Τμήμα
Μηχανικών
Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα
Δυτικής Ελλάδας

Θεωρία Πληροφορίας

Διάλεξη 2: Τυχαίες Μεταβλητές και Στοχαστικά Σήματα

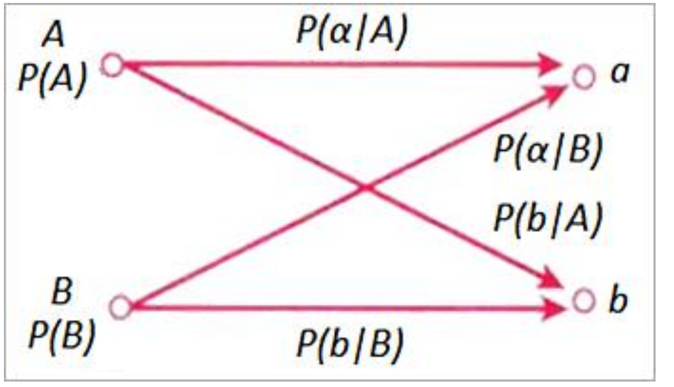
Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ατζέντα

1. Εφαρμογή των πιθανοτήτων στις τηλεπικοινωνίες
2. Μέση τιμής τυχαίας μεταβλητής
3. Διασπορά τυχαίας μεταβλητής
4. Ανισότητα Chebychev
5. Κανονική (Gaussian) πυκνότητα πιθανότητας
6. Η συνάρτηση σφάλματος
7. Μέση τιμή και διασπορά αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών
8. Πυκνότητα πιθανότητας αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών
9. Το κεντρικό οριακό θεώρημα

Εφαρμογή των Πιθανοτήτων στις Τηλεπικοινωνίες

Θεωρήστε το διάγραμμα δέκτη ενός συστήματος επικοινωνιών δύο μηνυμάτων. Στην είσοδο του δέκτη εμφανίζεται το μήνυμα A με πιθανότητα εμφάνισης $P(A)$ και το B με πιθανότητα $P(B)$.



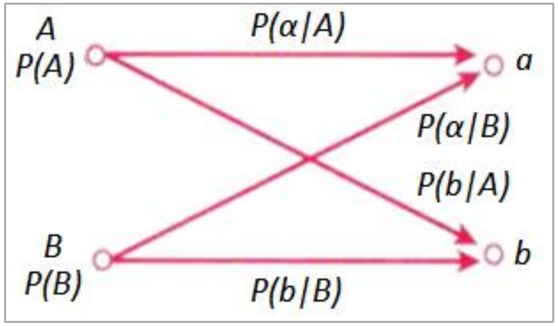
Οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ ονομάζονται εκ των **προτέρων** (a priori) πιθανότητες.

Απουσία θορύβου, το μήνυμα A παράγει την τάση a και το μήνυμα B την τάση b, καθεμία με απόλυτη βεβαιότητα. Όμως παρουσία θορύβου συμβαίνουν σφάλματα.

Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ενός σφάλματος εξαρτάται από το μήνυμα που στάλθηκε και ορίζουμε τις ακόλουθες υπό συνθήκη πιθανότητες, οι οποίες καλούνται **πιθανότητες μετάβασης**:

- $P(a|A) =$ πιθανότητα να λήφθηκε το a δεδομένου ότι στάλθηκε το A
- $P(b|A) =$ πιθανότητα να λήφθηκε το b δεδομένου ότι στάλθηκε το A
- $P(a|B) =$ πιθανότητα να λήφθηκε το a δεδομένου ότι στάλθηκε το B
- $P(b|B) =$ πιθανότητα να λήφθηκε το b δεδομένου ότι στάλθηκε το B

Εφαρμογή των Πιθανοτήτων στις Τηλεπικοινωνίες



Από μία παρατηρούμενη απόκριση του δέκτη a ή b και εξαιτίας του θορύβου δεν μπορούμε να γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο από τα μηνύματα A ή B εστάλη.

Θα αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο ώστε να εκφέρουμε γνώμη για το μήνυμα με τη **μέγιστη πιθανότητα** να είναι η γνώμη μας ορθή.

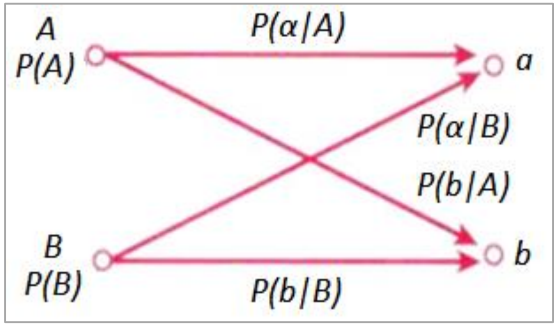
Ας υποθέσουμε ότι λαμβάνεται η τάση a. Θα συγκρίνουμε τις υπό συνθήκη πιθανότητες, που καλούνται **εκ των υστέρων** (a posteriory) πιθανότητες:

- $P(A|a)$= πιθανότητα να στάλθηκε το A δεδομένου ότι λήφθηκε το a
- $P(B|a)$ = πιθανότητα να στάλθηκε το B δεδομένου ότι λήφθηκε το a

Προφανώς αν $P(A|a) > P(B|a)$ θα θεωρήσουμε ότι στάλθηκε το A.
Αν αναστραφεί η ανισότητα θα θεωρήσουμε ότι στάλθηκε το B.

Εφαρμογή των Πιθανοτήτων στις Τηλεπικοινωνίες

Ο αλγόριθμός μας έχει τη μορφή:



Αν λαμβάνεται η α :

- επέλεξε A, αν $P(A|\alpha) > P(B|\alpha)$ (1.α)
- επέλεξε B, αν $P(B|\alpha) > P(A|\alpha)$ (1.β)

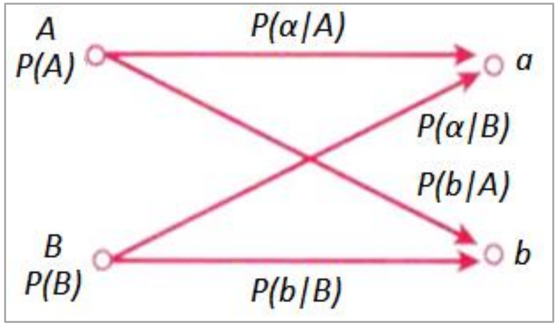
Αν λαμβάνεται η b :

- επέλεξε A, αν $P(A|b) > P(B|b)$ (2.α)
- επέλεξε B, αν $P(B|b) > P(A|b)$ (2.β)

Ένας δέκτης που λειτουργεί με αυτόν τον αλγόριθμο λέμε ότι «μεγιστοποιεί την **εκ των υστέρων** πιθανότητα» μίας ορθής απόφασης και καλείται **βέλτιστος δέκτης**.

Ο αλγόριθμος μπορεί να εκφρασθεί μέσω των εκ των **προτέρων πιθανοτήτων** και των **πιθανοτήτων μετάβασης** όπως δείχνεται στη συνέχεια:

Εφαρμογή των Πιθανοτήτων στις Τηλεπικοινωνίες



Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1.α) με $P(a)$, τότε προκύπτει ότι αν λαμβάνεται το a θα πρέπει να επιλεγεί το A, αν ισχύει:

$$P(A|a)\,P(a) > P(B|a)\,P(a)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα Bayes*, προκύπτει ότι αν λαμβάνεται το a θα πρέπει να επιλεγεί το A, αν ισχύει:

$$P(a|A)\,P(A) > P(a|B)\,P(B)$$

Επεξεργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο την (2.α), προκύπτει ότι αν λαμβάνεται το b θα πρέπει να επιλεγεί το B, αν ισχύει:

$$P(b|B)\;P(B) > P(b|A)\;P(A)$$

* Κανόνας Bayes: $P(Y|X)\;P(X) = P(X|Y)\;P(Y)$

Άσκηση 1

Εφαρμόστε τον αλγόριθμο βέλτιστου δέκτη στην περίπτωση όπου δίνονται: $P(\mathrm{A}) = 0.7$, $P(\mathrm{B}) = 0.3$, $P(\alpha|\mathrm{A}) = 0.9$, $P(b|\mathrm{A}) = 0.1$, $P(\alpha|\mathrm{B}) = 0.4$ και $P(b|B) = 0.6$.

<u>Απάντηση</u>: Διαπιστώνουμε ότι ισχύει η σχέση $P(a|A)\,P(A) > P(a|B)\,P(B)$, επειδή (0.9)(0.7)>(0.4)(0.3). Επομένως, θα επιλέγουμε A όποτε λαμβάνεται α.

Επειδή ισχύει $P(b|B)\,P(B) > P(b|A)\,P(A)$ αφού (0.6)(0.3)>(0.1)(0.7), θα επιλέγουμε B όποτε λαμβάνεται b.

Σημειώνεται ότι αν οι εκ των προτέρων πιθανότητες απέχουν πολύ από το να είναι ίσες, τότε προκύπτει ότι ο αλγόριθμος επιβάλλει να επιλέγεται το ένα μήνυμα αδιαφορώντας για τη λαμβανόμενη ένδειξη.

Για παράδειγμα, αν θέσουμε P(A)=0.9 και P(B)=0.1, ο βέλτιστος δέκτης θα επιλέγει **πάντοτε** A, άσχετα με το αν λαμβάνεται α ή b. Επομένως, μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε πόσο **αποτελεσματικός** είναι ο αλγόριθμος στον σωστό καθορισμό του εκπεμπόμενου συμβόλου.

Για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε την πιθανότητα $P(c)$ να προκύψει ένας **σωστός** καθορισμός. Η πιθανότητα ενός σφάλματος είναι $P(e) = 1 - P(c)$.

Άσκηση 2

Να υπολογίστε τα $P(c)$ και $\mathrm{P}(\varepsilon)$ για την προηγούμενη άσκηση

Απάντηση: Η πιθανότητα το μεταδιδόμενο σήμα να διαβάστηκε σωστά στον δέκτη, ισούται με την πιθανότητα να στάλθηκε το Α όταν διαβάστηκε το α, συν την πιθανότητα να στάλθηκε το Β όταν διαβάστηκε το b, δηλαδή:

$$P(c) \ = \ P(\alpha|\mathrm{A})P(\mathrm{A}) \ + \ P(b|B)P(B)$$

Επομένως έχουμε:

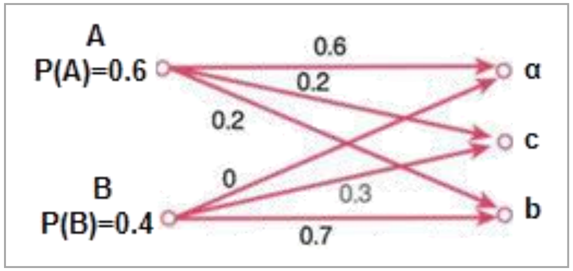
$$P(c) = (0.9)(0.7) + (0.6)(0.3) = 0.81$$

και

$$\mathrm{P}(\varepsilon) = 1 - P(c) = 1 - 0.81 = 0.19$$

Άσκηση 3

Εξαιτίας της ύπαρξης θορύβου, ο διπλανός δέκτης μπορεί να παράγει περισσότερες από δύο αποκρίσεις.



α) Να βρεθεί ο βέλτιστος δέκτης, και β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα σφάλματος.

<u>Απάντηση</u>: α) Ισχύει $P(\alpha|\mathrm{A})P(\mathrm{A}) > P(b|B)P(B)$ αφού $(0.6)(0.6) > (0)(0.4)$. Επομένως, όταν λαμβάνεται α, επιλέγουμε Α.

Επίσης ισχύει $P(b|B)P(B) > P(b|A)P(A)$ αφού $(0.7)(0.4) > (0.2)(0.6)$. Συνεπώς, όταν λαμβάνεται b επιλέγουμε Β.

Για να αποφασίσουμε σε ποιο μήνυμα (Α ή Β) θα αντιστοιχίσουμε το c, θα συγκρίνουμε μεταξύ τους τα γινόμενα $P(c|A)P(A)$ και $P(c|B)P(B)$.

Επειδή $P(c|A)P(A) = P(c|B)P(B)$, αφού $(0.2)(0.6) = (0.3)(0.4)$, μπορούμε να κάνουμε οποιαδήποτε αντιστοιχία του c με το Α ή το Β. Αυθαίρετα αποφασίζουμε να συνδέουμε το c με το Α.

Άσκηση 3

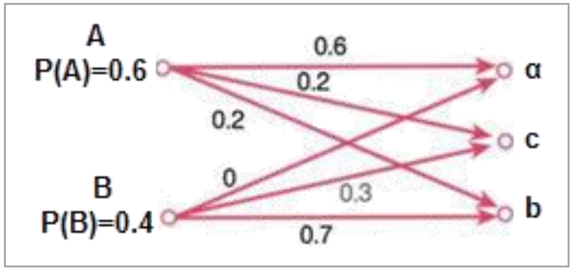
β) Η πιθανότητα να είναι σωστό, δίνεται από:

$$P(c) = P(\alpha|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(c|\mathrm{A})P(A)$$
$$= (0.6)\,(0.6) + (0.7)\,(0.4) + (0.2)\,(0.6)$$
$$= 0.76$$

και $P(\varepsilon) = 0.24$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του σφάλματος προσθέτοντας τις πιθανότητες να λαμβάνονται μη σωστές αποφάσεις. Τότε απλά εναλλάσσοντας B και A στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε:

$$\mathrm{P}(\varepsilon) = (0)(0.4) + (0.2)(0.6) + (0.3)(0.4) \; = 0.24$$



Μέση Τιμή (Αναμονή) Τυχαίας Μεταβλητής

Διακριτής τυχαίας μεταβλητής:

$$\bar{X} \equiv E(X) = m = \sum_i x_i P(x_i)$$

Συνεχούς τυχαίας μεταβλητής:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Γενικά, η **μέση τιμή** ή **αναμονή** μίας συνάρτησης $g(X)$ της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση:

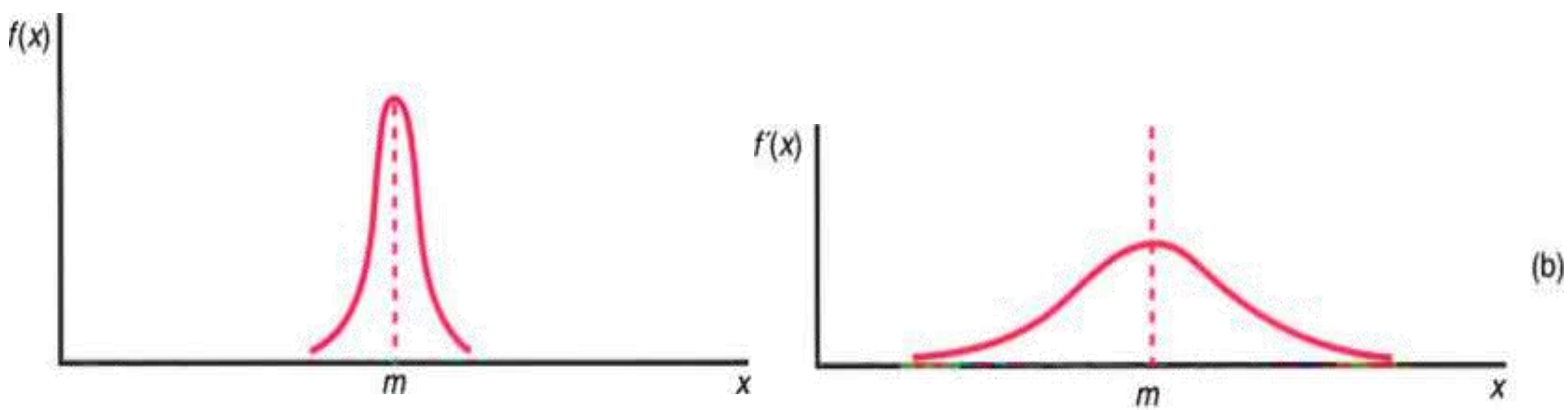
$$g(\bar{X}) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$

Διασπορά Τυχαίας Μεταβλητής

Η **διασπορά** σ^2 μίας τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση:

$$\sigma^2 \equiv E[(X-m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\, f(x)\, dx$$

Η διασπορά εκφράζει το μέτρο του «εύρους» κατανομής των γεγονότων μιας τυχαίας μεταβλητής X γύρω από τη μέση τιμή m. Π.χ. οι παρακάτω δύο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας έχουν την ίδια μέση τιμή m, αλλά διαφορετική διασπορά σ^2.



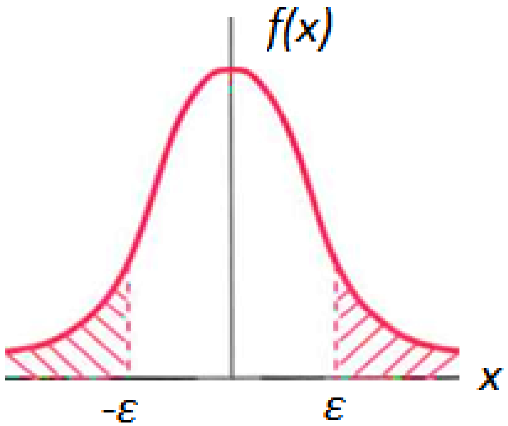
Η ποσότητα σ ονομάζεται **τυπική απόκλιση**.

Ανισότητα Chebychev

Έστω μία τυχαία μεταβλητή Χ με συμμετρική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και μηδενική μέση τιμή.

Η πιθανότητα ότι ένα δείγμα της X θα έχει μία τιμή x έτσι ώστε $|x| \geq \varepsilon$, ισούται με το εμβαδόν των σκιασμένων περιοχών.

$$P(|x| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$



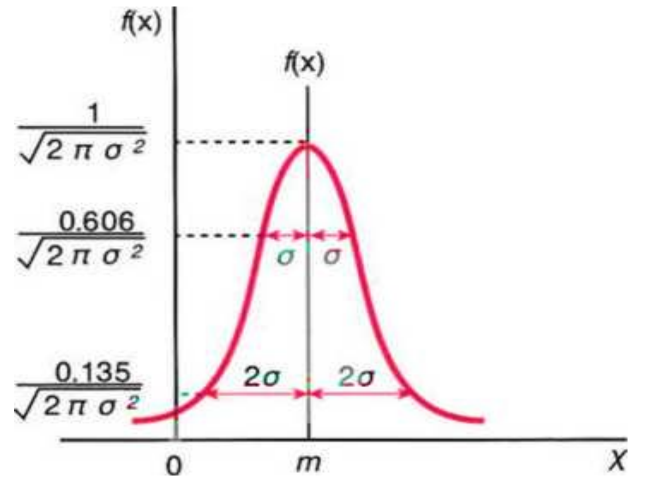
<u>Παρατηρήσεις</u>

- Η σημασία της ανισότητας του Chebyshev έγκειται στο γεγονός ότι δίνει ένα άνω όριο (φράγμα) για την πιθανότητα μιας τυχαίας μεταβλητής, της οποίας η κατανομή μπορεί να είναι άγνωστη.
- Το φράγμα αυτό δεν είναι πάντα το καλύτερο που μπορεί να πετύχει κανείς. Πολλές φορές μάλιστα είναι πολύ συντηρητικό.
- Εάν γνωρίζουμε περισσότερα για την κατανομή της Χ, πέρα από τη μέση τιμή m και τη διασπορά σ^2, τότε το φράγμα αυτό είναι δυνατό να βελτιωθεί.

Gaussian Πυκνότητα Πιθανότητας

Η Gaussian (κανονική) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται σαν:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$



Ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Μια Gaussian τυχαία μεταβλητή καθορίζεται πλήρως από τη μέση τιμή και τη διασπορά της.
- Όταν $x - m = \pm\sigma$, δηλαδή στις τιμές του x που απέχουν από την m κατά την τυπική απόκλιση σ, η $f(x)$ έχει ελαττωθεί στο 0.606 της τιμής κορυφής.
- Όταν $x - m = \pm 2\sigma$, η $f(x)$ πέφτει στο 0.135 της τιμής κορυφής.
- Όταν $x - m = \pm 3\sigma$, η $f(x)$ πέφτει στο 0.01 της τιμής κορυφής.
- Οι τυχαίες μεταβλητές που απαντώνται στις τηλεπικοινωνίες, σχεδόν αποκλειστικά, έχουν Gaussian κατανομή.

Συνάρτηση Σφάλματος

Η αθροιστική κατανομή που αντιστοιχεί στην gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για $m = 0$, είναι:

$$P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δεν αποτιμάται εύκολα, αλλά σχετίζεται απ' ευθείας με τη **συνάρτηση σφάλματος** ($\operatorname{erf} u$), η οποία ορίζεται ως:

$$\operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{u} e^{-u^2} du$$

Ισχύουν: $\operatorname{erf}(0) = 0$ και $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Η **συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος** ($\operatorname{erfc} u$), ορίζεται ως:

$$\operatorname{erfc} u = 1 - \operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u}^{\infty} e^{-u^2} du$$

Συνάρτηση Σφάλματος

Θα μελετήσουμε την πιθανότητα μία μέτρηση να φέρει ένα γεγονός που να εμπίπτει εντός συγκεκριμένου διαστήματος γύρω από τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής.

Αφού το "εύρος" της πυκνότητας πιθανότητας εξαρτάται από την τυπική απόκλιση σ, ζητούμε την πιθανότητα $P(m - k\sigma \leq X \leq m + k\sigma)$. Είναι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να μην απέχει από την $x = m$ περισσότερο από $k\sigma$, όπου k είναι ένας σταθερός αριθμός.

Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$P_{\pm k\sigma} \equiv P(m - k\sigma \leq X \leq m + k\sigma) = \mathrm{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$$

k	$\boldsymbol{P_{\pm k\sigma}}$	**k**	$\boldsymbol{P_{\pm k\sigma}}$
0.5	0.383	2.5	0.988
1.0	0.683	3.0	0.997
1.5	0.866	3.5	0.9995
2.0	0.955	4.0	0.99994

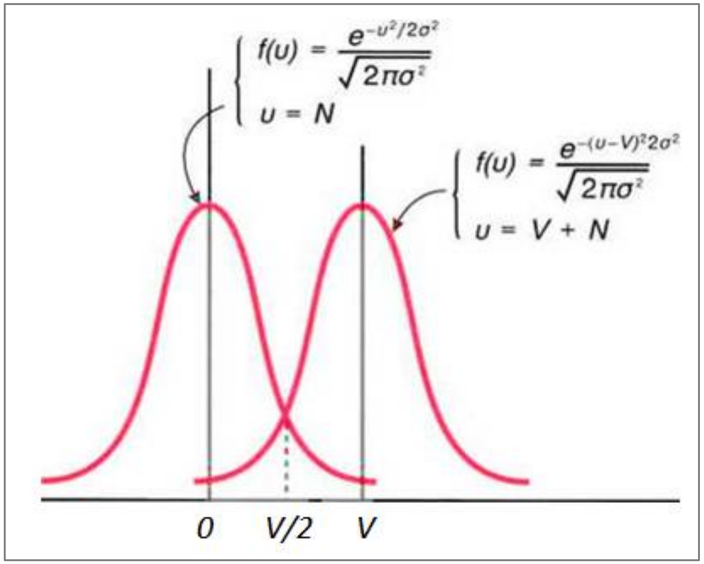
Άσκηση 4

Μία πηγή παράγει μία τάση V, η οποία είναι είτε $V = \upsilon_0\ Volt$ είτε $V = 0\ Volt$. Μία από τις δύο δυνατές τάσεις μεταδίδεται σε έναν δέκτη μέσω ενός καναλιού που προσθέτει θόρυβο με gaussian πυκνότητα πιθανότητας και μηδενική μέση τιμή. Τι διαδικασία πρέπει να ακολουθήσουμε για να καθοριστεί η κατάσταση στον δέκτη μετρώντας στιγμιαία την τάση σε αυτόν; Ποια η πιθανότητα η απόφασή μας να είναι εσφαλμένη;

<u>Απάντηση</u>: Εξ' αιτίας του θορύβου, η μέτρησή μας δεν θα αποφέρει σαν αποτέλεσμα ούτε τα 0 ούτε τα $\upsilon_0\ Volt$.

Όταν η μεταδιδόμενη τάση είναι 0 $volt$, η τάση στον δέκτη είναι $V = N$, όπου N είναι κανονική (gaussian)τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον θόρυβο. Όταν η μεταδιδόμενη τάση είναι υ_0, τότε η τάση στον δέκτη είναι $V = \upsilon_0 + N$.

Και στις δύο περιπτώσεις η V είναι επίσης τυχαία gaussian μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας που δείχνεται στο σχήμα. Στην πρώτη περίπτωση η μέση τιμή είναι μηδέν, ενώ στη δεύτερη είναι υ_0.



Άσκηση 4 (συνέχεια)

Με βάση τη συμμετρία του σχήματος, είναι φανερό ότι το κατώφλι απόφασης θα είναι $V = \upsilon_0/2$.

Δηλαδή, όταν μετράμε $V < \upsilon_0/2$, θα πρέπει να αποφασίζουμε ότι η μεταδιδόμενη τάση V είναι 0 Volt κι όταν $V > \upsilon_0/2$ ότι μεταδίδονται υ_0 Volt.

Όταν μεταδίδονται u_0 Volt, η πιθανότητα σφάλματος είναι $P(V = \upsilon_0 + \mathrm{N} < \upsilon_0/2)$, δηλαδή εάν $\upsilon_0 + \mathrm{N} < \upsilon_0/2$, η μετάδοση των υ_0 Volt να ληφθεί σαν μετάδοση των 0 Volt.

Αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από τη σχέση:

$$P_{error} = \frac{1}{2}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{u_0}{2\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Η ίδια σχέση δίνει και την πιθανότητα λάθους όταν μεταδίδονται 0 Volt.

Μέση Τιμή και Διασπορά Αθροίσματος Τυχαίων Μεταβλητών

Εστω X και Υ δύο τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές m_x και m_y και διασπορά σ_x^2 και σ_y^2, αντίστοιχα.

Αποδεικνύεται ότι η μέση τιμή m_z του αθροίσματος $Z = X + \Upsilon$ δίνεται από τη σχέση:

$$m_z = m_x + m_y$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει είτε οι μεταβλητές X και Υ είναι ανεξάρτητες είτε όχι.

Αν οι μεταβλητές X και Υ είναι ανεξάρτητες, τότε αποδεικνύεται ότι η διασπορά του αθροίσματος Z είναι:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\, m_x\, m_y$$

Αν m_x ή/και m_y είναι μηδέν, τότε η διασπορά του αθροίσματος είναι:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Πυκνότητα Πιθανότητας Αθροίσματος Τυχαίων Μεταβλητών

Αν οι μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες τότε η πυκνότητα πιθανότητας του αθροίσματος $Z = X + Y$ δίνεται από τη συνέλιξη των $f(x)$ και $f(y)$:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f(z-x)\, dx$$

Αν οι πυκνότητες πιθανότητας $f(x)$ και $f(y)$ είναι Gaussian πυκνότητες, δηλ.:

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma_x^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \quad \text{και } f(y) = \frac{e^{-y^2/2\sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}$$

τότε και η πυκνότητα πιθανότητας $f(z)$ είναι Gaussian, δηλ.:

$$f(z) = \frac{e^{-z^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

όπου $\sigma^2 = \sigma_x + \sigma_y$.

Επομένως, δοθέντων δύο ανεξαρτήτων κανονικών τυχαίων μεταβλητών, το άθροισμα τους είναι και το ίδιο μία Gaussian τυχαία μεταβλητή.

Συνδιασπορά και Συντελεστής Συσχέτισης

Όταν μελετάμε δύο μη-ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y, έχει ενδιαφέρον να προσδιορίσουμε πόσο ισχυρά συσχετίζεται η μια με την άλλη.

Ορίζουμε τη **συνδιασπορά** ή **συνδιακύμανση** (covariance) των X και Y που συμβολίζεται $\sigma_{XY} \equiv Cov[X,Y]$ και δίνεται από:

$$\sigma_{XY} \equiv E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - \mu_X\, \mu_Y$$

Επειδή η συνδιασπορά εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης των X και Y, προτιμούμε τον **συντελεστή συσχέτισης** (correlation coefficient), που συμβολίζεται $\rho_{XY} \equiv Corr[X,Y]$ ή απλά **ρ**, και δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\, \sigma_Y}$$

<u>Ιδιότητες του συντελεστή συσχέτισης</u>:

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε $\rho = 0$. Όμως αν $\rho = 0$ δεν σημαίνει ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες αλλά ότι είναι **ασυσχέτιστες** (δηλαδή μη-γραμμικά συσχετισμένες).
- $\rho = -1$ ή $\rho = 1$ αν και μόνο αν $Y = \alpha + X$ για κάποιους αριθμούς α και β.

Άσκηση 5

Έστω Ζ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $f(z) = 1/2$ στο διάστημα $-1 < z < 1$. Έστω η τυχαία μεταβλητή $\mathrm{X} = \mathrm{Z}$ και η τυχαία μεταβλητή $\Upsilon = \mathrm{Z}^2$. Προφανώς οι Χ και Υ δεν είναι ανεξάρτητες αφού $\mathrm{X}^2 = \Upsilon$. Δείξτε ότι οι Χ και Υ είναι ασυσχέτιστες.

<u>Απάντηση</u>: Έχουμε $E(Z) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dz = 0$. Αφού $\mathrm{X} = \mathrm{Z}$ τότε $E(\mathrm{X}) = E(\mathrm{Z}) = 0$ και επειδή $\Upsilon = \mathrm{Z}$ έχουμε $E(\Upsilon) = E(\mathrm{Z}^2)$, δηλ:

$$E(\Upsilon) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, z^2 dz = \frac{1}{3}$$

Η συνδιασπορά των Χ και Υ είναι:

$$\mu \;=\; \mathrm{E}\Big((\mathrm{X} - m_x)\big(Y - m_y\big)\Big) = E((\mathrm{X})(\Upsilon - 1/3))$$

$$= E\left(XY - \frac{1}{3}X\right)$$

$$= E\left(Z^3 - \frac{Z}{3}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(z^3 - \frac{z}{3}\right) dz = 0$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Το άθροισμα και -επομένως- η μέση τιμή, μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων παρατηρήσεων, ακολουθεί κατά προσέγγιση την **κανονική (Gaussian) κατανομή**, ανεξαρτήτως της κατανομής που ακολουθούν οι παρατηρήσεις.

Σε πολλά φαινόμενα/πειράματα, οι τιμές διαφόρων χαρακτηριστικών είναι αποτέλεσμα αθροιστικής επίδρασης πολλών ανεξάρτητων παραγόντων. Καθένας από τους παράγοντες αυτούς επιφέρει ένα θετικό ή αρνητικό αποτέλεσμα, κανένας από αυτούς δεν υπερισχύει των άλλων, όμως όλοι μαζί αθροιστικά συντελούν στη διαμόρφωση του τελικού αποτελέσματος.

Για παράδειγμα, ο χρόνος αναμονής σε μια ουρά, είναι αποτέλεσμα πολλών παραγόντων, όπως, η ημέρα της εβδομάδας, η ώρα της ημέρας, η αποτελεσματικότητα του υπαλλήλου, το είδος της συναλλαγής που διεκπεραιώνεται, κ.ά.

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα:

- Λέει ότι τα χαρακτηριστικά ενός φαινομένου/πειράματος περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή.
- Συνδέει την κανονική κατανομή με οποιαδήποτε άλλη κατανομή, γεγονός το οποίο απαντάει στο ερώτημα, γιατί η κανονική κατανομή βρίσκει εφαρμογή σε μεγάλο πλήθος φαινομένων και πειραμάτων.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

(α) Μία τυχαία μεταβλητή X με ομοιόμορφη πυκνότητα πιθανότητας

(b) Η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X_1 + X_2$

(c) Η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $X_1 + X_2 + X_3$

Παρατηρείστε ότι ακόμα και για άθροισμα τριών μόλις όρων, το αποτέλεσμα υποδεικνύει μία gaussian πυκνότητα.

Καθώς ολοένα και περισσότεροι όροι θα προστίθενται, η πυκνότητα πράγματι θα τείνει οριακά να γίνει gaussian.