

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα ΙΙ

Διάλεξη 5: Ψηφιακή Διαμόρφωση Φάσης Phase Shift Keying (PSK)

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ατζέντα

- Μαθηματική περιγραφή δυαδικής PSK (BPSK)
- Φάσμα σήματος διαμορφωμένου κατά BPSK
- Μαθηματική περιγραφή MPSK
- Φασματική πυκνότητα ισχύος και φασματική απόδοση σήματος MPSK
- Ρυθμός εμφάνισης λαθών (BER) σε MPSK
- Παραγωγή και Ανίχνευση σήματος BPSK
- Διαφορική Κωδικοποίηση Δεδομένων – DEPSK
- Διαφορική Διαμόρφωση Φάσης – DPSK
- Διαγράμματα Αστερισμού
- Σύγκριση μεταξύ Σύμφωνης & Διαφορικής PSK

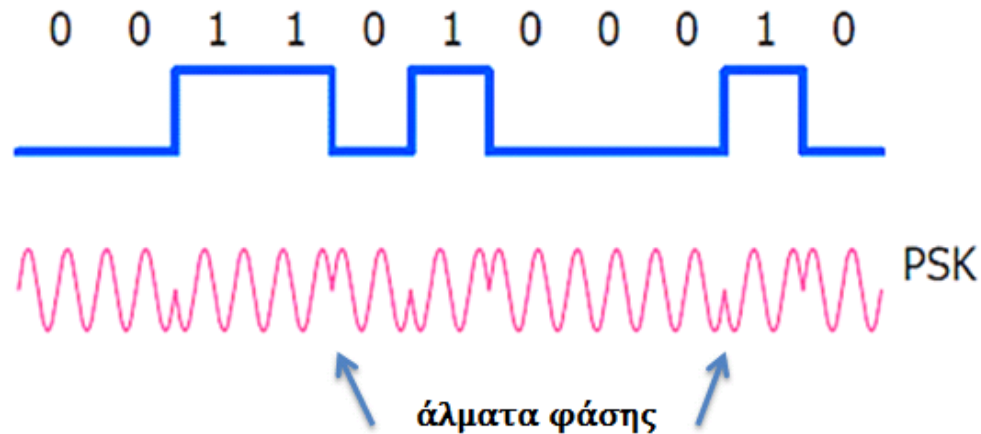
Ψηφιακή Διαμόρφωση Φάσης - PSK

- PSK Phase Shift Keying
- BPSK Binary PSK
- MPSK M/ary PSK
- DESPK Differentially Encoded PSK
- DPSK Differential PSK

Ψηφιακή Διαμόρφωση Φάσης (PSK)

Στη [διαμόρφωση PSK](#) η φάση του φέροντος μεταπηδά μεταξύ δύο (ή περισσότερων) επιπέδων, ανάλογα με την ψηφιακή πληροφορία. Συγκεκριμένα:

- Για bit = 1 στέλνουμε επί χρόνο T το σήμα $A \cos \omega_c t$
- Για bit = 0 στέλνουμε επί χρόνο T το σήμα $A \cos (\omega_c t + \pi) = -A \cos \omega_c t$



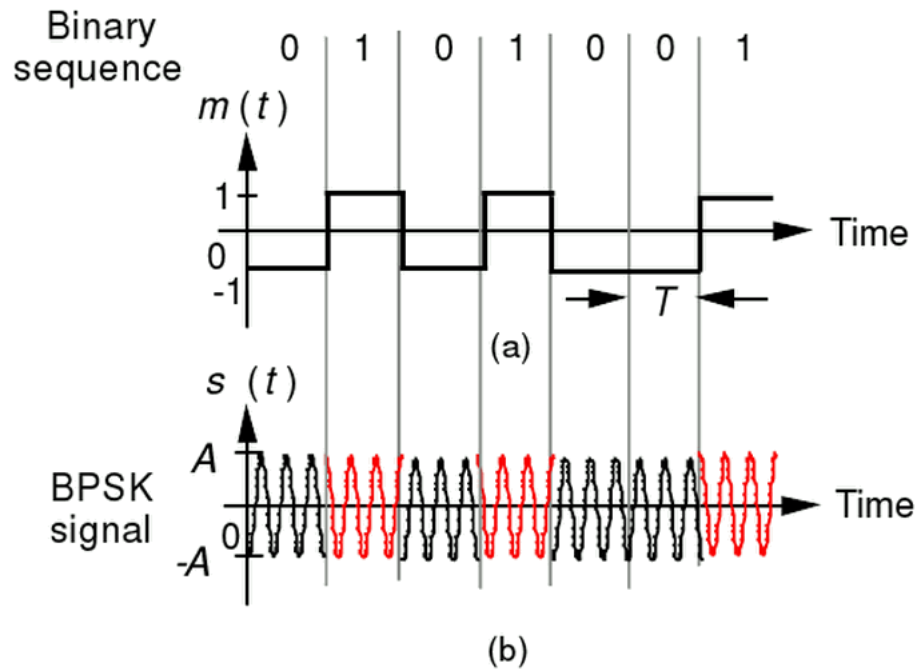
- Η περιβάλλουσα παραμένει **σταθερή**, σε αντίθεση με την ASK.
- Η πληροφορία περιέχεται στη **στιγμιαία φάση** του διαμορφωμένου φέροντος.
- Η διαμόρφωση PSK χρησιμοποιείται σε δορυφορικές επικοινωνίες.

Μαθηματική περιγραφή BPSK

Σήμα διαμορφωμένο κατά BPSK:

$$s(t) = m(t) A \cos \omega_c t \quad 0 \leq t \leq T \text{ όπου } m(t) = \{-1, 1\} \text{ και } T \text{ η διάρκεια του bit.}$$

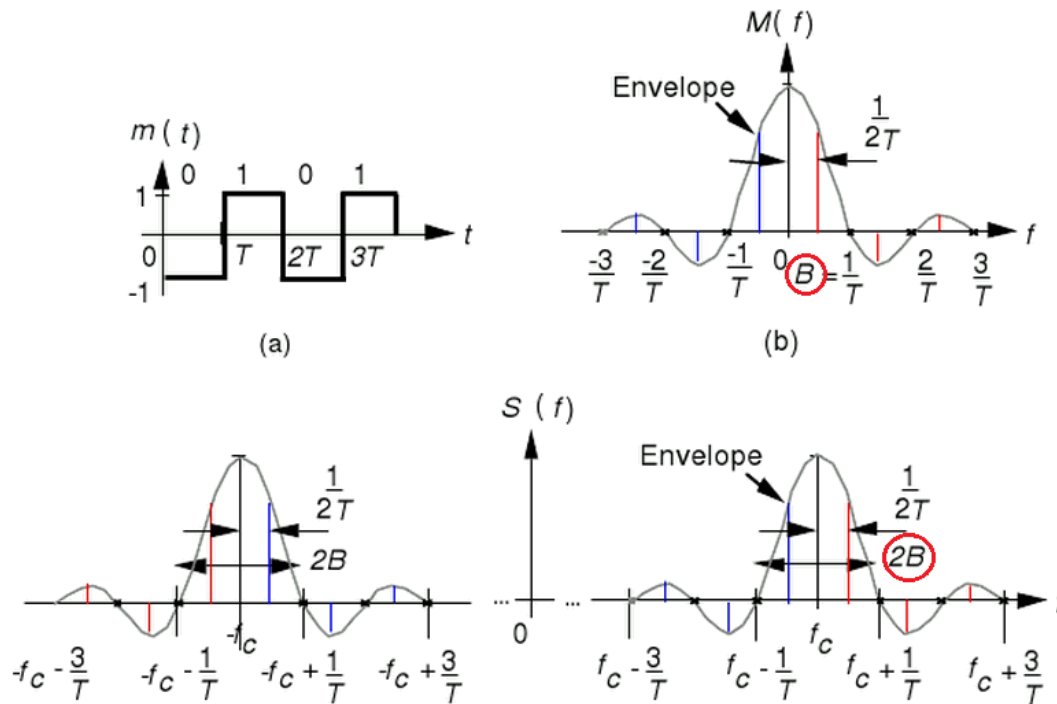
Ισχύει $s(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos \omega_c t \quad 0 \leq t \leq T$, όπου $E = P T$ η ενέργεια και $P = \frac{A^2}{2}$ η ισχύς ενός bit.



(a) Δυαδικό σήμα εισόδου, (b) Διαμορφωμένο κατά BPSK σήμα

Φάσμα σήματος διαμορφωμένου κατά BPSK

Ο Fourier του σήματος $s(t)$ είναι: $S(f) = \frac{A}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)]$, όπου $f_c = \omega_c/2\pi$



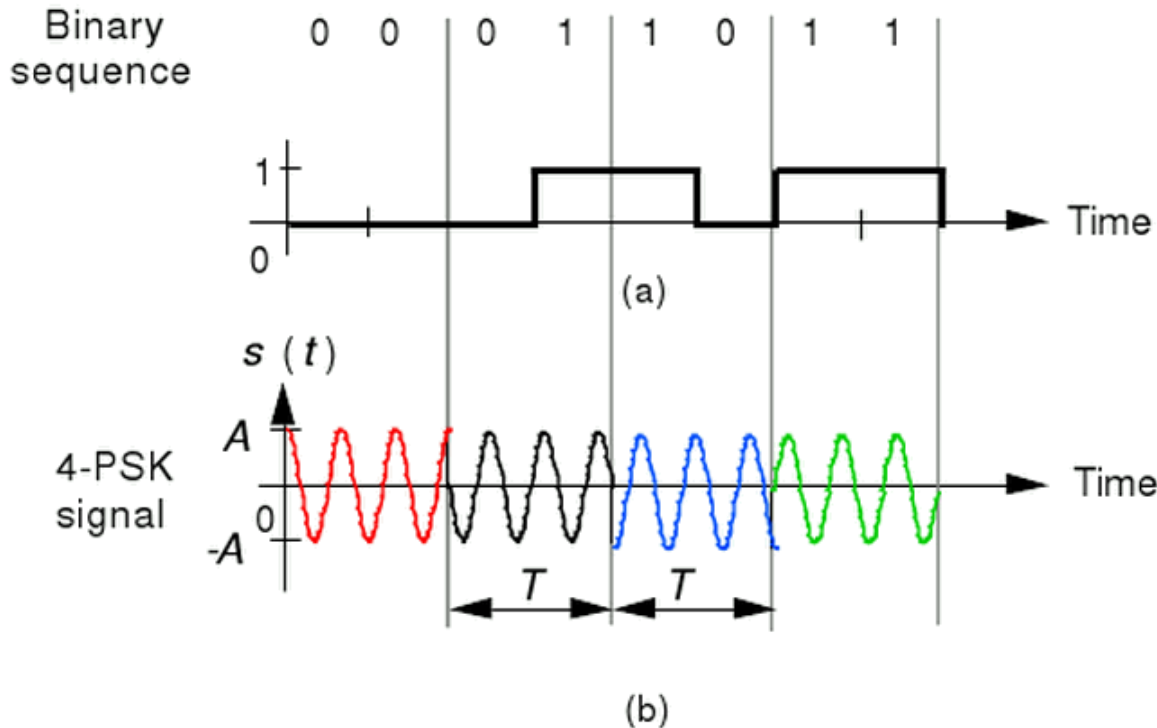
(a) Δυναδικό σήμα εισόδου, (b) Φάσμα σήματος εισόδου, (c) Φάσμα διακριτού σήματος διαμορφωμένου κατά BPSK (διπλής πλευρικής ζώνης DSB χωρίς φορέα)

Παρατηρούμε ότι η BPSK απαιτεί **διπλάσιο εύρος ζώνης** σε σχέση με το αρχικό σήμα.

Μαθηματική περιγραφή MPSK

Διαμόρφωση PSK M επιπέδων (MPSK): $s_i(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_c t + \theta_i + \theta'), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

όπου $\theta_i = \frac{2\pi}{M}i$ για $i = 0, 1, \dots, M - 1$



θ_i	Δυαδικό διάνυσμα
0	0 0 ... 0 0
$2\pi/M$	0 0 ... 0 1
$2(2\pi/M)$	0 0 ... 1 0
...	...
$(M-1)(2\pi/M)$	1 1 ... 1 1

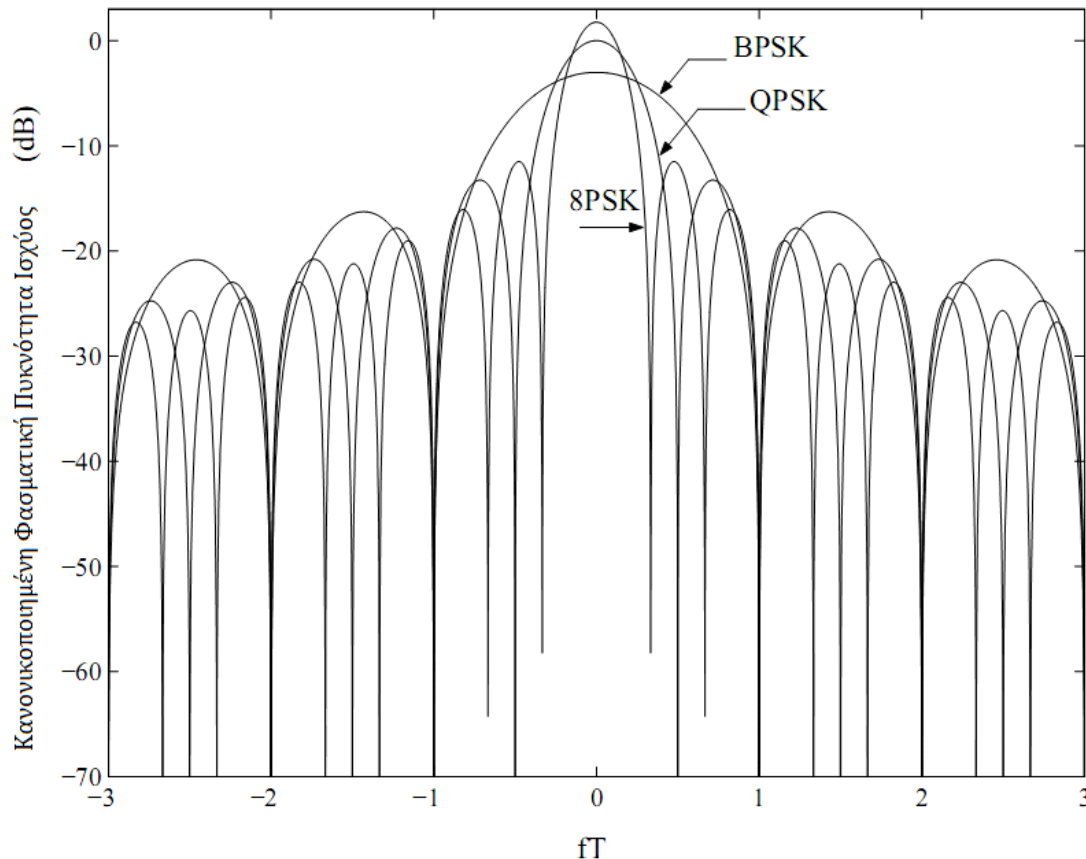
Διαμόρφωση 4-PSK: Δυαδική είσοδος, (b) Σήμα διαμορφωμένο κατά 4-PSK

Φασματική πυκνότητα ισχύος σήματος MPSK

Φασματική πυκνότητα ισχύος ([Power Spectral Density](#) – PSD) [f_c συχνότητα φέροντος]:

$$P(f) = \frac{mE_b}{2} \left\{ \left[\frac{\sin \pi (f - f_c) mT}{\pi (f - f_c) mT} \right]^2 + \left[\frac{\sin \pi (f + f_c) mT}{\pi (f + f_c) mT} \right]^2 \right\}$$

όπου E_b η ενέργεια ανά bit και m το πλήθος των bits/symbol . Ισχύει $M = 2^m$



Φασματική απόδοση σήματος MPSK

Φασματική Απόδοση (Q)

$$Q = \frac{R}{W} = \frac{R_s \log_2 M}{R_s} = \log_2 M = m \text{ bits/s/Hz}$$

- m πλήθος bits/symbol [Ισχύει $M = 2^m$]
- R ρυθμός μεταφοράς δεδομένων
- W απαιτούμενο εύρος ζώνης
- R_s ρυθμός μετάδοσης συμβόλων

Παρατηρούμε **αύξηση** της φασματικής απόδοσης (Q) με την αύξηση των ομαδοποιημένων bits ανά σύμβολο (m), συνεπώς και με τον αριθμό των συμβόλων M .

Ρυθμός εμφάνισης λαθών σε διαμόρφωση MPSK

Ο ρυθμός λήψης λανθασμένων συμβόλων P_S συναρτήσει του λόγου E_b/N_0 δίνεται από:

$$P_S = \text{erfc} \left(\sqrt{\log_2 M \cdot \frac{E_b}{N_0} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{2M}} \right)} \right)$$

Όπου:

- E_b η ελάχιστη απαιτούμενη **ενέργεια σήματος** στην είσοδο του δέκτη στη διάρκεια ενός bit για την επίτευξη συγκεκριμένου ρυθμού σφαλμάτων, παρουσία **θορύβου** φασματικής πυκνότητας ισχύος N_0 .
- **erfc** η συμπληρωματική συνάρτηση λάθους ([Error function](#))

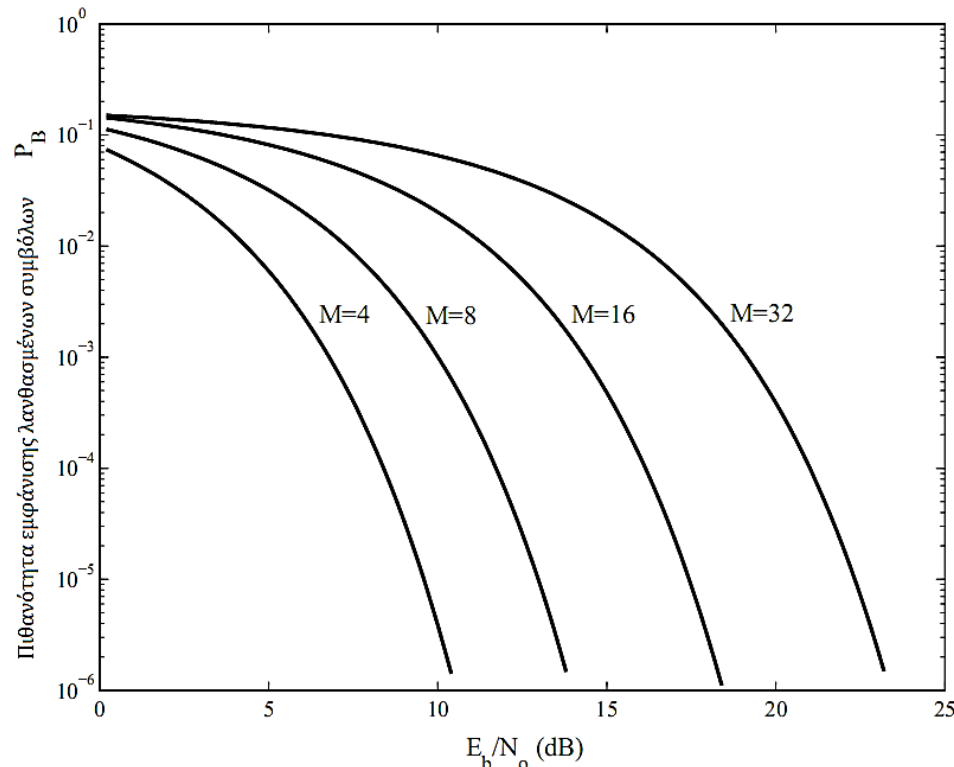
Ρυθμός εμφάνισης λαθών σε διαμόρφωση MPSK

Η πιθανότητα εμφάνισης λανθασμένων bits ([Bit Error Rate](#) – BER) (P_B) είναι:

$$P_B = \frac{P_S}{\log_2 M}$$

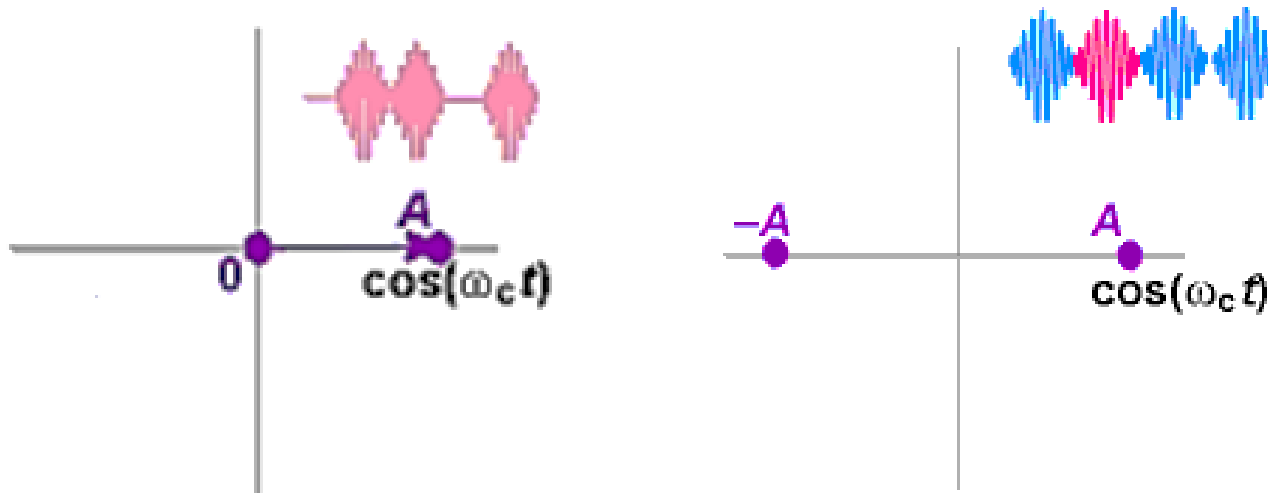
Για δυαδική διαμόρφωση ($M=2$), έχουμε $P_B = P_S$

Για $M>4$ το σύνολο των μεταδιδόμενων συμβόλων παύει να είναι ορθογωνικό, με αποτέλεσμα η πιθανότητα εμφάνισης λανθασμένων συμβόλων να **αυξάνει** απότομα.



Διαγράμματα Αστερισμού

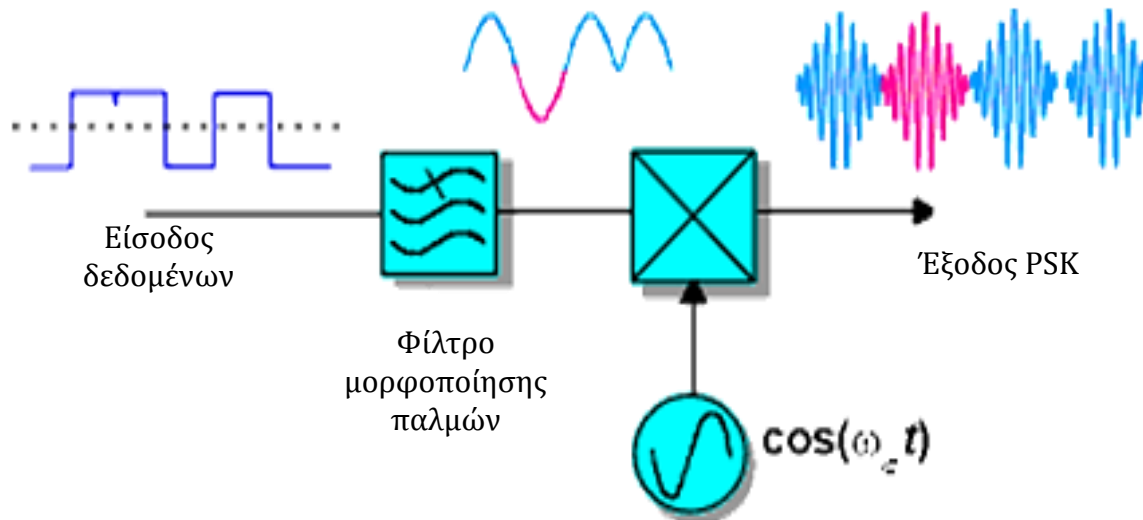
Το διάγραμμα αστερισμού ([constellation diagram](#)) της δυαδικής PSK εμφανίζει δύο σημεία **συμμετρικά** ως προς την αρχή των αξόνων (αντιποδική σηματοδότηση, antipodal signalling), δηλ. τα $\alpha(t) = -A \cos \omega_c t$ και $\alpha(t) = A \cos \omega_c t$.



Διάγραμμα αστερισμού ASK (α) Δυαδικής και (β) Δυαδικής PSK

Παραγωγή σήματος BPSK

- Φιλτράρισμα του ψηφιακού σήματος εισόδου με ένα φίλτρο μορφοποίησης παλμών (υψωμένου συνημιτόνου), ώστε να περιοριστεί το εύρος ζώνης και να παραχθεί η ακολουθία δεδομένων βασικής ζώνης.
- Πολλαπλασιασμός φέροντος με την ακολουθία δεδομένων βασικής ζώνης, μέσω μίας γραμμικής διαμόρφωσης παλμών.



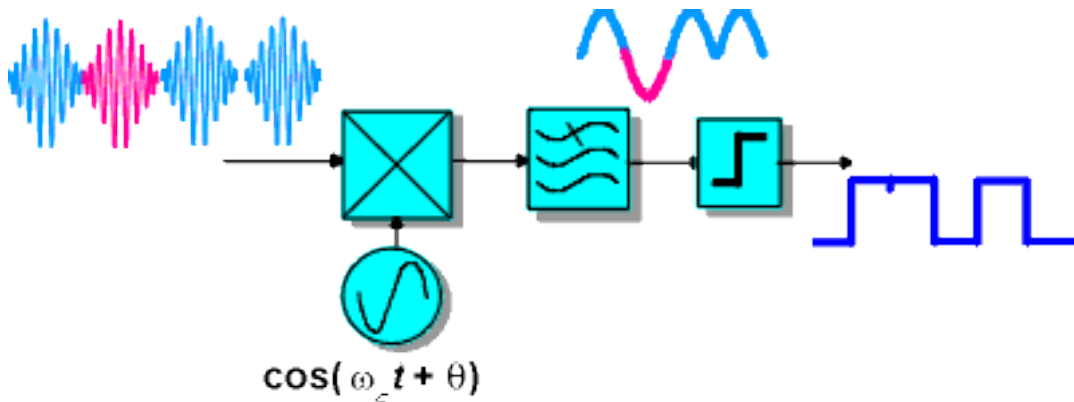
Σχηματικό διάγραμμα διαμορφωτή BPSK

Λήψη σήματος BPSK

Δεν υπάρχει ασύμφωνος τρόπος ανίχνευσης του σήματος BPSK, αλλά μόνο σύμφωνος.

Σύμφωνη ανίχνευση (coherent detection) :

Ένας ιδανικός ανιχνευτής απαιτεί την ακριβή γνώση της φάσης (δηλ. επιθυμητό $\Delta\theta = 0^\circ$) του αδιαμόρφωτου φορέα στο δέκτη.



Σύμφωνος
αποδιαμορφωτής
BPSK

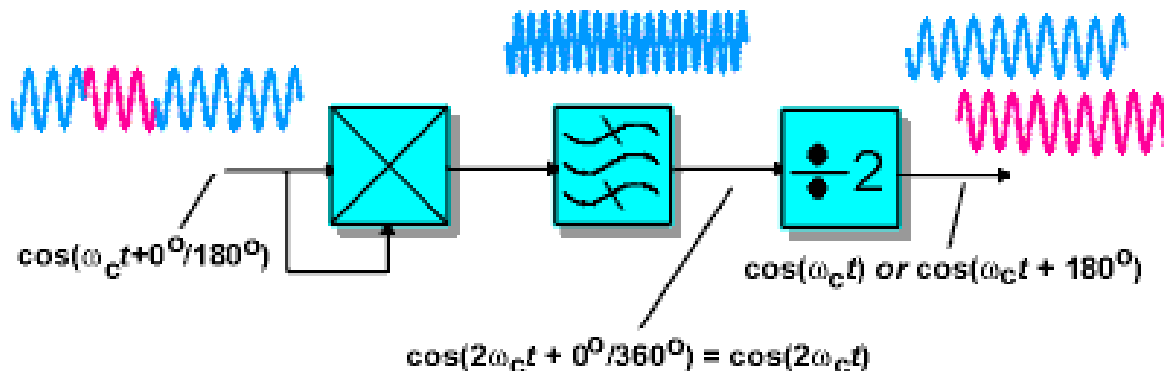
Αν υπάρχει σφάλμα φάσης (δηλ. $\Delta\theta \neq 0^\circ$) στο τοπικά δημιουργούμενο φέρον, τότε μειώνεται η τάση του σήματος στην έξοδο του δέκτη κατά έναν παράγοντα $\cos(\theta)$. Έτσι, μειώνεται και ο λόγος E_b/N_0 κατά έναν παράγοντα $\cos^2(\theta)$.

Λήψη σήματος BPSK

Για να ισχύει $\Delta\theta = 0^\circ$ απαιτείται είτε να εκπεμφθεί σήμα αναφοράς φέροντος είτε να δημιουργηθεί σήμα αναφοράς στο δέκτη από το σήμα δεδομένων.

Ανάκτηση φέροντος για τη σύμφωνη αποδιαμόρφωση BPSK

- Ύψωση του σήματος στο τετράγωνο κάνει τις φάσεις 0° και 180° πολλαπλάσια του modulo 2π , άρα απομακρύνει τη διαμόρφωση και διπλασιάζει τη συχνότητα του φέροντος.
- Ο όρος διπλάσιας συχνότητας απομακρύνεται με φιλτράρισμα ώστε να απομακρυνθεί και ο θόρυβος.
- Η συχνότητα διαιρείται δια 2 ώστε να ληφθεί ο ζητούμενος όρος του φέροντος.

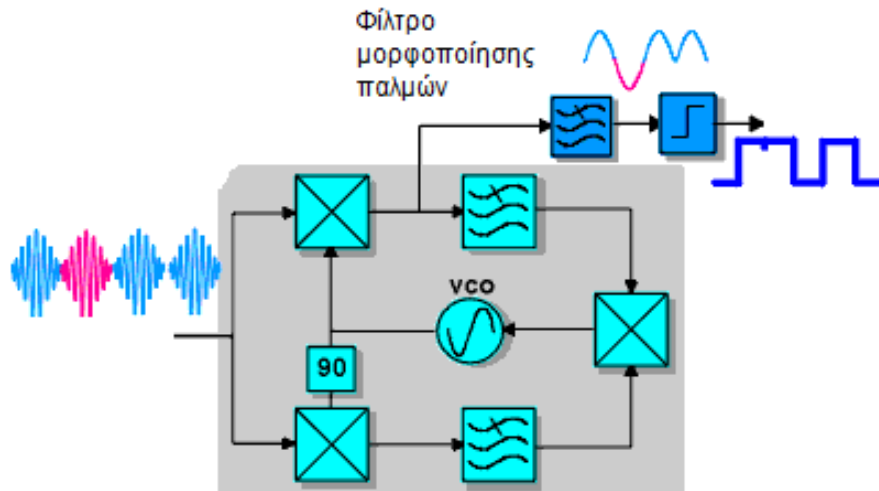


Διάταξη
ανάκτησης
φέροντος

Λήψη σήματος BPSK

Βρόχος Costas

Αποτελείται από δύο βρόχους κλειδωμένης φάσης (PLL) που λειτουργούν παράλληλα και έναν κοινό ταλαντωτή (VCO) που δίνει ορθογωνικές εξόδους (90°) σε κάθε βρόχο.



Βρόχος Costas

Πλεονεκτήματα:

- Δεν δημιουργεί συνιστώσα με συχνότητα διπλάσια του φέροντος.
- Εκτελεί τη σύμφωνη ανίχνευση των δεδομένων σε έναν από τους κλάδους του διπλού συστήματος PLL.

Λήψη σήματος BPSK

Αβεβαιότητα φάσης κατά την ανάκτηση φέροντος στη διαμόρφωση BPSK

- Η διαδικασία διαίρεσης συχνότητας εισάγει αβεβαιότητα 180° στη φάση του φέροντος.
- Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναγνωρίζονται λανθασμένα τα σύμβολα.
- Το πρόβλημα λύνεται με την αποστολή μίας **γνωστής ακολουθίας δοκιμής** (training sequence) στο δέκτη, από την οποία θα μπορεί αυτός να συμπεράνει αν έχει συμβεί αντιστροφή φάσης ή όχι, και να διορθώσει κατάλληλα.
- Σε πραγματικά κανάλια, π.χ. κυψελωτών επικοινωνιών, ούτε και αυτό είναι αποδοτικό, επειδή συμβαίνουν διακοπές στην επικοινωνία.
- Κάθε φορά που επανέρχεται η αναφορά φέροντος θα υπάρχει μια νέα αβεβαιότητα φάσης, η οποία θα απαιτεί την εκ νέου αποστολή της ακολουθίας δοκιμής.
- Το πρόβλημα της αβεβαιότητας φάσης παρουσιάζεται και στο βρόχο Costas.

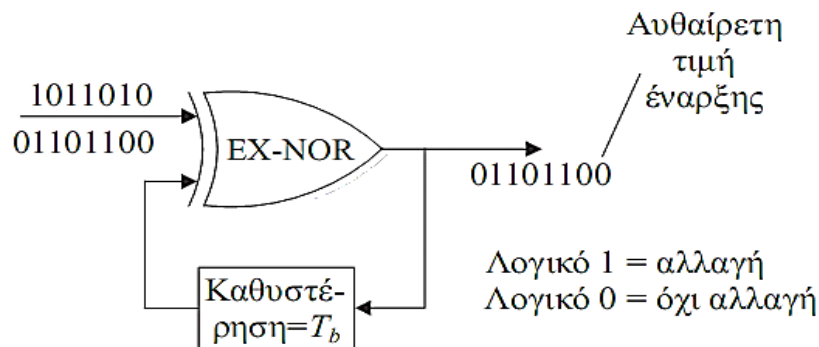
Εναλλακτική λύση: Διαφορικά Κωδικοποιημένη Ψηφιακή Διαμόρφωση Φάσης (Differentially Encoded PSK – DEPSK).

Διαφορική Κωδικοποίηση Δεδομένων -DEPSK

Η διαφορικά κωδικοποιημένη PSK (Differentially Encoded PSK - DEPSK) αντιμετωπίζει την αβεβαιότητα ανάκτησης της φάσης του φέροντος στον δέκτη της PSK, επειδή δίνει το ίδιο αποτέλεσμα στην έξοδο είτε τα δεδομένα έχουν αντιστραφεί είτε όχι.

Κωδικοποιητής DEPSK

- Μια πύλη αποκλειστικού OR μεταφράζει τα δεδομένα εισόδου σε μια κωδικοποιημένη ακολουθία δεδομένων, στην οποία το λογικό 1 στην είσοδο κωδικοποιείται ως αλλαγή της λογικής κατάστασης από το προηγούμενο κωδικοποιημένο bit και το λογικό 0 στην είσοδο κωδικοποιείται ως μη-αλλαγή κατάστασης.
- Η βαθμίδα καθυστέρησης υλοποιείται με έναν χρονιζόμενο καταχωρητή μετατόπισης (shift register) ενός bit.

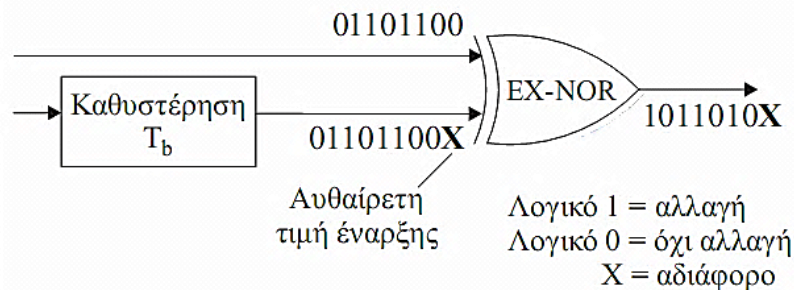


Διαφορικός κωδικοποιητής

Διαφορική Κωδικοποίηση Δεδομένων -DEPSK

Αποκωδικοποιητής DEPSK

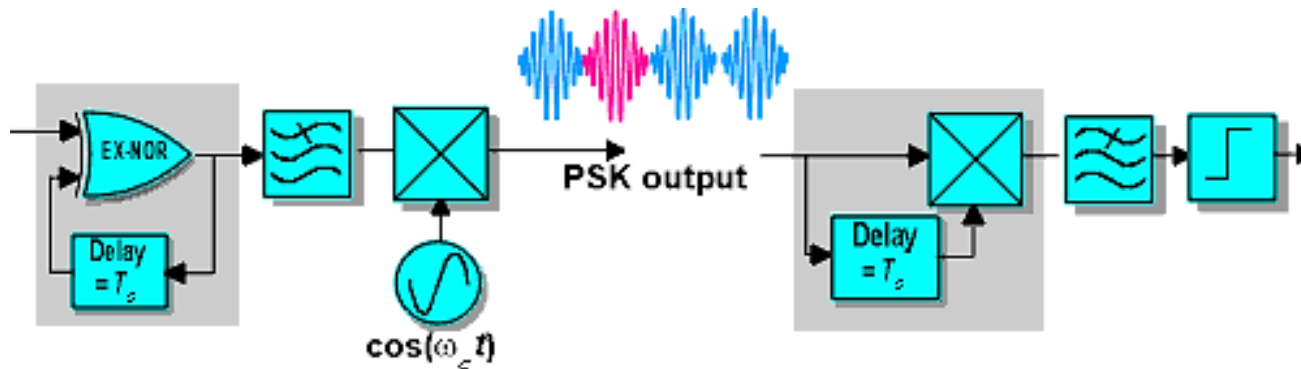
- Αν η ανιχνευόμενη ακολουθία δεδομένων **αλλάζει** κατάσταση σε διαδοχικά bit, τότε στην είσοδο υπήρχε ένα λογικό **1**. Αν δεν υπάρχει αλλαγή κατάστασης, τότε συνάγεται ότι θα πρέπει να είχε σταλεί ένα λογικό **0**.
- Η πληροφορία για την αλλαγή της κατάστασης δεν επηρεάζεται από τυχόν αντιστροφή των δεδομένων και συνεπώς η αβεβαιότητα φάσης του φέροντος δεν επηρεάζει τη διαδικασία κωδικοποίησης και αποκωδικοποίησης.
- Πρόκειται για μία ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδο που δεν απαιτεί την εισαγωγή επιπλέον bit και επομένως δεν επηρεάζει την παροχή δεδομένων.
- Μοναδικό μειονέκτημα είναι ότι αν εμφανίζονται μονά εσφαλμένα bit λόγω θορύβου, τότε αυτά διαδίδονται στον αποκωδικοποιητή ως σφάλματα «διπλών bit»



Αποκωδικοποιητής DEPSK

Διαφορική Διαμόρφωση Φάσης - DPSK

- Η Διαφορική Διαμόρφωση PSK ([DPSK](#)) βελτιώνει την DEPSK ενσωματώνοντας τη λειτουργία της διαφορικής αποκωδικοποίησης στην αποδιαμόρφωση των δεδομένων. Έτσι δεν χρειάζεται μηχανισμό ανάκτησης φέροντος.
- Το τμήμα διαφορικής κωδικοποίησης και ο διαμορφωτής PSK είναι κοινά στις DPSK και DEPSK, αλλά ο δέκτης DPSK λειτουργεί συγκρίνοντας τη φάση του εισερχόμενου συμβόλου του φορέα με αυτήν του προηγούμενου και εκτελεί ταυτόχρονα τη σύμφωνη ανίχνευση και τη διαφορική κωδικοποίηση ως μια λειτουργία.



Διαγράμματα διαμορφωτή και αποδιαμορφωτή DPSK

- Η DPSK χρησιμοποιείται ευρύτατα σε ενσύρματα και ασύρματα modem για σηματοδοσία χαμηλού ρυθμού (έως 4.800 bps) μετάδοσης.
- Η DPSK έχει ελαφρά χειρότερη (μικρότερη) ανοχή στο θόρυβο από την BPSK.

Σύγκριση μεταξύ Σύμφωνης & Διαφορικής PSK

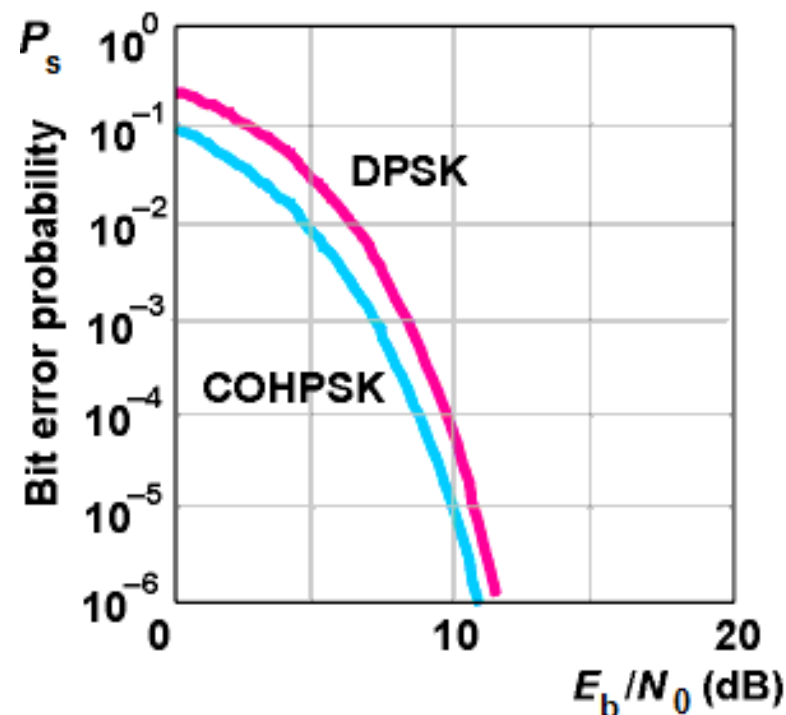
Πιθανότητα εμφάνισης λανθασμένων συμβόλων (P_S) για διέλευση σε κανάλι με προσθετικό λευκό γκαουσιανό θόρυβο (AWGN).

- Σύμφωνη ανίχνευση (COH-PSK)

$$P_S = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

- Διαφορική PSK (DPSK)

$$P_S = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{N_0}}$$



Παρατηρούμε ότι η απλούστερη στην υλοποίηση διαφορική PSK έχει μικρή υστέρηση στον θόρυβο σε σχέση με την σύμφωνη PSK.

Άσκηση 1

Ένας σύμφωνος αποδιαμορφωτής PSK χρησιμοποιεί ένα κύκλωμα ανάκτησης φέροντος το οποίο εισάγει μία χρονική καθυστέρηση στην ανακτημένη αναφορά ίση με 7% της περιόδου του σήματος. Πόσο θα υποβαθμιστεί η ανοχή στο θόρυβο σε σύγκριση με τον ιδανικό αποδιαμορφωτή;

Απάντηση:

- Μία χρονική καθυστέρηση 7% της περιόδου σημαίνει σφάλμα φάσης στον ανακτημένο φορέα ίσο με $7\% \times 360^\circ = 25,2^\circ$
- Η τάση εξόδου του μίκτη θα μειωθεί κατά $\cos(25,2^\circ)$ από τη μέγιστη τιμή και η ενέργεια των συμβόλων στην είσοδο του δέκτη θα μειωθεί κατά $\cos^2(25,2^\circ)$.
- Οι συνιστώσες του θορύβου θα επηρεαστούν επίσης, αλλά η μέση τάση θορύβου στην έξοδο του μίκτη θα παραμείνει σταθερή.
- Έτσι, ο λόγος E_b/N_0 θα μειωθεί κατά έναν παράγοντα $1/\cos^2(25,2) = 1,22$ ή 0,87 dB.

Άσκηση 2

Ένας ανιχνευτής DPSK εμφανίζει σφάλμα στο κύκλωμα καθυστέρησης ίσο με 10% της περιόδου του φορέα. Αν η έκφραση που δίνει την πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος σε έναν ιδανικό δέκτη DPSK είναι $P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$ να προσδιορίζετε την ποσοστιαία αύξηση της ισχύος του πομπού που απαιτείται για αντισταθμιστεί η υποβάθμιση που προκαλεί το σφάλμα στην καθυστέρηση.

Απάντηση:

- Το σφάλμα 10% της καθυστέρησης αντιστοιχεί σε σφάλμα φάσης 36° ως προς την αναφορά φέροντος.
- Η τάση εξόδου του μίκτη που χρησιμοποιείται για να συγκρίνει το τρέχον σύμβολο $\cos \omega_c t$ με το $\cos (\omega_c t + T_b + 36^\circ)$ θα είναι μικρότερη από την μέγιστη τιμή κατά τον παράγοντα $\cos (36^\circ)$ και η ενέργεια των συμβόλων κατά $\cos^2(36^\circ)$.
- Οι συνιστώσες του θορύβου θα επηρεαστούν επίσης, αλλά η μέση τάση θορύβου στην έξοδο του μίκτη θα παραμείνει σταθερή.
- Η πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένων bit θα είναι $P_e = \frac{1}{2} e^{-E_b \cos^2(36^\circ)/N_0}$
- Αυτό σημαίνει ότι η εκπεμπόμενη ενέργεια συμβόλων θα πρέπει να αυξηθεί κατά έναν παράγοντα $1/\cos^2(36^\circ) = 1,52$ ή $1,85$ dB.

Άσκηση 3

Η απόδοση ενός δέκτη ραδιοσυχνότητων περιορίζεται από το θερμικό θόρυβο στη βαθμίδα εισόδου του. Ο δέκτης μπορεί να αποκωδικοποιεί τόσο σύμφωνα δυαδικά σήματα ASK, όσο και σύμφωνα δυαδικά σήματα PSK. Αν η μέση ισχύς του πομπού είναι σταθερή όταν στέλνει σήματα ASK και PSK, ποια από τις δύο μεθόδους κωδικοποίησης είναι προτιμότερη αν θέλουμε η εκπομπή να γίνεται με το μέγιστο δυνατό ρυθμό για δεδομένη πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένων bit, και πόσο μεγαλύτερος μπορεί να γίνει αυτός ο ρυθμός;

Απάντηση:

- Οι σχέσεις που δίνουν το ρυθμό εμφάνισης εσφαλμένων bit, είναι:

$$\text{Σύμφωνη ASK} \quad P_{e_{ASK}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

$$\text{Σύμφωνη PSK} \quad P_{e_{PSK}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

- Από αυτές φαίνεται ότι το σύστημα PSK μπορεί να ανεχθεί επίπεδο θορύβου διπλάσιο από αυτό της ASK ή με άλλα λόγια η ενέργεια ανά σύμβολο E_b στην PSK μπορεί να είναι η μισή από αυτή της ASK για να εξασφαλιστεί ο ίδιος ρυθμός εμφάνισης εσφαλμένων bit.

Άσκηση 4

Ένα modem δυαδικής διαμόρφωσης PSK σχεδιάζεται ώστε να καταλαμβάνει εύρος ζώνης 8 kHz. Ποιός είναι ο μέγιστος ρυθμός δεδομένων που μπορεί να μεταδίδεται αν χρησιμοποιηθεί ένα φίλτρο υψωμένου συνημιτόνου με $\alpha = 1$;

Απάντηση:

Η θεωρητικά μέγιστη χωρητικότητα καναλιού για την PSK είναι ίδια με της ASK και δίνεται από τη σχέση:

$$C_{bandpass} = B \log_2 M$$

Για ένα ρεαλιστικό φίλτρο (non brick-wall filter), αυτή η έκφραση πρέπει να τροποποιηθεί ώστε να περιγράψει την επιπλέον χωρητικότητα του πρακτικά υλοποιήσιμου καναλιού, ως ακολούθως:

$$C_{bandpass} = (B \log_2 M) / (1 + \alpha)$$

Έτσι, για δυαδική διαμόρφωση ($M = 2$), προκύπτει:

$$C = (8.000 \times 1) / (1 + 1) = 4.000 \text{ bps}$$

Άσκηση 5

Ποια είναι η φασματική απόδοση ενός modem διαμόρφωσης BPSK που έχει φίλτρο μορφοποίησης παλμών με $\alpha = 0,5$;

Απάντηση:

Το ελάχιστο εύρος ζώνης που απαιτείται για να υποστηριχθεί η BPSK είναι **διπλάσιο** από αυτό για μία δυαδική επικοινωνία σε **βασική ζώνη**, και το οποίο είναι το μισό του ρυθμού συμβόλων.

Έτσι, το ελάχιστο εύρος ζώνης για την BPSK είναι ίσο με τον ρυθμό μετάδοσης συμβόλων και η μέγιστη **φασματική απόδοση** για την BPSK είναι **1 bit/s/Hz**.

Για ένα **μη-ιδανικό φίλτρο**, το εύρος ζώνης πρέπει να αυξηθεί με έναν συντελεστή $(1 + \alpha)$, και έτσι η φασματική απόδοση μειώνεται με τον ίδιο συντελεστή.

Έτσι, για $\alpha = 0,5$ η φασματική απόδοση μειώνεται στα **0,75 bits/s/Hz**.

Άσκηση 6

Ένας πομπός DPSK μπορεί να παράγει μέση ισχύ 1 nW στην είσοδο ενός δέκτη που έχει πυκνότητα ισχύος θορύβου $0,5 \times 10^{-12} \text{ Watts/Hz}$. Αν ο ρυθμός αποστολής συμβόλων είναι 100 symbols/s ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένων bit για έναν αποκωδικοποιητή DPSK στο δέκτη;

Απάντηση:

- Η ενέργεια συμβόλων στην είσοδο του δέκτη δίνεται από το γινόμενο της ισχύος του σήματος επί την περίοδο των συμβόλων. Επομένως προκύπτει:

$$E_b = 1 \text{ nW} / 100 = 1 \times 10^{-11} \text{ Watts/Hz}$$

- Η σχέση που δίνει το BER για την DPSK είναι:

$$P_{e \text{ DPSK}} = 0,5 e^{-E_b/N_0} = 0,5 e^{(-1 \times 10^{-11} / 0,5 \times 10^{-12})} = 1,3 \times 10^{-9}$$