδιότητα:

$$X_1(s) * X_2(s) \xrightarrow{L^{-1}} 2\pi j\ [\ x_1(t)\, x_2(t)]$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος που δίδεται από τη σχέση $y(t) = x(t-2) * g(3-t)$ όπου $x(t) = e^{-2t}u(t)$ και $g(t) = e^{-3t}u(t)$

<u>Απάντηση</u>: Από την ιδιότητα της συνέλιξης του ML, έχουμε:

$$y(t) = x(t-2) * g(3-t) \Rightarrow L\{y(t)\} = L\{x(t-2)\}\, L\{g(3-t)\}$$

Είναι όμως:

$$X(s) = \frac{1}{s+2} \text{ με περιοχη σύγκλισης } Re(s) > -2$$

$$G(s) = \frac{1}{s+3} \text{ με περιοχη σύγκλισης } Re(s) > -3$$

Άρα:

$$Y(s) = L\{x(t-2)\}\, L\{g(3-t)\} = \frac{e^{-2s}}{s+2}\,\frac{e^{-3s}}{3-s}$$

3. Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής

Όταν ζητείται να υπολογιστεί η τιμή του σήματος $x(t)$ για τις περιπτώσεις $t \to 0^+$ και $t \to \infty$ χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα αρχικής και τελικής τιμής.

Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Έστω το αιτιατό σήμα $x(t)$, το οποίο δεν περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στο $t = 0$, με ML τη συνάρτηση $X(s)$ και περιοχή σύγκλισης $Re\{s\} > s_0$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{s \to \infty} s\, X(s) = \lim_{t \to 0^+} x(t) = x(0)$$

Θεώρημα Τελική Τιμής

Έστω το αιτιατό σήμα $x(t)$ το οποίο έχει πεπερασμένη τιμή στο όριο $t \to \infty$, τότε ισχύει:

$$\lim_{s \to 0} s\, X(s) = \lim_{t \to \infty} x(t) = x(\infty)$$

4. Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ο αντίστροφος ΜL χρησιμοποιείται για να «επιστρέψουμε» από το πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s στο πεδίο του χρόνου t. Συμβολικά εκφράζεται από:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

Η μαθηματική έκφραση που τον περιγράφει είναι:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, dt$$

- Το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος μίας ευθείας $Re\{s\} = c$ που είναι παράλληλη προς τον φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

- Αποδεικνύεται ότι η σύγκλιση του ολοκληρώματος του αντίστροφου ΜL εξασφαλίζεται όταν η παραπάνω ευθεία περικλείει όλους τους πόλους του μετασχηματισμού, δηλαδή όταν η πραγματική τιμή της σταθεράς c είναι μεγαλύτερη από το πραγματικό μέρος όλων των πόλων της συνάρτησης $X(s)$.

Τρόποι Υπολογισμού Αντίστροφου ΜL

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace όπως:

1) Η μέθοδος της **μιγαδικής ολοκλήρωσης**, που βασίζεται στην επίλυση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο κατά μήκος ενός κατάλληλα επιλεγμένου δρόμου.
2) Η μέθοδος του **αναπτύγματος σε δυναμοσειρά**, που χρησιμοποιείται όταν ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά άπειρων όρων.
3) Η μέθοδος του **αναπτύγματος σε απλά κλάσματα**, που αποτελεί την πλέον διαδεδομένη μέθοδο υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace και η οποία θα παρουσιαστεί αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.
4) Το **θεώρημα Heaviside**

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (1/5)

Η μέθοδος βρίσκει εφαρμογή σε μετασχηματισμούς που μπορούν να γραφούν σε **ρητή μορφή**, δηλαδή ως $X(s) = B(s)/A(s)$.

Στηρίζεται στην ιδιότητα της γραμμικότητας του ML και στη γραφή της συνάρτησης X(s) ως έναν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών ML:

$$X(s) = \alpha_1 X_1(s) + \alpha_2 X_2(s) + \cdots + \alpha_n\, X_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(s)$$

Οι συναρτήσεις $X_i(s), i = 1,2 \ldots n$ θεωρούνται ως οι ML στοιχειωδών συναρτήσεων της μορφής $x_i(t), i = 1,2 \ldots n$, οι οποίοι είναι πιθανό ότι αντιστοιχούν σε απλούς γνωστούς ML.

Αν υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $X_i(s)$, μπορούμε να βρούμε τα $x_i(t)$ και ακολούθως το σήμα $x(t)$ από την παρακάτω σχέση:

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n\, x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i(t)$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα (2/5)

Πολλές φορές ο ML ενός σήματος συναντάται στη μορφή ρητής συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$\alpha_i, b_i \in R$, άρα το σύστημα είναι ΓΧΑ με πραγματική κρουστική απόκριση.

Αν λ_i είναι οι ρίζες της συνάρτηση $A(s)$, αυτή γράφεται ως:

$$\mathrm{A}(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - \lambda_i)$$

Ανάλογα με τη φύση των ριζών του A(s), διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Ρίζες διακριτές και πραγματικές

2) Ρίζες πολλαπλές και πραγματικές

3) Ρίζες μιγαδικές

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα

1) Ρίζες διακριτές και πραγματικές

Η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως:

$$\mathrm{X}(s) = \frac{C_1}{s - \lambda_i} + \cdots + \frac{C_n}{s - \lambda_n}$$

Οι συντελεστές $C_1, \ldots, C_n$ υπολογίζονται από τον τύπο:

$$C_i = \lim_{s \to \lambda_i} (s - \lambda_i)\, X(s)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται με τη χρήση του πίνακα γνωστών ML και των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού, οπότε το $x(t)$ είναι:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}\right] u(t)$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα

2) Ρίζες πολλαπλές και πραγματικές

Έστω ότι η λ_1 εμφανίζεται με πολλαπλότητα r και οι υπόλοιπες ρίζες είναι μοναδικές. Ο παρανομαστής παραγοντοποιείται ως:

$$\mathrm{A}(s) = (s-\lambda_1)^r \prod_{i=r+1}^{n} (s-\lambda_i)$$

και η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως:

$$X(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_2}{(s-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{C_r}{(s-\lambda_1)^r} + \frac{C_{r+1}}{s-\lambda_{r+1}} + \cdots + \frac{C_n}{s-\lambda_n}$$

Οι συντελεστές $C_i, i = 1, \dots r$ που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα είναι:

$$C_i = \lim_{s\to\lambda_i} \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} [(s-\lambda_1)^r X(s)], \qquad i = 1, \dots, r$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα

Οι υπόλοιποι συντελεστές $C_i, \quad i = r+1, \dots, n$, υπολογίζονται όπως στην προηγούμενη περίπτωση (1).

Τέλος, έχοντας υπολογίζει όλους τους συντελεστές $C_i, i = 1, \dots n$ βρίσκουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= L^{-1}\{X(s)\} \\
&= \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} + \cdots + C_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda_1 t} + C_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \cdots \right. \\
&\left. + C_n e^{\lambda_n t}\right] u(t)
\end{aligned}
$$

Μέθοδος αναπτύγματος σε απλά κλάσματα

3) Ρίζες μιγαδικές

Αν το πολυώνυμο $A(s)$ έχει ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών ριζών, τις $\lambda_1 = \sigma + j\Omega$ και $\lambda_2 = \lambda_1^* = \sigma - j\Omega$, η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται ως:

$$\mathrm{X}(s) = \frac{C_1}{s-\lambda_1} + \frac{C_1}{s-\lambda_1^*} + \cdots + \frac{C_n}{s-\lambda_n}$$

Οι συντελεστές $C_1, \ldots, C_n$ υπολογίζονται από τον τύπο:

$$C_i = \lim_{s \to \lambda_i} (s-\lambda_i)\, X(s)$$

Οι συντελεστές C_1 και C_2 θα είναι μιγαδικοί συζυγείς, δηλ. $C_2 = C_1^*$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \left[C_1 e^{\lambda_1 t} + C_1^*\, e^{\lambda_1^*\, t} + \cdots + \sum_{i=3}^{n} C_i e^{\lambda_i t} \right] u(t)$$

Η ύπαρξη συζυγών μιγαδικών ριζών στον μετασχηματισμό Laplace ενός σήματος αντιστοιχεί στην ύπαρξη ημιτονοειδών όρων στο σήμα.

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3}$$

<u>Απάντηση</u>: Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή ως:

$$s^2 + 4s + 3 = (s + 1)(s + 3)$$

Επομένως η συνάρτηση $X(s)$ γράφεται:

$$X(s) = \frac{C_1}{s + 1} + \frac{C_2}{s + 3}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1 και C_2:

$$C_1 = \lim_{s \to -1} [(s + 1)X(s)] = \lim_{s \to -1} \frac{3s + 7}{s + 3} = 2$$

$$C_2 = \lim_{s \to -3} [(s + 3)\, X(s)] = \lim_{s \to -3} \frac{3s + 7}{s + 1} = 1$$

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Επομένως:

$$X(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλ. είναι:

$$x(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t) = [2e^{-t} + e^{-3t}]\, u(t)$$

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης:

$$X(s) = \frac{s}{(s+1)^3\,(s+2)}$$

<u>Απάντηση</u>: Ο παρανομαστής έχει μία πραγματική τριπλή ρίζα την $\lambda_1 = -1$ και μία απλή, την $\lambda_2 = -2$. Έτσι, η συνάρτηση $X(s)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$X(s) = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{(s+1)^2} + \frac{C_3}{(s+1)^2} + \frac{C_4}{s+2}$$

Υπολογίζουμε τις σταθερές C_1, C_2, C_3 και C_4:

$$C_1 = \lim_{s \to -1} \frac{1}{(3-1)!}\,\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 X(s)\right] = \lim_{s \to -1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s}{s+2}\right] = -2$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

$$C_2 = \lim_{s\to -1} \frac{1}{(3-2)!} \frac{d}{ds}[(s+1)^3 X(s)] = 2$$

$$C_3 = \lim_{s\to -1}[(s+1)^3 X(s)] = -1$$

$$C_4 = \lim_{s\to -2}[(s+2)\, X(s)] = 2$$

Επομένως:

$$X(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{2}{s+2}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι το άθροισμα των αντίστροφων μετασχηματισμών κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλ. είναι:

$$x(t) = [-2e^{-t} + 2\, t\, e^{-t} - \frac{t^2}{2} e^{-t} + 2e^{-2t}]\, u(t)$$

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς:

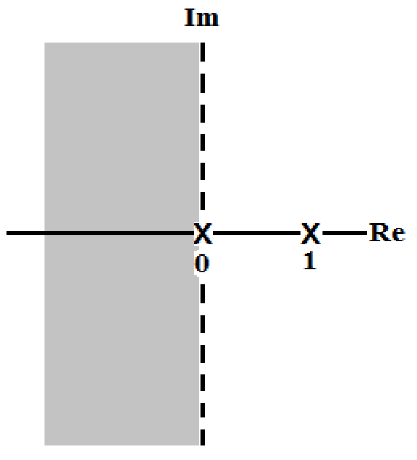
$$H(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$$

Απάντηση: Η $h(t)$ προκύπτει με αντίστροφο ML στην $H(s)$. Γράφουμε την $H(s)$ σε μορφή αθροίσματος ρητών συναρτήσεων:

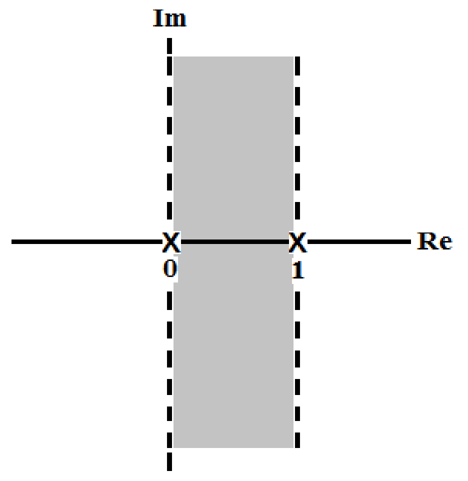
$$H(s) = \frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

Διαπιστώνουμε ότι η $H(s)$ έχει έναν διπλό πόλο στο $s = 0$ και έναν απλό πόλο στο $s = 1$. Επειδή δεν μας έχει δοθεί μία συγκεκριμένη περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού θα αξιοποιήσουμε την πληροφορία των πόλων, οι οποίοι διαιρούν το μιγαδικό επίπεδο σε τρείς πιθανές περιοχές σύγκλισης, τις: (α) $s < 0$, (β) $0 < s < 1$ και (γ) $s > 1$, οι οποίες απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα.

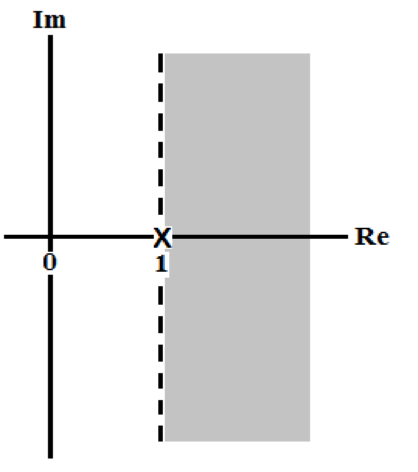
Άσκηση 7 (συνέχεια)



(α) $Re(s) < 0$



(β) $0 < Re(s) < 1$



(γ) $Re(s) > 1$

Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$: (α) οριακά ευσταθές, (β) και (γ) αιτιατό σύστημα.

Άσκηση 7 (συνέχεια)

(α) Για $s < 0$ όλοι οι όροι είναι αριστερής-περιοχής (left-sided), άρα:

$$h(t) = -e^t u(-t) + u(-t) + t\, u(-t)$$

(β) Για $0 < s < 1$, ο εκθετικός όρος είναι αριστερής-περιοχής (left-sided), και οι υπόλοιποι είναι δεξιάς-περιοχής (right-sided), άρα:

$$h(t) = -e^t u(-t) - u(t) - t\, u(t)$$

(γ) Για $s > 1$ όλοι οι όροι είναι δεξιάς -περιοχής (right-sided), άρα:

$$h(t) = e^t u(t) - u(t) - t\, u(t)$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι **ευσταθές** μόνο στην περίπτωση (α).