Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Θεωρία Πληροφορίας

Διάλεξη 1: Βασικές αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ατζέντα

1. **Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων**
   - Εισαγωγή στα Σύνολα
   - Πράξεις με Σύνολα
   - Θεωρήματα με Σύνολα
2. **Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων**
   - Πειράματα Τύχης – Δειγματοχώροι - Γεγονότα
   - Αξιωματικός ορισμός της Πιθανότητας
   - Σημαντικά Θεωρήματα Πιθανότητας
   - Δεσμευμένη / Υπό Συνθήκη Πιθανότητα
   - Ανεξαρτησία Γεγονότων – Κανόνας Bayes
3. **Τυχαίες Μεταβλητές**
   - Ορισμός τυχαίων μεταβλητών
   - Διακριτές κατανομές πιθανότητας
   - Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
   - Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

1. Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

- Εισαγωγή στα Σύνολα
- Πράξεις με Σύνολα
- Θεωρήματα με Σύνολα

Εισαγωγή στα Σύνολα

- **Σύνολο** είναι μία συλλογή αντικειμένων, τα οποία καλούνται **μέλη ή στοιχεία** του συνόλου.
- Το σύνολο ονοματίζεται συνήθως με ένα κεφαλαίο γράμμα, π.χ. Α, Β, Γ, κλπ.
- Τα μέλη του συνόλου ονοματίζονται συνήθως με ένα πεζό γράμμα, π.χ. α, β, γ, κλπ.
- Αν ένα στοιχείο α ανήκει στο σύνολο Α, γράφουμε $\alpha \in A$.
- Αν ένα στοιχείο α δεν ανήκει στο σύνολο Α, γράφουμε $\alpha \notin A$.
- Αν κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α ανήκει και σε ένα σύνολο Β, καλούμε το Α **υποσύνολο** του Β και γράφουμε $A \subset B$.
- Αν $A \subset B$ και $B \subset A$, τότε τα σύνολα Α και Β είναι ίσα, δηλ. $A = B$.
- Αν $A \subset B$ και $A \neq B$, τότε το Α είναι **γνήσιο υποσύνολο** του Β.
- Το σύνολο χωρίς στοιχεία ονομάζεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται $\emptyset$.

Πράξεις με Σύνολα

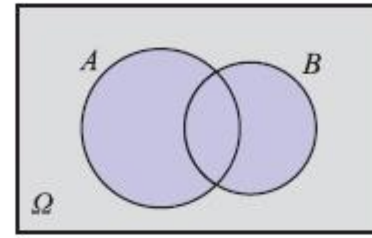
- **Ένωση:** (A⋃B) το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν ή στο A ή στο B ή και στα δύο.

- **Τομή:** (A⋂B) το σύνολο των στοιχείων που ανήκουν και στο A και στο B.

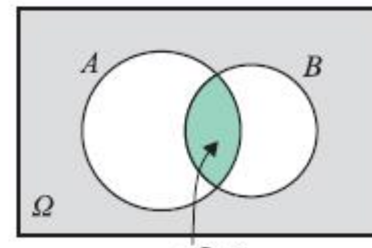
- Δύο σύνολα για τα οποία ισχύει $A \cap B = \emptyset$ ονομάζονται **ξένα σύνολα**.

- **Διαφορά:** $(A - B)$ το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B.

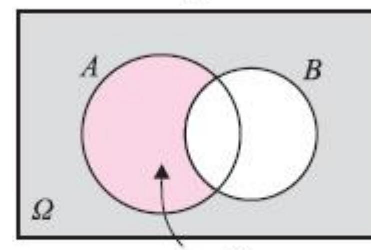
- **Συμπλήρωμα ή αντίθετο:** Το A' περιέχει τα σημεία που δεν ανήκουν στο A.



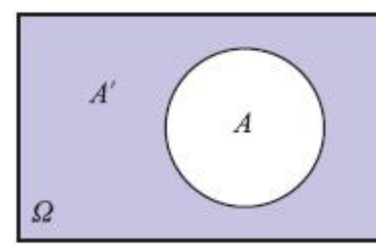
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



Θεωρήματα με Σύνολα

1. $A \cup \emptyset = A$ $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad A \cup \Omega = \Omega$ $\quad A \cap \Omega = A$
2. $A \cup A = A$ $\quad A \cap A = A$
3. $(A')' = A$ $\quad \emptyset' = \Omega$ $\quad \Omega' = \emptyset$ $\quad A \cup A' = \Omega$ $\quad A \cap A' = \emptyset$
4. Αντιμεταθετική ιδιότητα:
   - Ένωσης $\quad A \cup B = B \cup A$
   - Τομής $\quad A \cap B = B \cap A$
5. Προσεταιριστική ιδιότητα:
   - Ένωσης $\quad (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = A \cup B \cup \Gamma$
   - Τομής $\quad (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$
6. Επιμεριστική ιδιότητα:
   - Πρώτη $\quad (A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$
   - Δεύτερη $\quad (A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$
7. Κανόνας De Morgan:
   - Πρώτος $\quad (A \cup B)' = A' \cap B'$
   - Δεύτερος $\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

2. Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων

- Πειράματα Τύχης – Δειγματοχώροι - Γεγονότα
- Αξιωματικός ορισμός της Πιθανότητας
- Σημαντικά Θεωρήματα Πιθανότητας
- Δεσμευμένη / Υπό Συνθήκη Πιθανότητα
- Ανεξαρτησία Γεγονότων – Κανόνας Bayes

Πειράματα τύχης - Δειγματοχώροι - Γεγονότα

Πείραμα τύχης: Ένα πείραμα του οποίου το αποτέλεσμα δεν γνωρίζουμε εκ' των προτέρων, π.χ. η ρίψη ενός ζαριού, ενός νομίσματος, η κλήρωση του λαχείου, κλπ.

Δειγματοχώρος (Ω): το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, π.χ. για ρίψη ζαριού $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- **Πεπερασμένος δειγματοχώρος**: ένας δειγματοχώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.
- **Αριθμήσιμα άπειρος δειγματοχώρος**: ένας δειγματοχώρος με άπειρο πλήθος στοιχείων, για τον οποίο υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία των στοιχείων του με τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, ….
- **Μη-αριθμήσιμα άπειρος ή συνεχής δειγματοχώρος**: ένας δειγματοχώρος με άπειρο πλήθος στοιχείων, για τον οποίο υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία των στοιχείων του στα σημεία ενός διαστήματος των πραγματικών αριθμών (a, b).
- **Διακριτός δειγματοχώρος**: ένας δειγματοχώρος που είναι είτε πεπερασμένος είτε αριθμήσιμα άπειρος.

Γεγονός ή ενδεχόμενο (α): κάθε στοιχείο της συλλογής Α ($\alpha \in A$), όλων των υποσυνόλων του Ω.

Το Ω καλείται **βέβαιο γεγονός** και το ∅ καλείται **αδύνατο γεγονός.**

Η άλγεβρα γεγονότων είναι ταυτόσημη με την άλγεβρα συνόλων.

Αξιωματικός Ορισμός της Πιθανότητας

Ο **Χώρος Πιθανότητας** (Ω, A, P), όπου P(α) είναι η πιθανότητα εμφάνισης του γεγονότος $\alpha \in$ Α, ορίζεται <u>αξιωματικά</u> από τις σχέσεις:

1. $\forall \alpha \in \mathrm{A}, \quad 0 \leq P(\alpha) \leq 1$

2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ (βέβαιο γεγονός)

3. Αν τα ενδεχόμενα α και β του συνόλου Α είναι αμοιβαία αποκλειόμενα (ασυμβίβαστα), δηλαδή ισχύει $\alpha \cap \beta = \emptyset$, τότε:

$$P(\alpha \cup \beta) = P(\alpha) + P(\beta)$$

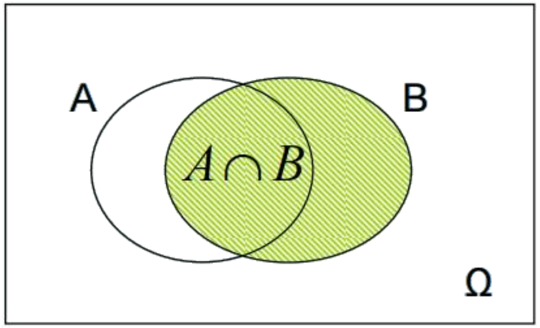
Σημαντικά Θεωρήματα Πιθανότητας

1. $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ Η πιθανότητα του αδύνατου γεγονότος είναι μηδέν
2. $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ Η πιθανότητα του βέβαιου γεγονότος είναι ένα
3. $0 \leq P(\alpha) \leq 1$ Κάθε πιθανότητα είναι μεταξύ 0 και 1
4. Αν $\alpha_1 \subset \alpha_2$ τότε:
   - $\mathrm{P}(\alpha_1) \leq \mathrm{P}(\alpha_2)$
   - $\mathrm{P}(\alpha_2 - \alpha_1) = \mathrm{P}(\alpha_2) - \mathrm{P}(\alpha_1)$
5. $\mathrm{P}(\bar{\alpha}) = 1 - \mathrm{P}(\alpha)$ $\overline{\alpha}$΄συμπληρωματικό ενδεχόμενο του α
6. $\mathrm{P}(\alpha \cup \beta) = \mathrm{P}(\alpha) + \mathrm{P}(\beta) - \mathrm{P}(\alpha \cap \beta)$ Θεώρημα ολικών πιθανοτήτων
7. $\mathrm{P}\left(\cup_{n=1}{}^{N} \alpha_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mathrm{P}(\alpha)$

Δεσμευμένη / Υπό Συνθήκη Πιθανότητα

Η **δεσμευμένη ή υπό συνθήκη πιθανότητα** πραγματοποίησης ενός γεγονότος α, με δεδομένη την πραγματοποίηση ενός άλλου γεγονότος β (θεωρούμε $P(\beta) \neq 0$), ορίζεται ως:

$$P(\alpha|\beta) = \frac{P(\alpha \cap \beta)}{P(\beta)}$$



ή

$$P(\alpha \cap \beta) = P(\beta)\, P(\alpha|\beta)$$

Παράδειγμα: Έστω ένα πείραμα τύχης με το ρίξιμο ζαριού και με τα ενδεχόμενα: $\alpha = \{1, 2, 3\}$ και $\beta = \{1, 2\}$.

- Η πιθανότητα πραγματοποίησης του α είναι: $P(\alpha) = 1/2$
- Η πιθανότητα πραγματοποίησης του α, δοθέντος ότι έχει πραγματοποιηθεί το β, είναι:

$$P(\alpha|\beta) = \frac{P(\alpha \cap \beta)}{P(\beta)} = \frac{P(\{1, 2\})}{P(\{1, 2\})} = 1$$

Στατιστική Ανεξαρτησία Γεγονότων

Δυο γεγονότα α και β ονομάζονται **στατιστικά ανεξάρτητα** αν ισχύει $\mathrm{P}(\alpha \cap \beta) = \mathrm{P}(\alpha)\ \mathrm{P}(\beta)$.

Δηλαδή η γνώση μας για την πραγματοποίηση του γεγονότος β δεν μας δίνει καμία επιπλέον πληροφορία για την πραγματοποίηση ή μη του γεγονότος α.

Ισχύει: $\mathrm{P}(\alpha|\beta) = \mathrm{P}(\alpha)$ και $\mathrm{P}(\beta|\alpha) = \mathrm{P}(\beta)$

Παράδειγμα: Έστω ένα πείραμα τύχης στο οποίο ρίχνουμε δύο ζάρια. Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα α = «το πρώτο ζάρι φέρνει 1» και β = «το δεύτερο ζάρι φέρνει 1». Αν (x, y) είναι το αποτέλεσμα του πειράματος για τα αποτελέσματα κάθε ζαριού, τότε:

$$\alpha = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$$
$$\beta = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

Προφανώς $P(\alpha) = 1/6$ και $P(\beta) = 1/6$, οπότε:

$$P(\alpha|\beta) = \frac{P(\alpha \cap \beta)}{P(\beta)} = \frac{P(\{1,1\})}{1/6} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα επιβεβαιώνει τη διαίσθησή μας πως αφού το ένα ζάρι δεν επηρεάζει το άλλο, τα ενδεχόμενα που εξετάσαμε είναι ανεξάρτητα.

Κανόνας Bayes

Η **δεσμευμένη πιθανότητα** πραγματοποίησης του γεγονότος β, με δεδομένη την πραγματοποίηση του γεγονότος α, δίνεται από τη σχέση:

$$P(\beta|\alpha) = \frac{P(\beta \cap \alpha)}{P(\alpha)} = \frac{P(\alpha \cap \beta)}{P(\alpha)} = \frac{P(\alpha|\beta)P(\beta)}{P(\alpha)} = \frac{P(\beta)}{P(\alpha)}P(\alpha|\beta)$$

Επομένως:

$$P(\beta|\alpha) = \frac{P(\beta)}{P(\alpha)}P(\alpha|\beta)$$

Ο κανόνας του Bayes είναι σημαντικός σε προβλήματα εκτίμησης σημάτων.

Άσκηση 1

Βγάζουμε στην τύχη μία σφαίρα από ένα κουτί που περιέχει 6 κόκκινες, 4 άσπρες και 5 μπλε σφαίρες. Ποια είναι η πιθανότητα να βγει σφαίρα: (α) κόκκινη, (β) άσπρη, (γ) μπλε, (δ) όχι κόκκινη, (ε) κόκκινη ή άσπρη;

<u>Απάντηση</u>: Συμβολίζουμε με κ, α και μ τα γεγονότα να βγει κόκκινη, άσπρη, μπλε σφαίρα αντίστοιχα.

(α) $$P(\kappa) = \frac{\pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \kappa\acute{o}\kappa\kappa\iota\nu\omega\nu\ \sigma\varphi\alpha\iota\rho\acute{\omega}\nu}{o\lambda\iota\kappa\acute{o}\ \pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \sigma\varphi\alpha\iota\rho\acute{\omega}\nu} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(β) $$P(\alpha) = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15}$$

(γ) $$P(\mu) = \frac{5}{6+4+5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(δ) $$P(\kappa') = 1 - P(\kappa) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(ε) $$P(\kappa \cup \alpha) = \mathrm{P}(\mu') = 1 - P(\mu) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Εναλλακτική λύση. Επειδή τα γεγονότα κ και α είναι ανεξάρτητα, ισχύει:

$$P(\kappa \cup \alpha) = P(\kappa) + P(a) = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Άσκηση 2

Ένα ζάρι ρίχνεται δύο φορές. Βρείτε την πιθανότητα να έρθει 4, 5 ή 6 στην πρώτη ρίψη και 1, 2, 3 ή 4 στη δεύτερη.

<u>Απάντηση</u>: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα α = «4, 5 ή 6 στην πρώτη ρίψη» και β = «1, 2, 3 ή 4 στη δεύτερη ρίψη». Ζητάμε το $P\{\alpha \cap \beta\}$.

Ισχύει:

- $P\{\alpha\} = 3/6$ επειδή τα 4, 5 και 6 είναι τρία από έξη ισοπίθανα γεγονότα
- $P\{\beta\} = 4/6$ επειδή τα 1, 2, 3 και 4 είναι τέσσερα από έξη ισοπίθανα γεγονότα

Επειδή τα αποτελέσματα των δυο ρίψεων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους ισχύει:

$$P\{\beta|\alpha\} = P\{\beta\}$$

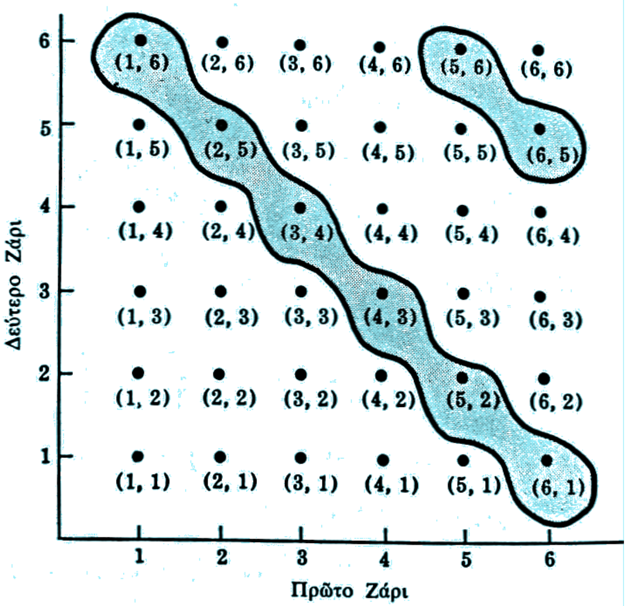
Επομένως:

$$P\{\alpha \cap \beta\} = P\{\alpha\}\, P\{\beta|\alpha\} = P\{\alpha\}\, P\{\beta\} = \left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 3

Ρίχνουμε ένα ζευγάρι ζάρια δύο φορές. Να βρεθεί η πιθανότητα να έρθει άθροισμα διάφορο από 7 και 11 και στις δύο ρίψεις.

Απάντηση: Ο δειγματοχώρος των ρίψεων δείχνεται στο διπλανό σχήμα. Κάθε σημείο παριστάνει το αποτέλεσμα μίας ρίψης, δηλ. το σημείο $(x, y) = (5, 2)$ σημαίνει «5 το πρώτο ζάρι και 2 το δεύτερο». Έχουμε συνολικά 36 σημεία και στο καθένα δίνουμε πιθανότητα 1/36.



Αν α = «άθροισμα 7 ή 11», τότε τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι τα σκιασμένα τμήματα, δηλ. 8 σημεία.

Άρα η πιθανότητα να έρθει άθροισμα διάφορο από 7 και 11 σε μία ρίψη είναι:

$$P(\alpha') = 1 - P(\alpha) = 1 - \frac{8}{36} = \frac{7}{9}$$

Τα αποτελέσματα της πρώτης ρίψης (δείκτης x) και της δεύτερης (δείκτης y) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Άρα η πιθανότητα να έρθει άθροισμα διάφορο από 7 και 11 και στις δύο ρίψεις είναι:

$$P\{\alpha'\}\, P\{\beta'|\alpha'\} = P\{\alpha'\}\, P\{\beta'\} = \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81}$$

Άσκηση 4

Έχουμε ένα κουτί που περιέχει 6 κόκκινες, 4 άσπρες και 5 μπλε σφαίρες. Τραβάμε διαδοχικά τρεις σφαίρες: (α) με επανατοποθέτηση και (β) χωρίς επανατοποθέτηση. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι οι σφαίρες στη σειρά κόκκινη, άσπρη, μπλε.

<u>Απάντηση</u>: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα κ1=«κόκκινη στο πρώτο τράβηγμα», α2=«άσπρη στο δεύτερο τράβηγμα» και μ3=«μπλε στο τρίτο τράβηγμα». Ζητάμε την πιθανότητα $P\{κ1 \cap$

3. Τυχαίες Μεταβλητές

- Ορισμός τυχαίων μεταβλητών
- Διακριτές κατανομές πιθανότητας
- Αθροιστική συνάρτηση κατανομής
- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ορισμός Τυχαίων Μεταβλητών

Αντί να ορίζουμε ρητά τον χώρο πιθανότητας ενός πειράματος, συνήθως ορίζουμε τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες αποτελούν απεικονίσεις από το δειγματοχώρο Ω σε άλλους χώρους, όπως για παράδειγμα το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Μια **τυχαία μεταβλητή** είναι μια **συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το δειγματοχώρο Ω ενός πειράματος τύχης, η οποία αντιστοιχίζει κάθε σημείο του δειγματοχώρου σε ένα σημείο ενός χώρου, όπως π.χ. ο $\mathbb{R}^N$.

- **Διακριτή μεταβλητή**: μία τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο πλήθος τιμών.
- **Συνεχής μεταβλητή**: μία τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει άπειρο μη αριθμήσιμο πλήθος τιμών.

Παράδειγμα: Ένα νόμισμα ρίχνεται δύο φορές, οπότε ο δειγματοχώρος του είναι $\Omega = \{$ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ$\}$. Έστω Χ το πλήθος των όψεων «κεφάλι» που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο. Η αντιστοιχία μεταξύ σημείων του Ω και του Χ είναι:

Σημείο Δειγματοχώρου Ω	ΚΚ	ΚΓ	ΓΚ	ΓΓ
Μεταβλητή Χ	2	1	1	0

Ορισμός Τυχαίων Μεταβλητών

Παράδειγμα: Μια τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει πραγματικές τιμές είναι μια απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $\omega \in \Omega$ αντιστοιχεί μια τιμή $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

Μέσω μιας τυχαίας μεταβλητής μπορούμε να ορίζουμε και **γεγονότα/ενδεχόμενα**.

Παράδειγμα: Με την έκφραση $\{X \geq 0\}$ εννοούμε το γεγονός που ορίζεται ως η ένωση όλων των $\omega \in \Omega$ για τα οποία $X(\omega) \geq 0$, δηλαδή:

$$\{X \geq 0\} = \{\omega \colon X(\omega) \geq 0\}$$

Διακριτές Κατανομές Πιθανότητας

Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή. Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές που μπορεί να λάβει είναι x_1, x_2, x_3 …, διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά. Ας υποθέσουμε επίσης ότι οι πιθανότητες η μεταβλητή να λάβει τις τιμές αυτές, είναι:

$$P(X = x_k) = f_x(x_k), \qquad k = 1,2, \ldots \qquad (1)$$

Ορίζουμε μία **συνάρτηση πιθανότητας** ή **κατανομή πιθανότητας** $f_x(x)$:

$$P(X = x) = f_x(x) \qquad (2)$$

τέτοια ώστε για $x = x_k$ η (2) να δίνει την (1), ενώ για $x \neq x_k$ να είναι $f_x(x) = 0$.

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι μία συνάρτηση πιθανότητας εάν ικανοποιεί:

$$f_x(x) \geq 0$$

$$\sum_x f_x(x) \geq 0$$

Η γραφική παράσταση της $f_x(x)$ καλείται **γραφική παράσταση πιθανότητας**.

Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** ή απλά **συνάρτηση κατανομής** $F(x)$ ορίζεται από τη σχέση $P(X \leq x) = F(x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ μπορεί να ληφθεί από τη συνάρτηση πιθανότητας μέσω της σχέσης:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f_x(u)$$

Αν η X παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, τότε η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ f(x1) + f(x2) & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \qquad\qquad \ldots. & \\ f(x_1) + \cdots + f(x_n), & x_n \leq x < \infty \end{cases}$$

Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής

Μέσω της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η διακριτή τυχαία μεταβλητή να λαμβάνει τιμή εντός ενός διαστήματος $(a, b]$, όπου $b > a$.

Είναι:

$$
\begin{aligned}
&F(b) - F(a) = \\
&= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\
&= \{P(X \leq a) + P(a < X \leq b)\} - P(x < a) \\
&= P(a < X \leq b)
\end{aligned}
$$

Επομένως η πιθανότητα είναι:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής

Για **συνεχή τυχαία μεταβλητή X** ισχύει η σχέση:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

θεωρούμε ότι το παρακάτω όριο :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \right)$$

υπάρχει σε κάθε σημείο x, δηλαδή η συνάρτηση κατανομής είναι παραγωγίσιμη παντού.

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας

Η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής $F(x)$ συμβολίζεται με$f(x)$ και ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (Probability Density Function, PDF) της τυχαίας μεταβλητής X.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

Η πιθανότητα μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X να λάβει τιμή εντός ενός διαστήματος $(a, b]$ μπορεί να εκφραστεί μέσω της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας από τη σχέση:

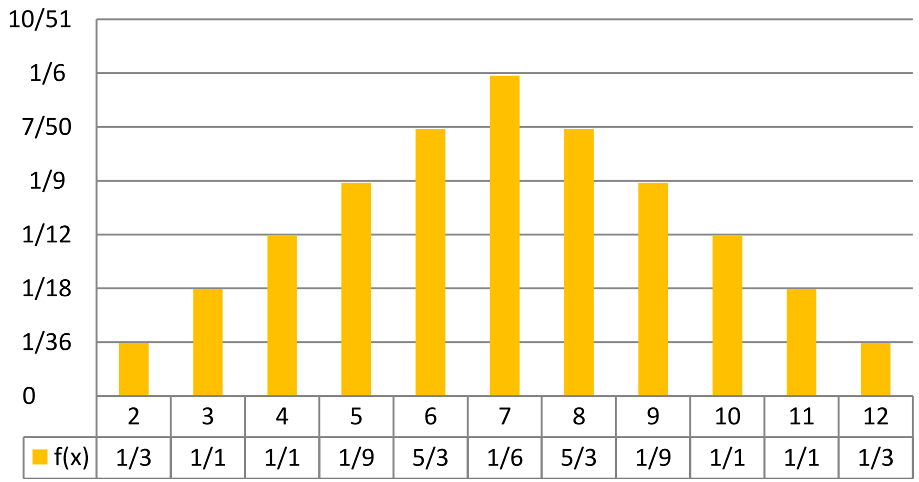
$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Άσκηση 5

Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X παριστάνει το άθροισμα των αποτελεσμάτων ρίψης δύο ζαριών. (α) Προσδιορίστε την κατανομή πιθανότητας της Χ. (β) Παραστήστε γραφικά την κατανομή σε ένα ραβδόγραμμα.

<u>Απάντηση</u>: Τα σημεία του δειγματοχώρου δείχνονται στο σχήμα της άσκησης 3. Η τυχαία μεταβλητή X είναι το άθροισμα των συντεταγμένων κάθε σημείου. Έτσι, π.χ. για το (3, 2) έχουμε $X = 5$. Επειδή όλα τα σημεία έχουν την ίδια πιθανότητα, κάθε σημείο έχει πιθανότητα $1/36$. Μετρώντας το πλήθος των ζευγαριών (x, y) που δίνουν άθροισμα 5, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$



Άσκηση 6

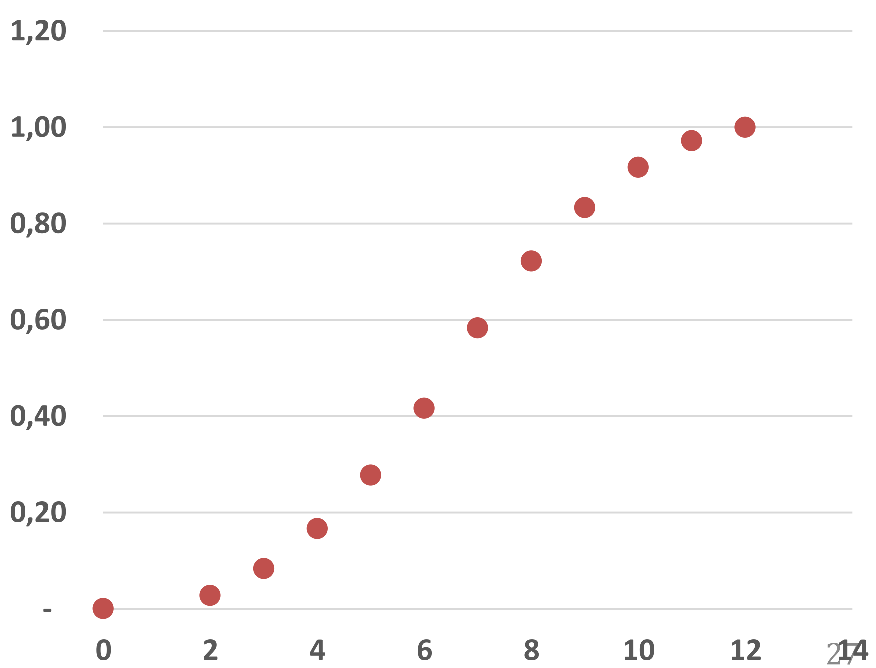
Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$ για την τυχαία μεταβλητή της άσκησης 5.

<u>Απάντηση</u>: Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από τη σχέση

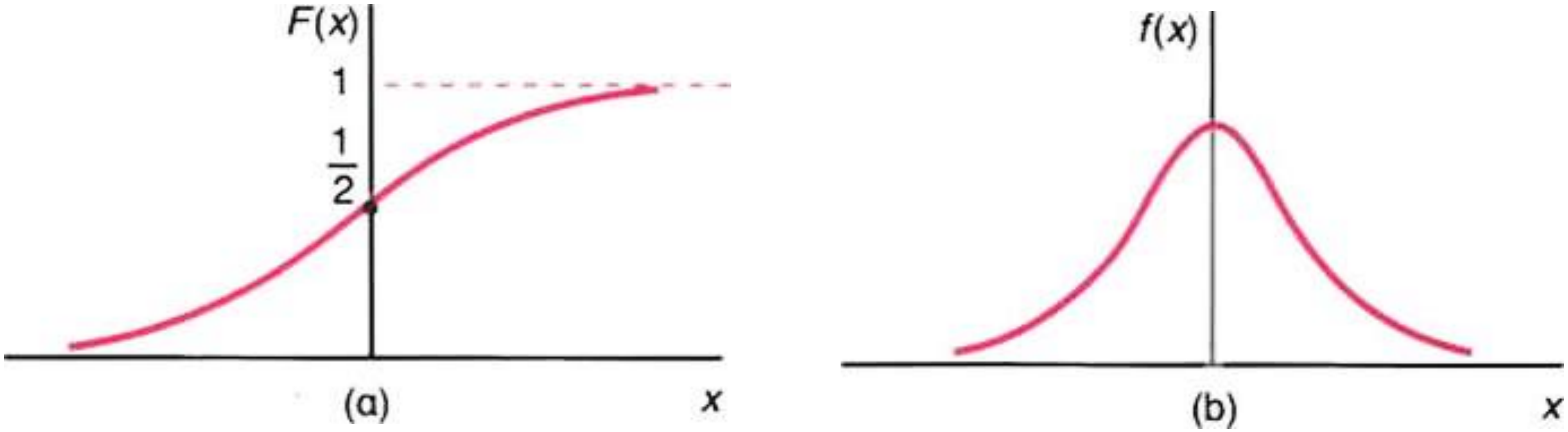
$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

Με βάση τα αποτελέσματα της άσκησης 5, έχουμε:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 2 \\ 1/36 & 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & 4 \leq x < 5 \\ & \\ 35/36 & 11 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x < \infty \end{cases}$$



Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας για Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές



Τυπική μορφή: (α) Αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας,
(b) Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας, για **συνεχή τυχαία μεταβλητή**.

Άσκηση 7

Μια τυχαία μεταβλητή Χ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = c/(x^2+1)$, όπου $-\infty < x < \infty$. Να υπολογίσετε: (α) την τιμή της σταθεράς c, (β) την πιθανότητα το X^2 να βρίσκεται μεταξύ 1/3 και 1.

Απάντηση: (α) Πρέπει να είναι $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Επομένως:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{x^2+1} dx = c \tan^{-1} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = c\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 \Rightarrow \text{c} = 1/\pi$$

(β) Εάν $1/3 \leq X^2 \leq 1$, τότε ισχύει $-1 \leq X^2 \leq -\sqrt{3}/3$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-\sqrt{3}/3} \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{\pi}\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

Άσκηση 8

Να υπολογίσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της άσκησης 7.

<u>Απάντηση</u>: Είναι:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{x^2+1}\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1} u \,\Big|_{-\infty}^{x}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\tan^{-1}x - \tan^{-1}(-\infty)]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}x + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1} x$$

Άσκηση 9

Θεωρείστε την πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = ae^{-b|x|}$, όπου X είναι μία τυχαία μεταβλητή της οποίας οι επιτρεπτές τιμές βρίσκονται στο διάστημα $[-3, +3]$. Βρείτε: α) την αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)$, β) τη σχέση μεταξύ α και b και γ) την πιθανότητα του γεγονότος η X να βρίσκεται στο διάστημα [1, 2].

<u>Απάντηση</u>: α) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} ae^{-b|x|}\, dx = \begin{cases} \dfrac{a}{b}e^{bx} & x \leq 0 \\ \dfrac{a}{b}\left(2 - e^{-bx}\right) & x > 0 \end{cases}$$

β) Για να είναι η $f(x)$ πυκνότητα πιθανότητας, πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|x|}\, dx = \frac{2a}{b} = 1$$

Επομένως: α/b=1/2 ή α=b/2.

γ) Η πιθανότητα η X να βρίσκεται μέσα στο διάστημα [1, 2] είναι:

$$P(1 < X \leq 2) = \frac{b}{2}\int_{1}^{2} e^{-b|x|}\, dx = \frac{1}{2}\left(e^{-b} - e^{-2b}\right)$$