

Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα II

Διάλεξη 7: Ψηφιακή Διαμόρφωση Συχνότητας – Frequency Shift Keying (FSK)

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ατζέντα

- Ψηφιακή Διαμόρφωση Συχνότητας (FSK)
- Μαθηματική περιγραφή BFSK
- Φάσμα σήματος διαμορφωμένου κατά BFSK
- Φασματική πυκνότητα ισχύος σήματος BFSK
- Παραγωγή FSK συνεχούς φάσης (CPFSK)
- Ασύμφωνη και Σύμφωνη Ανίχνευση FSK
- Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της FSK
- Διαμόρφωση Minimum Shift Keying (MSK)
- Παραγωγή & Ανίχνευση MFSK
- Μαθηματική περιγραφή MFSK
- Σύγκριση Δυναμικών Μεθόδων Ψηφιακής Διαμόρφωσης
- Σύγκριση Μ-αδικών Μεθόδων Ψηφιακής Διαμόρφωσης
- Σύγκριση Ψηφιακών Μεθόδων ως προς Όριο Shannon

Ατζέντα

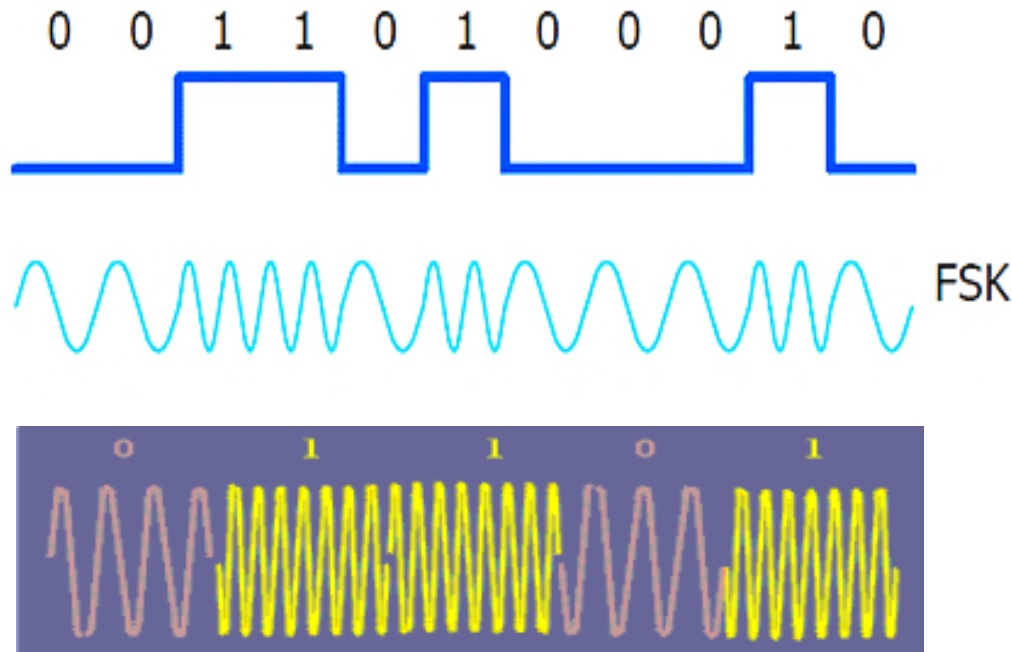
Ψηφιακή Διαμόρφωση Συχνότητας - FSK

FSK	Frequency Shift Keying
BFSK	Binary FSK
MFSK	M/ary FSK
MSK	Minimum Shift Keying
GMSK	Gaussian Minimum Shift Keying

Ψηφιακή Διαμόρφωση Συχνότητας (FSK)

Στη διαμόρφωση [Frequency Shift Keying](#) - FSK η συχνότητα του φέροντος μεταπηδά μεταξύ δύο (ή περισσότερων) τιμών, ανάλογα με την ψηφιακή πληροφορία. Συγκεκριμένα:

- Για bit = 1 στέλνουμε επί χρόνο T το σήμα $A \cos \omega_0 t$
- Για bit = 0 στέλνουμε επί χρόνο T το σήμα $A \cos \omega_1 t$



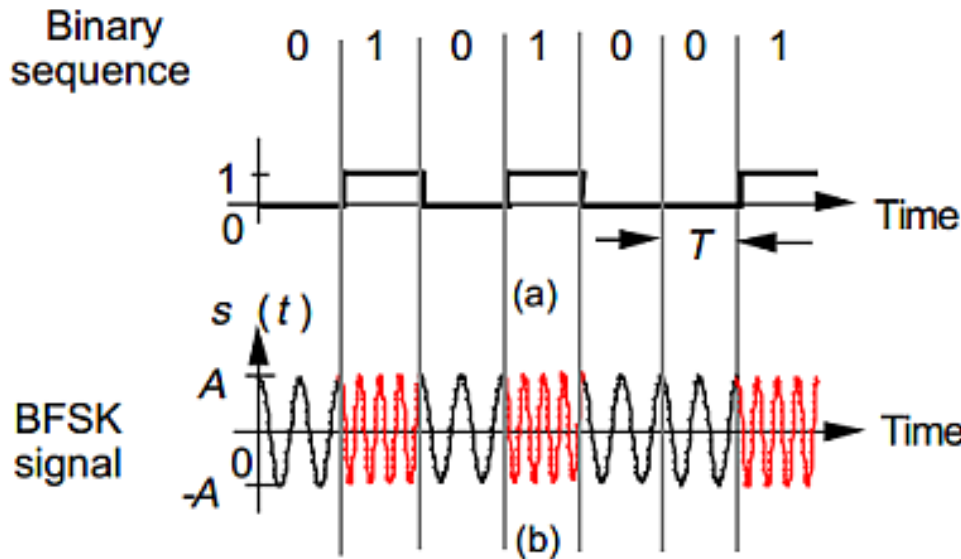
Μαθηματική περιγραφή BFSK

Σήμα BFSK

$$s(t) = \begin{cases} A \cos \omega_0 t & 0 \leq t \leq T \\ A \cos \omega_1 t & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\text{Ισχύει: } s(t) = \begin{cases} \sqrt{(2E/T)} \cos \omega_0 t & 0 \leq t \leq T \\ \sqrt{(2E/T)} \cos \omega_1 t & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου $E = P T$ η ενέργεια και $P = A^2/2$ η ισχύς ενός bit.

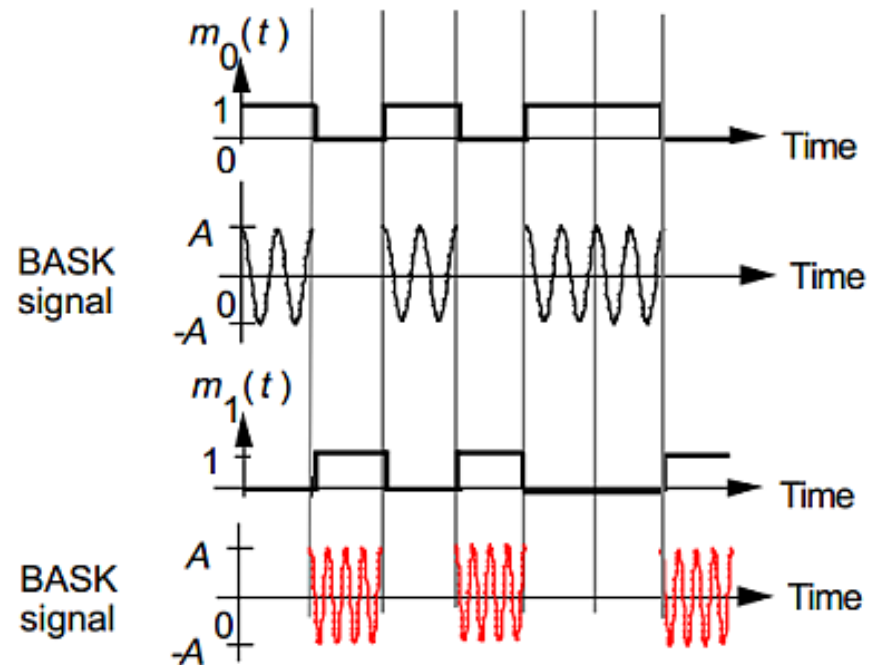
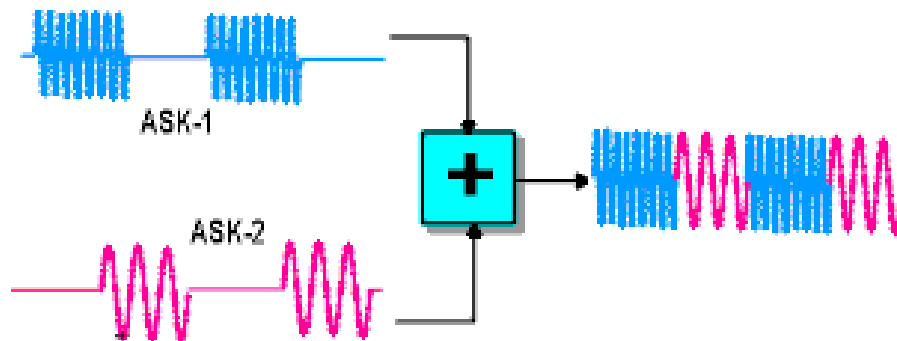


(a) Δυαδικό σήμα εισόδου

(b) Διαμορφωμένο κατά BFSK σήμα

Μαθηματική περιγραφή BFSK

- Ανάλυση BFSK σε δύο BASK σήματα



Φάσμα σήματος διαμορφωμένου κατά BFSK

Ο Fourier του σήματος BFSK $s(t)$ είναι :

$$S(f) = \frac{A}{2} [\mathbf{M}_0(f - f_0) + \mathbf{M}_0(f + f_0)] + \frac{A}{2} [\mathbf{M}_1(f - f_1) + \mathbf{M}_1(f + f_1)]$$

Ορίζοντας $\Delta f = f_1 - f_0$ έχουμε $s(t) = A \cos 2\pi(f_c t + \Delta f)$,

Όπου: f_c συχνότητα φορέα

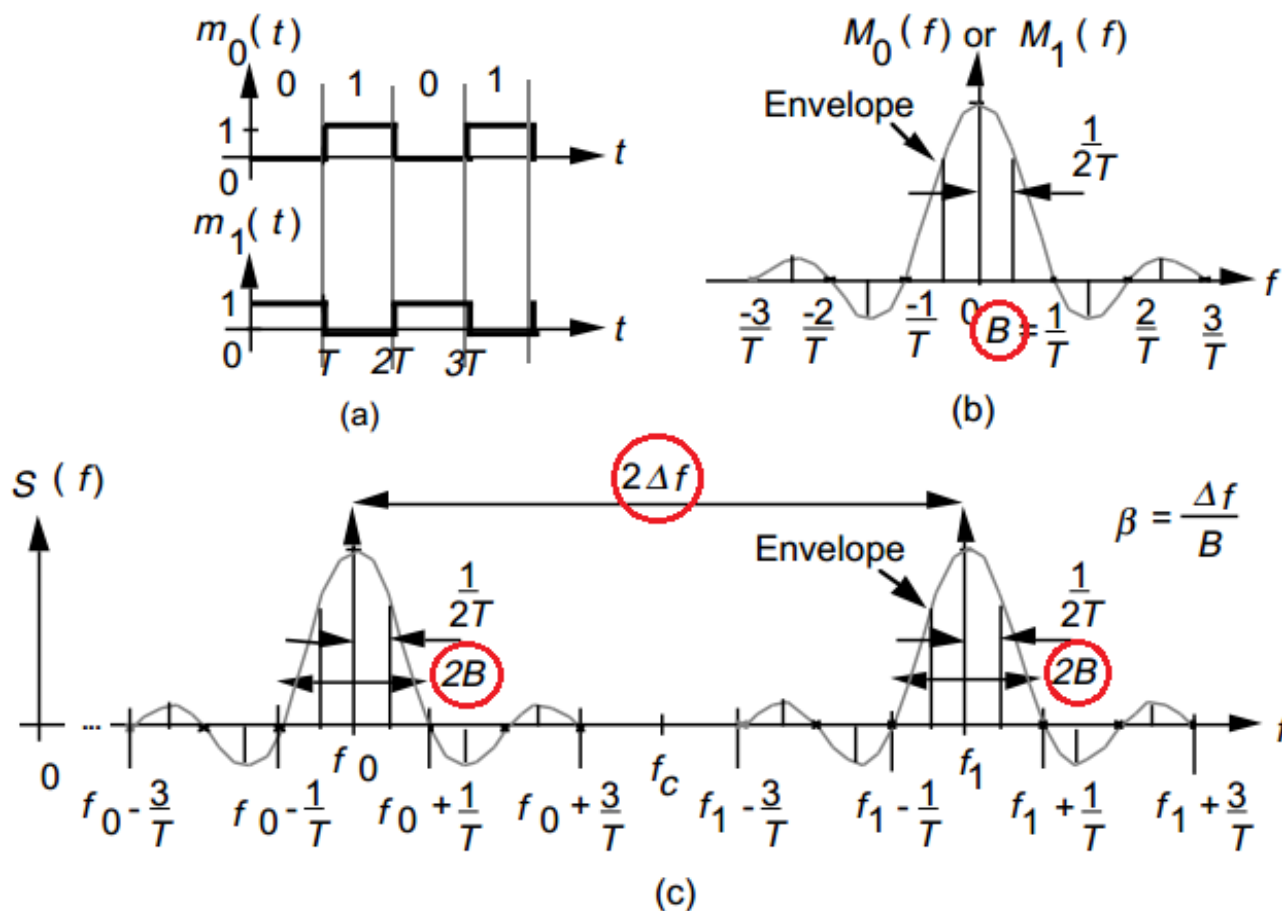
$\Delta f = \beta B$ απόκλιση συχνότητας

β δείκτης διαμόρφωσης

$B = 1/T$ εύρος ζώνης του διαμορφωνόμενου σήματος

- Όταν $\Delta f \gg 1/T$ έχουμε ευρείας ζώνης BFSK σήμα, με εύρος ζώνης $2\Delta f$
- Όταν $\Delta f \ll 1/T$ έχουμε στενής ζώνης BFSK σήμα, με εύρος ζώνης $2B$

Φάσμα σήματος διαμορφωμένου κατά BFSK



- (a) Δυαδικά σήματα εισόδου $m_0(t)$, $m_1(t)$, (b) Φάσμα σήματος εισόδου $M_0(f)$, $M_1(f)$
 (c) Φάσμα $S(f)$ διακριτού σήματος διαμορφωμένου κατά BFSK (θετικές συχνότητες μόνο)

Φασματική πυκνότητα ισχύος σήματος BFSK

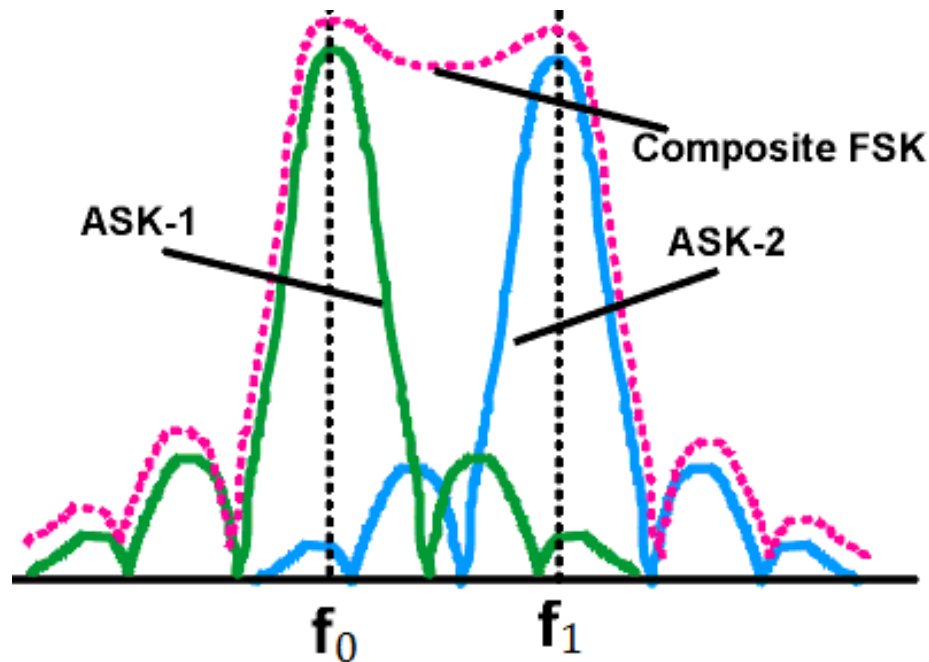
Φασματική πυκνότητα ισχύος (Power Spectral Density – PSD) [f_c συχνότητα φέροντος]:

$$P(f) = \frac{E_b}{8T} \left\{ \delta \left(f - f_c - \frac{1}{2T} \right) + \delta \left(f - f_c + \frac{1}{2T} \right) \right\} + \frac{2E_b}{\pi^2} \cdot \frac{\cos^2[\pi (f - f_c) T]}{[4((f - f_c)^2 T^2 - 1)]^2}$$

όπου E_b η ενέργεια ανά bit και m το πλήθος των bits/symbol ($M = 2^m$).

Φασματική πυκνότητα ισχύος σήματος BFSK

Το φάσμα FSK είναι δύσκολο να υπολογιστεί, επειδή η διαδικασία παραγωγής FSK είναι μη γραμμική. Μια προσέγγιση μπορεί να ληφθεί με χάραξη των φασμάτων για δύο φάσματα ASK-1 και ASK-2.



Το συνολικό εύρος ζώνης του σήματος FSK εξαρτάται από τον διαχωρισμό μεταξύ των συχνοτήτων των καταστάσεων συμβόλων.

Ένα σύστημα FSK που χρησιμοποιεί συνεχείς μεταβάσεις φάσης θα έχει πολύ χαμηλότερη ενέργεια πλευρικού λοβού από την ασυνεχή περίπτωση.

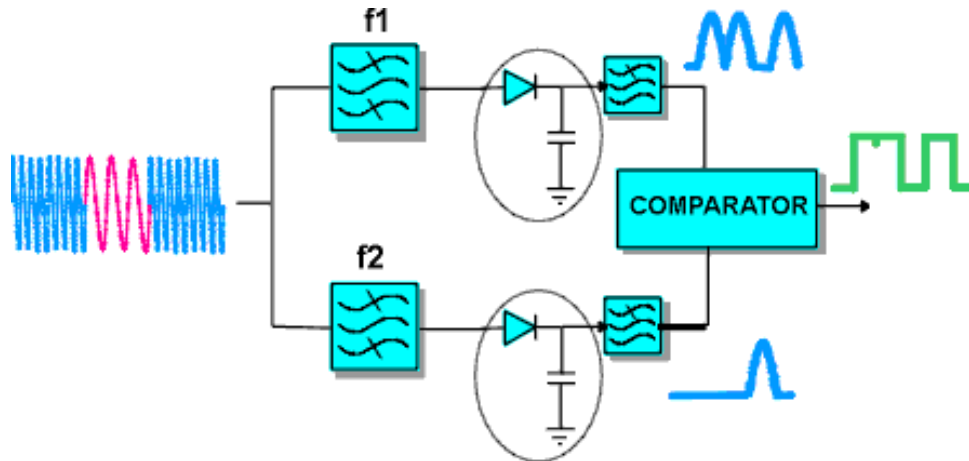
Παραγωγή FSK συνεχούς φάσης (CPFSK)

- Όπως και στη διαμόρφωση ASK, είναι δυνατόν να ελέγχεται η φασματική μορφή της **FSK συνεχούς φάσης** ([Continuous Phase FSK](#) – CPFSK) με ένα φίλτρο διαμόρφωσης παλμών πριν από τον διαμορφωτή.
- Συνήθως χρησιμοποιείται ένα βαθυπερατό φίλτρο (ονομάζεται Gaussian φίλτρο), το οποίο είναι ιδιαίτερα κατάλληλο για την επίτευξη χαμηλής φασματικής πυκνότητας ισχύος έξω από τον κύριο λοβό της FSK.
- Ένα μοντέρνο παράδειγμα χρήσης αυτού του τύπου FSK, ονομάζεται διαμόρφωση **Gaussian Minimum Shift Keying** ([GMSK](#)) και χρησιμοποιείται στα GSM κυψελοειδή συστήματα της Ευρώπης και της Βόρειας Αμερικής.

Ασύμφωνη Ανίχνευση FSK

Η απλούστερη ανίχνευση BFSK γίνεται μέσω της διέλευσης του διαμορφωμένου σήματος από δύο ζωνοδιαβατά φίλτρα συντονισμένα με τις δύο συχνότητες σηματοδοσίας.

Στην ουσία πρόκειται για ασύμφωνη μέθοδο ανίχνευσης περιβάλλουσας για το ισοδύναμα σήματα ASK με έναν συγκριτή στην έξοδο.

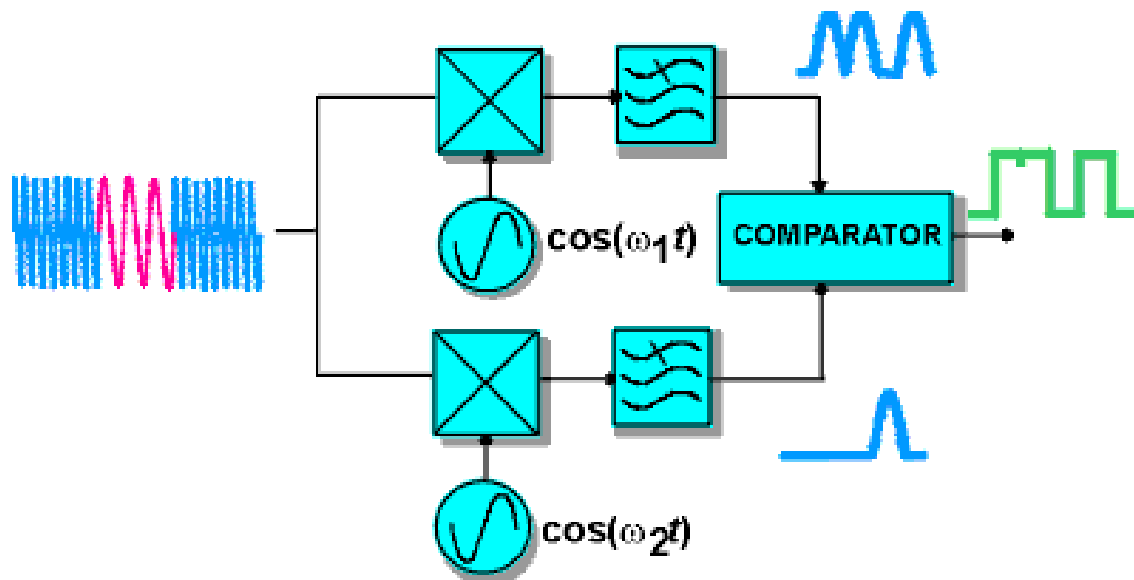


Υπάρχουν εναλλακτικές μέθοδοι για τη διάκριση μεταξύ των εισερχομένων συχνοτήτων:

- Μία απλή μέθοδος περιλαμβάνει την μέτρηση των μηδενικών διελεύσεων του φορέα κατά τη διάρκεια ενός συμβόλου και συνεπώς την άμεση εκτίμηση της συχνότητας.
- Μια άλλη μέθοδος περιλαμβάνει ένα βρόχο κλειδώματος φάσης ([phase locked loop](#) – PLL).

Σύμφωνη Ανίχνευση FSK

- Η σύμφωνη ανίχνευση της FSK είναι παρόμοια με της ASK, αλλά με **δύο ανιχνευτές** συντονισμένους με τις δύο φέρουσες συχνότητες.
- Όπως και στην ASK, η σύμφωνη ανίχνευση και το προσαρμοσμένο φιλτράρισμα ([matched filtering](#)) ελαχιστοποιούν την επίδραση του θορύβου στον δέκτη.



Σύγκριση μεταξύ Σύμφωνης & Ασύμφωνης FSK

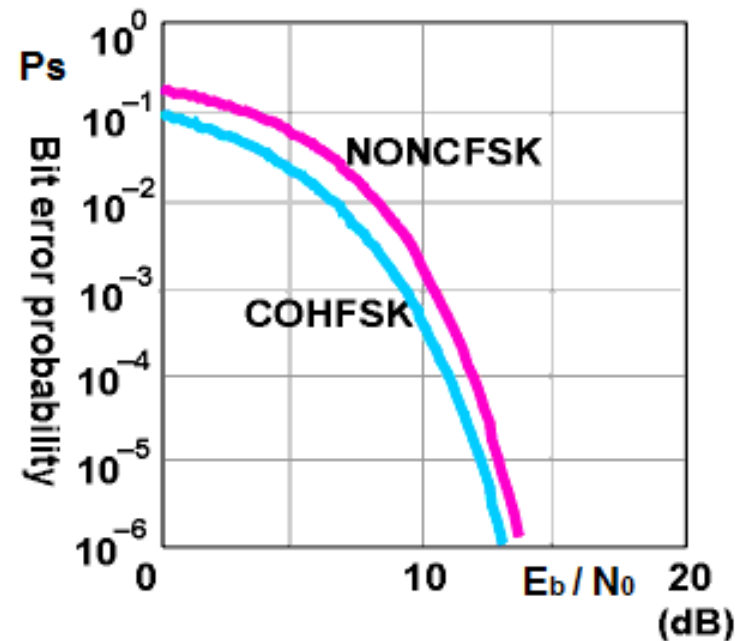
Πιθανότητα εμφάνισης λανθασμένων συμβόλων (P_S) για διέλευση σε κανάλι με προσθετικό λευκό γκαουσιανό θόρυβο (AWGN).

- Σύμφωνη ανίχνευση (COH-FSK)

$$P_S = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

- Ασύμφωνη ανίχνευση (NONC-FSK)

$$P_S = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$



Παρατηρούμε ότι η ασύμφωνη FSK (NONC-FSK) έχει μικρή υστέρηση στον θόρυβο σε σχέση με την σύμφωνη FSK (COH-FSK).

Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της FSK

Πλεονεκτήματα FSK:

- Επειδή η διαμόρφωση FSK είναι μια διαμόρφωση **σταθερής περιβάλλουσας**, είναι αναίσθητη στις μεταβολές πλάτους (δηλαδή απολαβής) που συμβαίνουν στο κανάλι και είναι συμβατή με συστήματα μη γραμμικών πομπών και δεκτών.
- Η ανίχνευση της FSK μπορεί να στηριχτεί στις **σχετικές μεταβολές συχνότητας** μεταξύ των καταστάσεων συμβόλων και επομένως δεν απαιτεί απόλυτη ακρίβεια των τιμών συχνοτήτων που διαδίδονται στο κανάλι.

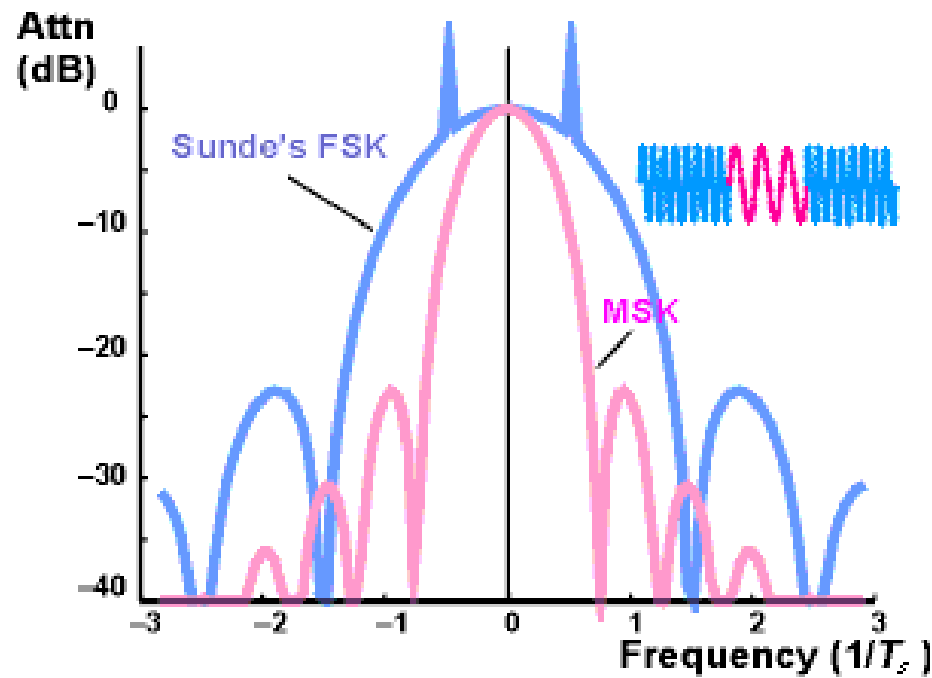
Άρα η FSK είναι **σχετικά ανεκτική στην ολίσθηση συχνότητας** του τοπικού ταλαντωτή και τη μετατόπιση συχνότητας λόγω φαινομένου Doppler.

Μειονεκτήματα FSK:

- Η FSK έχει σχετικά **μικρότερη απόδοση** εύρους ζώνης από τις ASK και PSK.
- Ο ρυθμός εμφάνισης εσφαλμένων bit και συμβόλων της FSK είναι **χειρότερος** από της PSK.

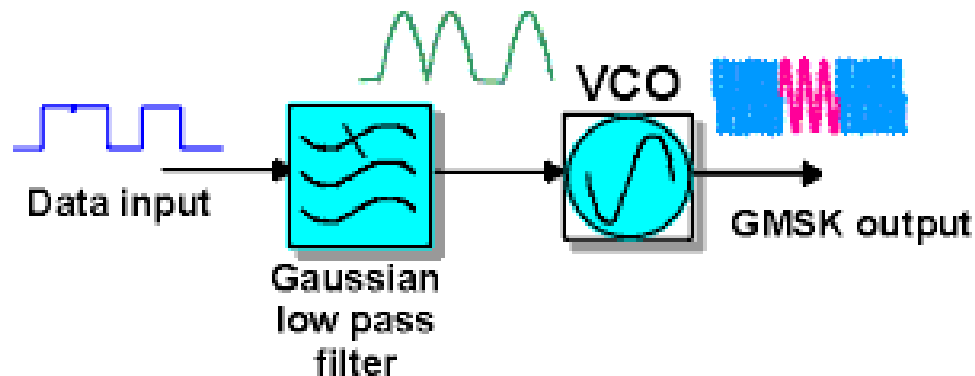
Διαμόρφωση Minimum Shift Keying (MSK)

- Η διαμόρφωση **Minimum Shift Keying FSK** ([MSK](#)) χρησιμοποιεί μια απόσταση συμβόλου ίση με το μισό του ρυθμού συμβόλου.
- Παράγει ένα ομαλό φάσμα με στενό κύριο λοβό και ταχεία μείωση του πλευρικού λοβού ενέργειας.



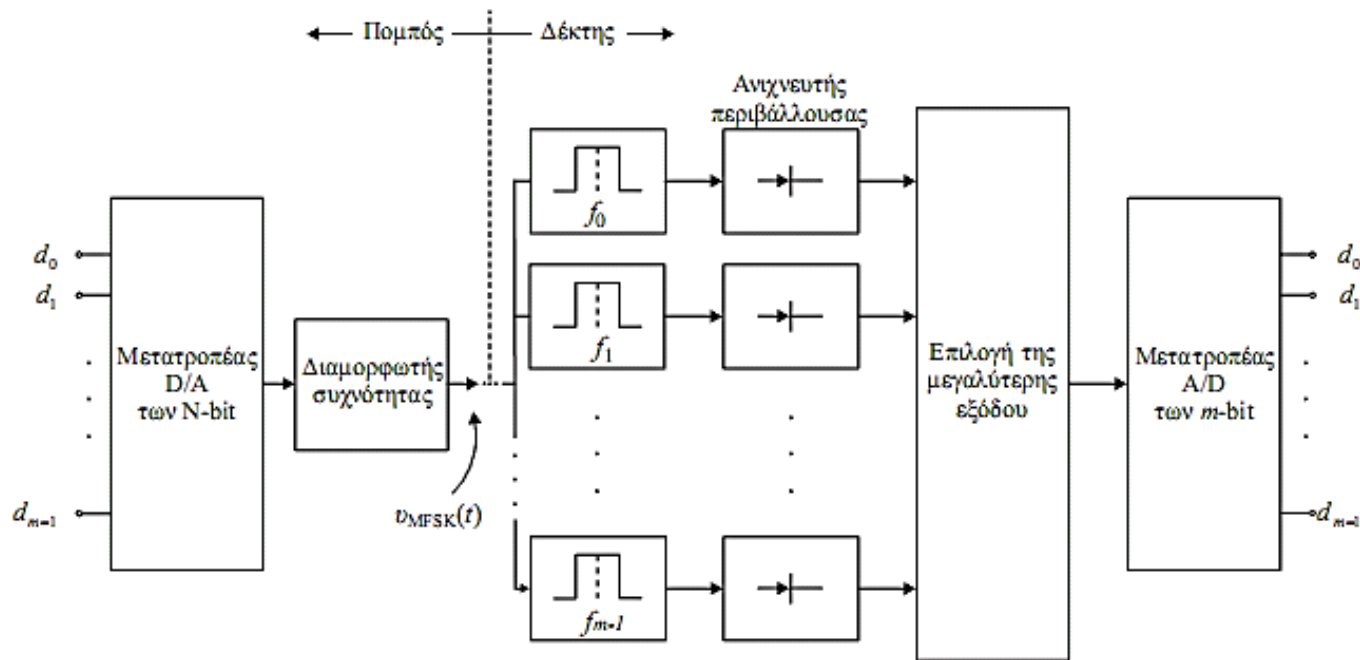
Διαμόρφωση Minimum Shift Keying (MSK)

- Επιδεικνύει εξαιρετική φασματική απόδοση προσεγγίζοντας την απόδοση της QPSK.
- Η εξαιρετική φασματική απόδοση της MSK μπορεί να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο με τη χρήση φίλτρων μορφοποίησης παλμού πριν από το διαμορφωτή.
- Έχει **αυξημένη πολυπλοκότητα** στη μέθοδο δημιουργίας και ανίχνευσης, συγκρινόμενη με απλούστερες μορφές FSK.
- Προσθήκη ενός [Gaussian φίλτρου](#) που αποκόπτει την περιοχή εκτός του κυρίου λοβού της MSK, παράγει τη διαμόρφωση [Gaussian Minimum Shift Keying](#) (GMSK).



Παραγωγή & Ανίχνευση MFSK

- Η M-αδική διαμόρφωση FSK με ορθογώνια σηματοδοσία έχει αυξημένη ανοχή στο θόρυβο.
- Η απόδοσή της πλησιάζει το **όριο Shannon** για λειτουργία με τον ελάχιστο λόγο E_b/N_o , δηλαδή **-1.59 dB**.
- Φασματική απόδοση: $Q = R/W = 2 \frac{m}{M} \text{ bit/s/Hz}$



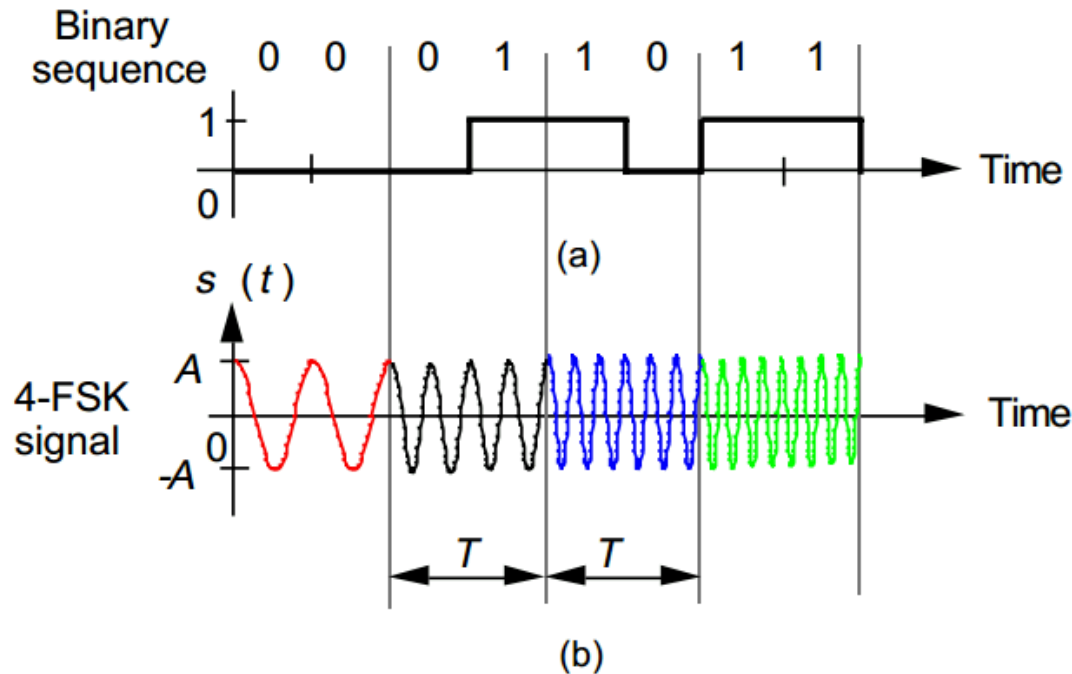
Κωδικοποιητής και ανιχνευτής MFSK

Μαθηματική περιγραφή MFSK

Σήμα MFSK

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_i t + \theta') & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$i = 0, 1, \dots, M - 1$. A σταθερά, f_i μεταδιδόμενες συχνότητες, θ' αρχική φάση

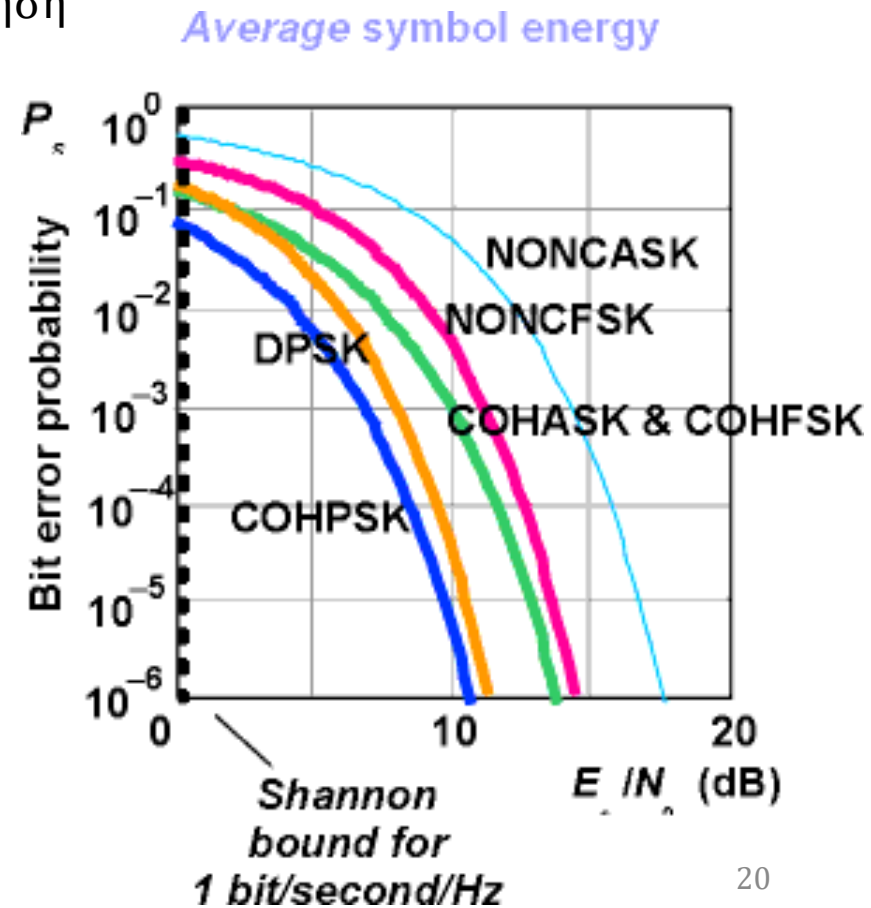


(a) Δυαδικό σήμα εισόδου, (b) Διαμορφωμένο κατά MFSK σήμα

Σύγκριση Δυαδικών Μεθόδων Ψηφιακής Διαμόρφωσης

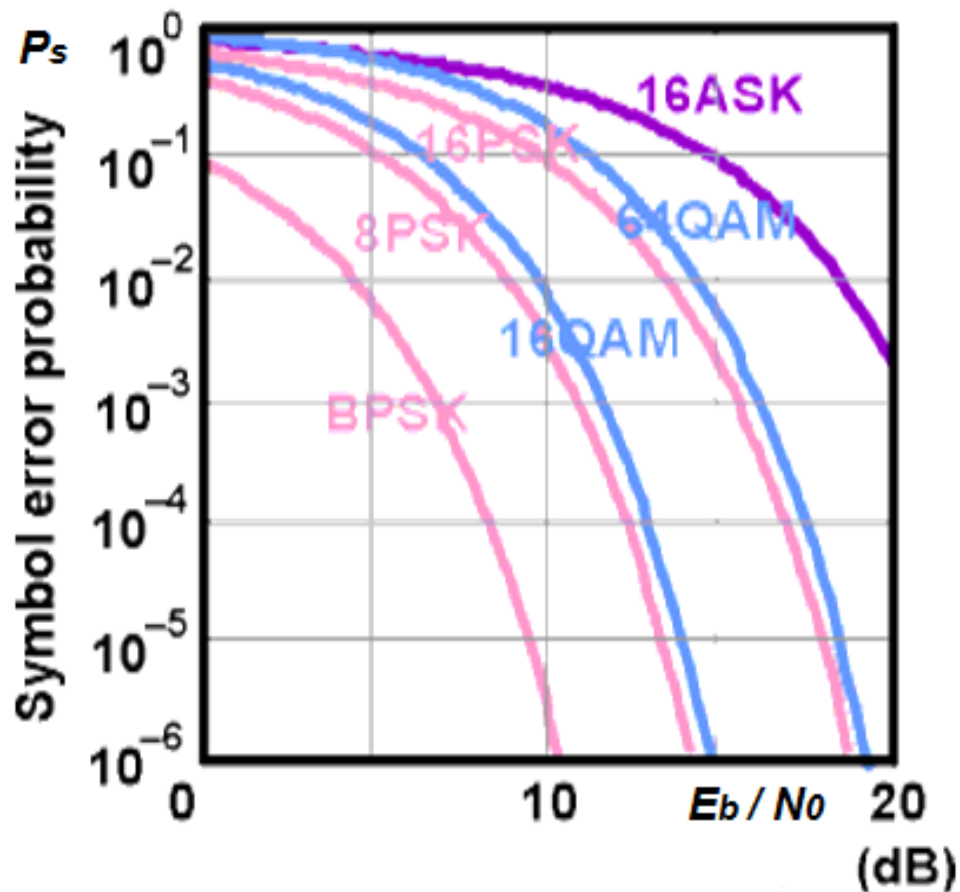
Η απόδοση σφάλματος bit ως προς την μέση ενέργεια των συμβόλων, για τα κυριότερα δυαδικά συστήματα διαμόρφωσης, δείχνει ότι :

- Η οικογένεια PSK έχει την βέλτιστη απόδοση.
- Η σύμφωνη FSK με ορθογώνια σηματοδότηση είναι η επόμενη καλύτερη μαζί με τη σύμφωνη ASK,
- Όλα αυτά τα δυαδικά συστήματα επιδεικνύουν μία θεωρητική μέγιστη φασματική απόδοση ίση με 1 bit/s/Hz.



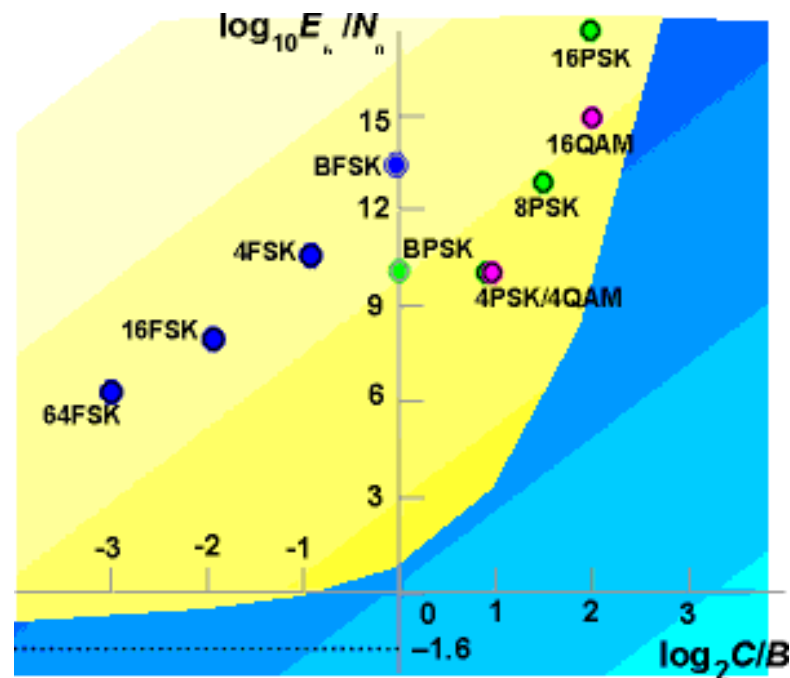
Σύγκριση M-αδικών Μεθόδων Ψηφιακής Διαμόρφωσης

Από τα διαγράμματα BER για τα κυριότερα M-αδικά συστήματα διαμόρφωσης, που εξετάσαμε, προκύπτει ότι η **QAM** φαίνεται να πλησιάζει περισσότερο κοντά προς το όριο χωρητικότητας Shannon όταν επιδιώκουμε την μέγιστη φασματική απόδοση.



Σύγκριση Ψηφιακών Μεθόδων ως προς Όριο Shannon

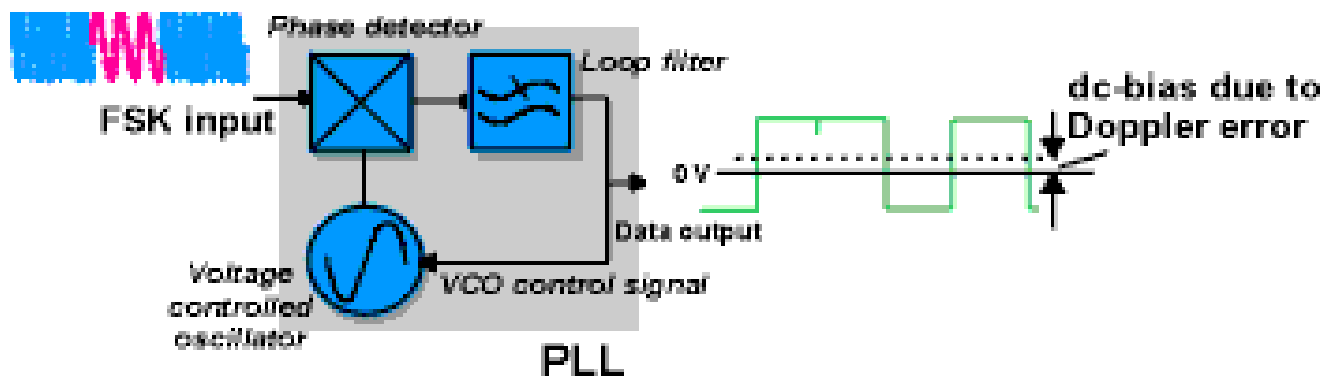
- Κανένα από τα συστήματα M-αδικής διαμόρφωσης δεν μπορεί να πλησιάσει αρκετά κοντά στο όριο Shannon.
- Στις περισσότερες περιπτώσεις η απόσταση είναι μεγαλύτερη των **4dB**.
- Για καλύτερη απόδοση, πρέπει να εισάγουμε **επιπλέον κωδικοποίηση** στα δεδομένα, ώστε να μπορούμε να ανιχνεύσουμε και να διορθώσουμε τα σφάλματα.
- Τεχνικές κωδικοποίησης καναλιού FEC ([Forward Error Correction](#)) υιοθετώντας κωδικοποίηση block (π.χ. [Reed-Solomon](#) σε εφαρμογές κινητών επικοινωνιών) ή συνελικτική κωδικοποίηση (π.χ. [Viterbi](#) στην ψηφιακή τηλεόραση), επιτυγχάνουν υψηλές αποδόσεις.
- Οι τεχνικές **συνδυασμένης κωδικοποίησης και διαμόρφωσης** π.χ. [Trellis Coded Modulation](#) – TCM) επιτρέπουν την επίτευξη κερδών κωδικοποίησης (>6dB), προσεγγίζοντας πλέον το όριο Shannon.



Άσκηση 1

Ένα ψηφιακό χρησιμοποιεί δυαδική διαμόρφωση FSK για τη μετάδοση των δεδομένων, με δύο συχνότητες εισόδου $+1200\text{ Hz}$ και -1200 Hz ως προς την κεντρική συχνότητα του καναλιού. Το σήμα που λαμβάνεται υπόκειται σε μετατόπιση Doppler ίση με $+100\text{ Hz}$, λόγω της κίνησης του δέκτη. Σχεδιάστε την έξοδο ενός ανιχνευτή PLL για την ακολουθία δεδομένων 1,0,1,0,1,0,... θεωρώντας ότι δεν υπάρχει μορφοποίηση παλμών. Πώς μπορεί το πρόβλημα της μετατόπισης Doppler να ξεπεραστεί σε ένα ψηφιακό σύστημα FSK;

Απάντηση: Η μετατόπιση Doppler στο εισερχόμενο σήμα στο δέκτη κάνει τα σύμβολα να εμφανίζονται σε συχνότητες $+1300\text{ Hz}$ και -1100 Hz ως προς την κεντρική συχνότητα του ανιχνευτή PLL. Έτσι, η έξοδος του PLL θα έχει μία συνεχή (DC) τάση πόλωσης που θα επικάθεται στο ανακτημένο σήμα δεδομένων (βλ. σχήμα) και θα είναι ανάλογη της απόκλισης Doppler.



Άσκηση 1 (συνέχεια)

Για να εξαλειφθεί η μετατόπιση Doppler μπορεί η έξοδος του ανιχνευτή PLL να συνδεθεί με AC ζεύξη, αλλά αυτό θα επηρέαζε τις χαμηλές συχνότητες του σήματος δεδομένων.

Ένας τρόπος κωδικοποίησης όπως η κωδικοποίηση Manchester θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί εδώ ώστε να απορρίψει το περιεχόμενο του σήματος των δεδομένων σε χαμηλές συχνότητες.

Άσκηση 2

Ποια είναι η πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένων bit στην περίπτωση ασύμφωνης δυαδικής διαμόρφωσης FSK όταν ο λόγος E_b/N_0 έχει την τιμή 10 dB; Ποια πρέπει να είναι η απαιτούμενη προσεγγιστική τιμή του λόγου αυτού, ώστε να επιτευχθεί η ίδια πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένων bit στις περιπτώσεις σύμφωνης FSK και σύμφωνης ASK;

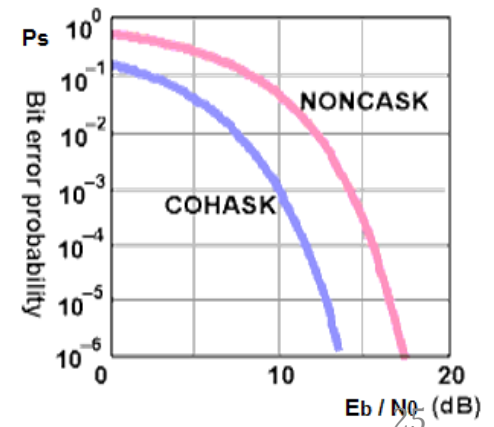
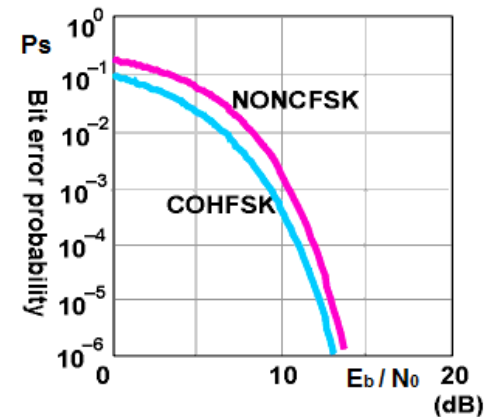
Απάντηση: Η πιθανότητα εμφάνισης εσφαλμένων bit (BER) για ασύμφωνη ASK δίνεται από:

$$P_s = \frac{1}{2} e^{-E_b/N_0}$$

Έτσι, για $E_b/N_0 = 10 \text{ dB}$ έχουμε:

$$P_s = \frac{1}{2} e^{-5} = 3,37 \times 10^{-3}$$

- Από το (πρώτο) διάγραμμα BER για τη σύμφωνη FSK, βρίσκουμε ότι απαιτείται μια τιμή του E_b/N_0 περίπου στα **8 dB** γι' αυτή την απόδοση του BER.
- Από το (δεύτερο) διάγραμμα BER για τη σύμφωνη ASK, προκύπτει ότι η απόδοση της σύμφωνης ASK είναι ίδια με της σύμφωνης FSK, απαιτώντας λόγο E_b/N_0 περίπου **8 dB**, επίσης.



Άσκηση 3

Ένας σχεδιαστής πρέπει να κατασκευάσει ένα modem δεδομένων που πρέπει να εμφανίζει ανοχή στην απόκλιση συχνότητας στο σύστημα του δέκτη. Δεν τον ενδιαφέρει τόσο η ανοχή του modem στο θόρυβο. Ποια μέθοδο διαμόρφωσης, την ASK ή την FSK θα συστήνατε για το σκοπό αυτό;

Απάντηση:

Είναι γνωστό ότι τα συστήματα ανίχνευσης FSK μπορούν να ανεχθούν μικρά ποσά σφάλματος συχνότητας.

Αντίθετα, ένας ασύμφωνος ASK ανιχνευτής είναι ιδιαιτέρως ανεκτικός σε σφάλμα συχνότητας στον φορέα, καθώς χρησιμοποιεί μόνο την περιβάλλουσα του λαμβανόμενου σήματος.

Επομένως, καλύτερη επιλογή για τον σχεδιαστή στην περίπτωση αυτή, αποτελεί η ασύμφωνη ASK διαμόρφωση.

Άσκηση 4

Ένα modem ορθογωνικής 4-δικής FSK διαμόρφωσης (4-FSK) έχει ρυθμό εκπομπής συμβόλων 2.400 baud. Εάν η χαμηλότερη συχνότητα των συμβόλων είναι 8 kHz, ποιες θα είναι οι άλλες τρεις συχνότητες;

Απάντηση:

Για την επίτευξη ορθογωνικότητας, η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των συμβόλων πρέπει να είναι ίση με το ήμισυ του ρυθμού συμβόλων, δηλαδή 1.200 Hz.

Έτσι, οι συχνότητες συμβόλων είναι 8.000 Hz, 9.200 Hz, 10.400 Hz και 11.600 Hz.

Άσκηση 5

Ποια είναι η μεγαλύτερη δυνατή φασματική απόδοση στην περίπτωση ενός modem που πρέπει να λειτουργεί με τιμή λόγου E_b/N_0 ίση με -1.2 dB ;

Απάντηση: Είναι γνωστό ότι η σχέση Shannon–Hartley μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left[1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{C}{B} \right]$$

Για $E_b/N_0 = -1.2 \text{ dB}$, βρίσκουμε $E_b/N_0 = 10^{-\frac{1,2}{10}} = 0,76$

Η φασματική απόδοση C/B που μπορεί να υποστηριχθεί για τη συγκεκριμένη τιμή του E_b/N_0 είναι:

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left[1 + 0,76 \frac{C}{B} \right]$$

Από την οποία προκύπτει: **$C/B = 0,3 \text{ bits/s/Hz}$** (περίπου).