Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Σήματα και Συστήματα

Διάλεξη 13: Μελέτη ΓΧΑ Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Laplace

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Μελέτη ΓΧΑ Συστημάτων με τον Μετασχηματισμό Laplace

1. Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με τον Μετασχηματισμό Laplace
2. Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος

1. Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με τον Μετασχηματισμό Laplace

Επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με τον Μετασχηματισμό Laplace

Μία πολύ χρήσιμη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace (ML) είναι ότι μετατρέπει τη δύσκολη επίλυση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με Σταθερούς Συντελεστές (ΓΔΕΣΣ) σε εύκολη επίλυση μίας απλής αλγεβρικής εξίσωσης.

Συνοπτικά:

- Υπολογίζουμε τους ML των δύο μελών της ΓΔΕΣΣ και καταλήγουμε σε μία αλγεβρική εξίσωση ως προς την $Y(s)$.
- Με αντίστροφο ML υπολογίζουμε τη ζητούμενη λύση $y(t)$.

Επίλυση ΓΔΕΣΣ με τον ML (1/3)

Αναλυτικά:

Ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$ περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση (ΓΔΕΣΣ) τάξης n, με σταθερούς συντελεστές:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t)$$

όπου τα $a_i, i = 0,1, \dots, n$ είναι πραγματικές σταθερές.

Η ΓΔΕΣΣ συνοδεύεται από τις αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = b_0, \qquad y^{(1)}(0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

Ο συμβολισμός $y^{(i)}(t)$ δηλώνει την παράγωγο i −τάξης της συνάρτησης $y(t)$.

Το αριστερό μέλος εν συντομία γράφεται και ως $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)$

Επίλυση ΓΔΕΣΣ με τον ML (2/3)

Για την επίλυση της ΓΔΕΣΣ θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της παραγώγου του ML , δηλαδή:

$$L\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = sL\left\{\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\right\} - y^{(n)}(0)$$

Αναλυτικά, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Υπολογίζουμε τον ML και των δύο μελών της ΓΔΕΣΣ:

$$L\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)\right\} = L\{x(t)\}$$

2. Λόγω γραμμικότητας, ο ML του αριστερού μέλους ισούται με το άθροισμα των ML των επιμέρους όρων:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \, L\{y^{(i)}(t)\} = L\{x(t)\}$$

Επίλυση ΓΔΕΣΣ με τον ML (3/3)

3. Οι παραπάνω ML υπολογίζονται με χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης, οπότε το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης γράφεται ως:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, L\{y^{(i)}(t)\} = a_0 L\{y(t)\} + a_1 L\{y'(t)\} + a_2 L\{y''(t)\} + \cdots + a_n L\{y^{(n)}(t)\}$$
$$= a_0 L\{y(t)\} + a_1 s\, L\{y(t)\} - a_1 y(0) + a_2\, s^2 L\{y(t)\} - a_2 s\, y(0) - a_2 y'(0) + \ \dots$$

Στο βήμα αυτό αξιοποιούμε τη γνώση των αρχικών συνθηκών.

5. Ο ML του δεξιού μέλους, δηλαδή της $x(t)$ υπολογίζεται είτε απευθείας είτε με τη χρήση του Πίνακα γνωστών ML.

6. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς $Y(s)$, όπου $Y(s)$ είναι ο ML της ζητούμενης συνάρτησης $y(t)$.

7. Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML της $Y(s)$, δηλαδή τη γενική λύση $y(t)$. Αυτό γίνεται είτε με χρήση πινάκων αν η μορφή της $Y(s)$ είναι απλή, είτε με μεθόδους υπολογισμού αντίστροφου ML.

Άσκηση 1

Να επιλυθεί η ακόλουθη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (ΓΔΕΣΣ):

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \equiv u(t)$$

με αρχική συνθήκη $y(0^-) = 0$.

<u>Απάντηση</u>: Για την επίλυση της ΓΔΕΣΣ εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τον MLτων δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης:

$$s\,Y(s) - y(0^-) + a\,Y(s) = L\{u(t)\} \Rightarrow$$
$$s\,Y(s) + a\,Y(s) = \frac{1}{s}$$

Βήμα 2: Λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML, αναλύοντας τη συνάρτηση $Y(s)$ σε άθροισμα ρητών κλασμάτων:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{as} - \frac{1}{a(s+a)}$$

Επομένως, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\, u(t)$$

Άσκηση 2

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την ακόλουθη ΓΔΕΣΣ, όπου $x(t)$ είναι η είσοδος και $y(t)$ είναι η έξοδος του συστήματος:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \equiv sint$$

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι $y(0^-) = 2,\quad y'(0^-) = 0$ και $y''(0^-) = -1$, να βρεθεί η έξοδος του συστήματος.

Απάντηση: Για να βρεθεί η έξοδος του συστήματος, θα πρέπει να επιλυθεί η ΓΔΕΣΣ.

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τον ML των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης:

$$s^3Y(s) - s^2y(0^-) - sy'(0^-) - y''(0^-) - sY(s) + y(0^-) = L\{sint\} \Rightarrow$$

$$s^3\, Y(s) - 2s^2 - 1 - s\, Y(s) + 2 = \frac{1}{s^2+1}$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Βήμα 2: Λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 1}{s^3 - s} + \frac{1}{(s^3 - s)(s^2 + 1)} = \frac{2s^3 + s}{(s^2 + 1)(s^2 - 1)}$$

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML, αναλύοντας τη συνάρτηση $Y(s)$ σε άθροισμα ρητών κλασμάτων:

$$Y(s) = \frac{3}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

Επομένως, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = \left[\frac{3}{4}(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2}cos\ t\right]u(t)$$

2. Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος

Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος (1/3)

Ο ML δίνει μια απλή λύση στον υπολογισμό της **συνάρτησης μεταφοράς** ενός συστήματος.

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την ΓΔΕΣΣ:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 x(t)$$

όπου τα α_i, b_j είναι πραγματικές σταθερές.

Εάν υποθέσουμε ότι όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, παίρνοντας τον ML των δύο μελών της προηγούμενης σχέσης, βρίσκουμε ότι:

$$H(s) \equiv \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \; s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \; s^i} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος (2/3)

- Η συνάρτηση $H(s)$ καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function) του συστήματος

- Αποτελεί μια σχέση μεταξύ των ML εξόδου και της εισόδου του συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι το σύστημα βρίσκεται σε αρχική κατάσταση ηρεμίας (μηδενικές αρχικές συνθήκες).

- Αν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδέν τότε η συνάρτηση μεταφοράς δεν θα ήταν συνάρτηση μόνο των σημάτων εισόδου – εξόδου, αλλά και των εκάστοτε αρχικών συνθηκών.

Συνάρτηση Μεταφοράς Συστήματος (3/3)

Υπολογίζουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος μέσω της συνέλιξης εισόδου και κρουστικής απόκρισης, δηλαδή:

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Θεωρώντας ότι το σύστημα είναι και αιτιατό [δηλ. $h(t) = 0,\ t < 0$] και από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο του ML, έχουμε:

$$Y(s) = H(s)\, X(s), \qquad Re(s) > \sigma_0$$

ή

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

όπου $H(s) = L\{h(t)\}$. Από τη σχέση αυτή καταλήγουμε στο σημαντικό συμπέρασμα ότι η **συνάρτηση μεταφοράς** είναι ο μετασχηματισμός Laplace της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.

Η συνάρτηση $H(s)$ για $s = j\Omega$ (εάν αυτή ορίζεται) είναι η γνωστή μας **απόκριση συχνοτήτων** του συστήματος, δηλαδή περιγράφει τη συμπεριφορά του συστήματος στο πεδίο της συχνότητας.

Άσκηση 3

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}\, u(t)$. Πόσες και ποιες διαφορετικές είσοδοι $x(t)$ σε αυτό το σύστημα μπορούν να παράξουν μία έξοδο $y(t) = e^{-2t}\, u(t)$;

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος, από τον MLτης κρουστικής απόκρισης $h(t)$. Είναι:

$$H(s) = 1 - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s+1}$$

με περιοχή σύγκλισης $Re(s) > -1$.

Ο μετασχηματισμός Laplace $Y(s)$ της εξόδου $y(t) = e^{-2t}u(t)$ είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

Για να υπολογίσουμε το σήμα εισόδου $x(t)$, βρίσκουμε το $X(s)$ από τη σχέση:

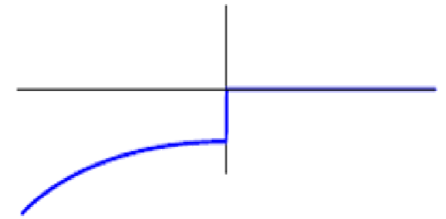
$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{\frac{s-1}{s+1}} = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s-1}$$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Η συνάρτηση $X(s)$ έχει δύο πόλους ($s = -2$ και $s = 1$), από τη θέση των οποίων προκύπτουν οι πιθανές περιοχές σύγκλισης: $s < 1, -2 < s < 1$ και $s > 1$.

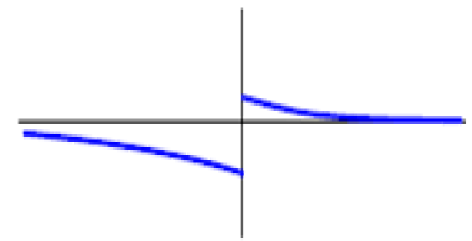
- Για $s < -2$, αμφότεροι οι όροι είναι αριστερής πλευράς:

$$x_1(t) = -\frac{1}{3}\, e^{-2t}u(-t) - \frac{2}{3}\, e^{t}u(-t)$$



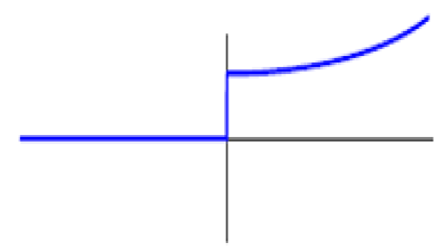
- Για $-2 < s < 1$, ο πρώτος όρος είναι δεξιάς πλευράς και ο δεύτερος είναι αριστερής πλευράς:

$$x_2(t) = \frac{1}{3}\, e^{-2t}u(t) - \frac{2}{3}\, e^{t}u(-t)$$



- Για $s > 1$, αμφότεροι οι όροι είναι δεξιάς πλευράς:

$$x_3(t) = \frac{1}{3}\, e^{-2t}u(t) + \frac{2}{3}\, e^{t}u(t)$$



Άσκηση 3 (συνέχεια)

Για να καθορίσουμε ποια από τα παραπάνω σήματα θα μπορούσε να είχε παράγει την δοθείσα έξοδο, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις περιοχές σύγκλισης. Το σύστημα $H(s)$ συγκλίνει για $Re(s) > -1$.

- Αφού η συνάρτηση $X_1(s)$ συγκλίνει μόνο για $Re(s) < -1$, δεν υπάρχει κοινή επικαλυπτόμενη περιοχή σύγκλισης, άρα αποκλείεται το σήμα $x_1(t)$ από τις πιθανές λύσεις.

- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X_2(s)$ είναι $-2 < Re(s) < -1$, η οποία τέμνεται με την περιοχή σύγκλισης της $H(s)$. Για το λόγο αυτό, το σήμα $x_2(t)$ μπορεί να είναι είσοδος.

- Τέλος, η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης $X_3(s)$ είναι $Re(s) > 1$, η οποία επίσης τέμνεται με την περιοχή σύγκλισης της $H(s)$. Για το λόγο αυτό, και το σήμα $x_3(t)$ μπορεί να είναι είσοδος.

- Επομένως, αποδεκτές είσοδοι είναι τα σήματα $x_2(t)$ και $x_3(t)$.

Άσκηση 4

Να προσδιοριστεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος, το οποίο για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$ παράγει την έξοδο $y(t) = 10e^{-t}\cos(4t)\, u(t)$.

<u>Απάντηση</u>: Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος εισόδου είναι:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

Επειδή είναι γνωστό ότι :

$$e^{-at}\cos(\omega t)\, u(t) \xrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

και για τιμές $\alpha = -1$ και $\omega = 4$, προκύπτει ότι:

$$Y(s) = \frac{10(s+1)}{s+1^2+16}$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ είναι:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2+16} = 10\,\frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+17}$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Η συνάρτηση $H(s)$ διαθέτει ένα διπλό μηδενικό στη θέση $s = -1$ και δύο απλούς πόλους στις θέσεις $s_1 = -1 + 4i$ και $s_2 = -1 - 4i$.

Η κρουστική απόκριση $h(t)$ μπορεί να υπολογιστεί από τον αντίστροφο ML της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$, ως εξής:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(s+1)^2}{(s+1)^2 + 16} = 10 - 40\,\frac{4}{(s+1)^2 + 4^2}$$

Προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} h(t) = L^{-1}\{H(s)\} &= 10L^{-1}\{1\} - 40L^{-1}\left\{\frac{4}{(S+1)^2 + 4^2}\right\} \\ &= 10\delta(t) - 40e^{-4}\sin(4t)\,u(t) \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Για την εξαγωγή της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιήσαμε τους αντίστροφους ML

$$1 \xrightarrow{L^{-1}} \delta(t)$$

$$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-at}\sin(\omega t)\,u(t)$$

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$$

<u>Απάντηση</u>: Υπολογίζουμε τον ML και των δύο μελών της διαφορικής εξίσωσης και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της παραγώγισης στη μιγαδική συχνότητα, δηλαδή:

$$L\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 5L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 6L\{y(t)\} = L\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 4L\{x(t)\} \Rightarrow$$

$$s^2\,Y(s) + 5s\,Y(s) + 6\,Y(s) = s\,X(s) + 4\,X(s) \Rightarrow$$

$$Y(s)\,[s^2 + 5s + 6] = X(s)\,(s + 4) \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 4}{s^2 + 5s + 6} = \frac{s + 4}{(s + 2)(s + 3)}$$

Η συνάρτηση $H(s)$ διαθέτει ένα μηδενικό στη θέση $s = -4$ και δύο απλούς πόλους στις θέσεις $s_1 = 2$ και $s_2 = 3$.

Άσκηση 5 (συνέχεια)

Η κρουστική απόκριση θα προσδιοριστεί από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $H(s)$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα βρίσκουμε:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+2)(s+3)}\right\} = 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \Rightarrow$$

$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

Άσκηση 6

Δίνεται ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$, το οποίο δέχεται ως είσοδο το σήμα $x(t) = e^{-t}u(t)$.

1. Να προσδιοριστούν οι ML $H(s)$ και $X(s)$.
2. Να προσδιοριστεί ο ML $Y(s)$ της εξόδου $y(t)$.
3. Να προσδιοριστεί η έξοδος $y(t)$ με χρήση του αντίστροφου MLτου $Y(s)$.
4. Να προσδιοριστεί η έξοδος $y(t)$ με χρήση της συνέλιξης $y(t) = h(t) * x(t)$ επαληθεύοντας έτσι το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Απάντηση</u>:

1. Από τον ορισμό του ML, έχουμε:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+2)t} u(t) dt = \left[\frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+2}$$

Άσκηση 6 (συνέχεια)

και

$$\mathrm{X}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+1)t}\, u(t) dt = \left[\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+1}$$

με περιοχές σύγκλισης $Re(s) > -2$ και $Re(s) > -1$ αντίστοιχα.

2. Η έξοδος του συστήματος δίνεται από τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης με το σήμα εισόδου, δηλ. $y(t) = h(t) * x(t)$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης του ML, έχουμε:

$$Y(s) = H(s)\, X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

με περιοχή σύγκλισης $\mathrm{R(s)} > -1$, που είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης των μετασχηματισμών $H(s)$ και $X(s)$.

Άσκηση 6 (συνέχεια)

3. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της ανάλυσης της συνάρτησης $Y(s)$ σε άθροισμα ρητών κλασμάτων, έχουμε:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

και ο αντίστροφος ML είναι το άθροισμα των αντίστροφων ML κάθε επιμέρους κλάσματος, δηλ.:

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

4. Χρησιμοποιώντας τη σχέση της συνέλιξης, έχουμε:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(t-\tau)}\, u(t-\tau)\, e^{-t}\, u(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-2t}\, e^{2\tau} e^{-\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-2t} [e^{\tau}]\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} = e^{-2t}(e^t - 1)$$
$$= (e^{-t} - e^{-2t})\, u(t)$$

δηλ. καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με το ερώτημα 3).