Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Θεωρία Πληροφορίας

Διάλεξη 5: Διακριτή πηγή πληροφορίας με μνήμη

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

Ατζέντα

1. Διακριτές πηγές πληροφορίας με μνήμη
   - Μαρκοβιανές αλυσίδες
   - Τάξη μακροβιανών αλυσίδων
   - Εντροπία των πηγών Markoff
2. Συνεχείς πηγές πληροφορίας με μνήμη

Διακριτές πηγές πληροφορίας με μνήμη

Στην πραγματικότητα, όλες οι πηγές πληροφορίας παράγουν ακολουθίες συμβόλων που είναι **στατιστικά εξαρτημένες**. Για παράδειγμα, στην ελληνική γλώσσα το «α» εμφανίζεται με πιθανότητα 11,7%, ενώ το «ψ» με πιθανότητα 0,1%. Επίσης, ο συνδυασμός γραμμάτων «τα» είναι πολύ πιθανός, ενώ ο συνδυασμός «τπ» είναι απίθανος.

Στην περίπτωση των «διακριτών πηγών με μνήμη» υφίσταται **εξάρτηση** μεταξύ των διαδοχικών συμβόλων. Η εξάρτηση αυτή μπορεί να υφίσταται για μακρές ακολουθίες συμβόλων, συνηθέστερα όμως υφίσταται για έναν περιορισμένο αριθμό συμβόλων.

Οι **Μαρκοβιανές αλυσίδες** μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως στατιστικά υποδείγματα διακριτών πηγών πληροφορίας με μνήμη (π.χ. τηλέτυπο). Οι πηγές αυτές ονομάζονται **πηγές Markoff**.

Μαρκοβιανές αλυσίδες (1/3)

- Μια τυχαία διαδικασία είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Y1, Y2, \ldots, Yn$. Γενικά, μπορεί να υφίσταται οποιαδήποτε εξάρτηση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών της ακολουθίας.

- Μια τυχαία διαδικασία Υ1, Υ2, … , Υn χαρακτηρίζεται ως **διαδικασία Markoff** (Μαρκοβιανή αλυσίδα), αν για $n = 1,2, \ldots$ ισχύει:

$$P(Y_{n+1} = y_{n+1} | Y_n = y_n,\ Y_{n-1} = y_{n-1}, \ldots, Y_1 = y_1) = P(Y_{n+1} = y_{n+1} | Y_n = y_n)$$

- Στην περίπτωση της διαδικασίας Markoff η συνάρτηση πιθανότητας μάζας μπορεί να γραφεί:

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_n) = p(y_1)\, p(y_2|y_1)\, p(y_3|y_2) \ldots p(y_n|y_{n-1})$$

- Η διαδικασία Markoff χαρακτηρίζεται ως **χρονικά αμετάβλητη** αν η υπό συνθήκη πιθανότητα $P(Y_{n+1} = b | Y_n = a)$ δεν εξαρτάται από το n. Δηλαδή για $n = 1,2, \ldots$ ισχύει:

$$P(Y_{n+1} = b \mid Y_n = a) = P(Y_2 = b \mid Y_1 = \alpha)$$

Μαρκοβιανές αλυσίδες (2/3)

- Μια αμετάβλητη στο χρόνο Μαρκοβιανή αλυσίδα περιγράφεται πλήρως από την **αρχική της κατάσταση** και τον πίνακα των **πιθανοτήτων μετάβασης** $P = \left|P_{ij}\right|$, όπου $P_{ij} = P\{Y_{n+1} = j \,|Y_n = i\}$ και i, j είναι οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών οι οποίες ανήκουν στο σύνολο των δυνατών καταστάσεων $\{1,2, \dots , m\}$.

- Ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης καλείται και **πίνακας μετάβασης**.

- Η πιθανότητα της Μαρκοβιανής αλυσίδας να βρίσκεται τη χρονική στιγμή n στην κατάσταση i συμβολίζεται με $p_i(n)$, δηλαδή $p_i(n) = P_i(Y_n = i)$.

- Αν ισχύει $p_i(n) = p_i(n+1) = \pi_i$ για κάθε κατάσταση, τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα χαρακτηρίζεται ως **στατική**.

Μαρκοβιανές αλυσίδες (3/3)

- Αν η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση j κατά την αρχή του k-στου διαστήματος συμβόλου είναι $p_j(k)$, τότε οι μεταπτώσεις του συστήματος περιγράφονται από τη σχέση:

$$p_j(k+1) = \sum_{i=1}^{m} p_i(k)\, P_{ij}$$

Όπου m είναι το πλήθος των δυνατών καταστάσεων της πηγής.

- Για μια στατική Μαρκοβιανή αλυσίδα, μεταξύ του διανύσματος των πιθανοτήτων των καταστάσεων $\boldsymbol{\pi}$ και του πίνακα μετάπτωσης $\boldsymbol{P}$, ισχύει η σχέση:

$$\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

Τάξη Μαρκοβιανής αλυσίδας

- Η **τάξη** της Μαρκοβιανής αλυσίδας καθορίζεται από το **πλήθος** ($\boldsymbol{l}$) **των προηγούμενων συμβόλων** που επηρεάζουν το επόμενο σύμβολο που θα παραχθεί από την πηγή.

- Η πηγή είναι στην **κατάσταση** i, όταν η τελευταία εκπομπή είναι αυτή του συμβόλου s_i.

- **Μετάβαση** της πηγής από την κατάσταση i στην κατάσταση j, σημαίνει ότι μετά την εκπομπή του συμβόλου s_i εκπέμπεται το σύμβολο s_j.

- Σε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα:
  - **πρώτης τάξης** ($l = 1$), το πλήθος των καταστάσεων της πηγής είναι ίσο με το πλήθος των συμβόλων του αλφαβήτου της πηγής ($m = q$).
  - **δεύτερης τάξης** ($l = 2$), το πλήθος των καταστάσεων της πηγής είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των συμβόλων ($m = q^2$).

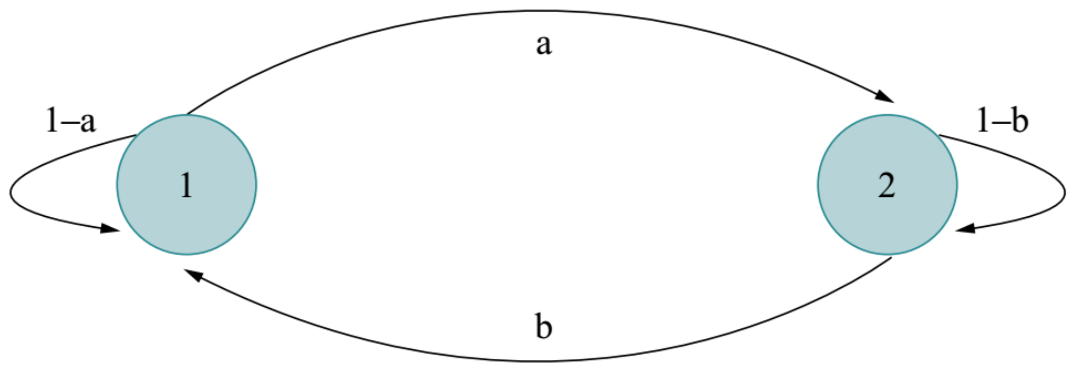
Άσκηση 1

Θεωρούμε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα με δύο καταστάσεις και πίνακα μετάβασης:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & \alpha \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες π_1 και π_2, δηλαδή οι πιθανότητες να βρίσκεται η Μαρκοβιανή αλυσίδα στην κατάσταση 1 και 2, αντίστοιχα.

<u>Απάντηση</u>: Ο γράφος της Μαρκοβιανής αλυσίδας δίνεται στο σχήμα:



Οι **καταστάσεις** παριστάνονται με κόμβους του γράφου και οι **μεταβάσεις** με ακμές που συνδέουν την αρχική με την τελική κατάσταση.

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Εφόσον είναι γνωστός ο πίνακας μετάβασης, τότε οι πιθανότητες των δύο καταστάσεων μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια της σχέσης $\boldsymbol{\pi}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$.

Δηλαδή:

$$[\pi_1 \ \ \pi_2]\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = [\pi_1(1-\alpha) + \pi_2 b \quad \pi_1 \alpha + \pi_2(1-b)] = [\pi_1 \ \ \pi_2]$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\pi_1 + \pi_2 = 1$, υπολογίζουμε τις ζητούμενες πιθανότητες:

$$\pi_1(1-\alpha) + \pi_2 b = \pi_1 \underset{\pi_2 = 1-\pi_1}{\Longrightarrow} \quad -\pi_1 \alpha + b - \pi_1 b = 0 \Rightarrow \pi_1 = \frac{b}{a+b}$$

$$\pi_1 a + \pi_2(1-b) = \pi_2 \underset{\pi_2 = 1-\pi_1}{\Longrightarrow} \quad -\pi_2 \alpha + a - \pi_2 b = 0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{a}{a+b}$$

Εντροπία πηγών Markoff

Η **εντροπία των συμβόλων** που εκπέμπονται από την κατάσταση i είναι:

$$H(K_i) = -\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \log P_{ij} \qquad bits/symbol$$

Η **εντροπία πηγής** είναι ο μέσος όρος της εντροπίας των καταστάσεων:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \, H(K_i) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \log P_{ij} \quad bits/symbol$$

Η **μέση ποσότητα πληροφορίας μηνυμάτων** της πηγής συμβολίζει την πιθανότητα εκπομπής του μηνύματος m_i:

$$H(M) = -\sum_{i} p(m_i) \log p(m_i)$$

Η **μέση ποσότητα πληροφορίας συμβόλων** της πηγής (N=μήκος μηνυμάτων) είναι:

$$H_N = \frac{1}{N} \, H(M)$$

Εντροπία πηγών Markoff

Το μέτρο του **πλεονασμού εξάρτησης** μίας πηγής με μνήμη, είναι:

$$red_{\varepsilon\xi} = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{H_{\text{χωρίς μνήμη}}(\mathrm{S})}$$

Το μέτρο του **ολικού πλεονασμού** είναι:

$$red_{o\lambda} = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{maxH_{\text{χωρίς μνήμη}}(\mathrm{S})} = 1 - \frac{H_{\text{με μνήμη}}(S)}{log\, q}$$

και αναφέρεται στην εντροπία της πηγής σε σύγκριση με τη μέγιστη δυνατή εντροπία της πηγής χωρίς μνήμη, που επιτυγχάνεται για ίσες πιθανότητες εκπομπής όλων των συμβόλων.

Άσκηση 2

Μια διακριτή πηγή με μνήμη παράγει μια Μαρκοβιανή αλυσίδα πρώτης τάξης. Το αλφάβητο της πηγής αποτελείται από τα σύμβολα φ, χ και ψ. Ο πίνακας μετάβασης είναι:

$$P = \begin{bmatrix} P(\varphi/\varphi) & P(\varphi/\chi) & P(\varphi/\psi) \\ P(\chi/\varphi) & P(\chi/\chi) & P(\chi/\psi) \\ P(\psi/\varphi) & P(\psi/\chi) & P(\psi/\psi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν:

1) Οι πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων της πηγής φ, χ και ψ.
2) Οι συνδυασμένες πιθανότητες εκπομπής μηνυμάτων αποτελούμενων από δύο σύμβολα.
3) Να σχηματιστούν κωδικές λέξεις με το δυαδικό κωδικό αλφάβητο για τα δυνατά μηνύματα δύο συμβόλων σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Fano.

Άσκηση 2 (συνέχεια)

<u>Απάντηση</u>: (1) Επειδή η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι πρώτης τάξης, το πλήθος των καταστάσεων της πηγής είναι ίσο με το πλήθος των συμβόλων. Επομένως, η κατάσταση της πηγής περιγράφει το τελευταίο σύμβολο που παρήγαγε η πηγή και έτσι η πιθανότητα παραγωγής ενός συμβόλου ισούται με την πιθανότητα κατάστασης της πηγής.

Από τον πίνακα μετάβασης υπολογίζουμε τις πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων της πηγής, οι οποίες ταυτίζονται με τις πιθανότητες κατάστασης της πηγής Markoff.

Επιλύοντας το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
p(\varphi) &= p(\varphi)P(\varphi/\varphi) + p(x)P(\varphi/\chi) + p(\psi)P(\varphi/\psi) \\
p(\chi) &= p(\varphi)P(\chi/\varphi) + p(x)P(\chi/\chi) + p(\psi)P(\chi/\psi) \\
p(\psi) &= p(\varphi)P(\psi/\varphi) + p(x)P(\psi/\chi) + p(\psi)P(\psi/\psi) \\
p(\varphi) &+ p(\chi) + p(\psi) = 1
\end{aligned}
$$

βρίσκουμε: $p(\varphi) = 10/27$, $p(\chi) = 8/27$ και $p(\psi) = 9/27$.

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(2) Το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο μηνυμάτων αποτελούμενων από δύο σύμβολα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$H(M) = -\sum_i p(m_i)\, log\, p(m_i)$$

Το πλήθος των διαφορετικών μηνυμάτων που αποτελούνται από δύο σύμβολα είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των συμβόλων της πηγής, δηλαδή ίσο με $3^2 = 9$.

Οι συνδυασμένες πιθανότητες εκπομπής των μηνυμάτων αυτών μπορούν να υπολογιστούν από τον πίνακα μετάβασης και τις πιθανότητες εκπομπής των συμβόλων $p(\varphi)$, $p(\chi)$ και $p(\psi)$.

Έτσι, η πιθανότητα εκπομπής του μηνύματος m_k που σχηματίζεται από τα σύμβολα s_i και s_j δίνεται από τη σχέση:

$$P\left(m_k = s_i s_j\right) = p\left(s_i, s_j\right) = p(s_i)P(s_j|s_i)$$

Άσκηση 2 (συνέχεια)

Επομένως οι πιθανότητες όλων των δυνατών μηνυμάτων είναι:

- $p(\varphi\varphi) = p(\varphi)P(\varphi/\varphi) = \frac{10}{27}.\frac{1}{2} = \frac{5}{27} = 0{,}185$
- $p(\varphi\chi) = p(\varphi)P(\chi/\varphi) = \frac{10}{27}.\frac{1}{4} = \frac{5}{54}$=0,093
- $p(\varphi\psi) = p(\varphi)P(\psi/\varphi) = \frac{10}{27}.\frac{1}{3} = \frac{10}{81}$=0,124
- $p(\chi\varphi) = p(\chi)P(\varphi/\chi) = \frac{8}{27}.\frac{1}{2} = \frac{4}{27}$=0,148
- $p(\chi\chi) = p(\chi)P(\chi/\chi) = \frac{8}{27}.0 = 0$
- $p(\chi\psi) = p(\chi)P(\psi/\chi) = \frac{8}{27}.\frac{1}{3} = \frac{8}{81}$=0,099
- $p(\psi\varphi) = p(\psi)P(\varphi/\psi) = \frac{9}{27}.0 = 0$
- $p(\psi\chi) = p(\psi)P(\chi/\psi) = \frac{9}{27}.\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$=0,250
- $p(\psi\psi) = p(\psi)P(\psi/\psi) = \frac{9}{27}.\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$=0,111

Άσκηση 2 (συνέχεια)

(3) Οι κωδικές λέξεις που προκύπτουν από τον αλγόριθμο Fano είναι:

Μήνυμα	Πιθανότητα	Κωδική Λέξη
ψχ	0,250	00
φφ	0,185	01
χφ	0,148	100
φψ	0,124	101
ψψ	0,111	110
χψ	0,099	1110
φχ	0,093	1111
χχ	0	-
ψφ	0	-

Άσκηση 3

Θεωρούμε διακριτή πηγή με μνήμη, τεσσάρων καταστάσεων Α, Β, Γ και Δ, η οποία παριστάνεται με στατική αλυσίδα Markoff πρώτης τάξης. Ο πίνακας μετάβασης της πηγής είναι ο ακόλουθος:

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν τα εξής:

1) Οι πιθανότητες των καταστάσεων $\pi(A), \pi(B), \pi(\Gamma)$ και $\pi(\Delta)$.
2) Η τιμή του α για την οποία προκύπτει η μέγιστη εντροπία της πηγής.
3) Να προτείνετε βέλτιστο τρόπο κωδικοποίησης της πηγής, χωρίς να λάβετε υπόψη τη μνήμη της πηγής.
4) Λαμβάνοντας υπόψη τη μνήμη της πηγής και για $\alpha = 1/2$, να προτείνετε αποτελεσματικό τρόπο κωδικοποίησης.

Άσκηση 3 (συνέχεια)

Απάντηση:

1) Λαμβάνοντας υπόψη ότι η πηγή είναι στατική, καταστρώνουμε το σύστημα που απορρέει από τη σχέση $\pi P = \pi$. Είναι:

$$\pi[\pi(A)\ \pi(B)\ \pi(\Gamma)\ \pi(\Delta)]\begin{bmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a \\ a & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} = [\pi(\mathrm{A})\ \pi(\mathrm{B})\ \pi(\Gamma)\ \pi(\Delta)]$$

και εξ αυτής:

$$(1-\alpha)\pi(\mathrm{A}) + \alpha\pi(\Delta) = \pi(\mathrm{A}) \Rightarrow \pi(\mathrm{A}) = \pi(\Delta)$$

$$(1-\alpha)\pi(\mathrm{B}) + \alpha\pi(\mathrm{A}) = \pi(\mathrm{B}) \Rightarrow \pi(\mathrm{B}) = \pi(\mathrm{A})$$

$$(1-\alpha)\pi(\Gamma) + \alpha\pi(\mathrm{B}) = \pi(\Gamma) \Rightarrow \pi(\Gamma) = \pi(\mathrm{B})$$

$$(1-\alpha)\pi(\Delta) + \alpha\pi(\mathrm{A}) = \pi(\Delta) \Rightarrow \pi(\Delta) = \pi(\mathrm{A})$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων κατάστασης της πηγής είναι 1, βρίσκουμε ότι: $\pi(A) = \pi(B) = \pi(\Gamma) = \pi(\Delta) = 1/4$

Άσκηση 3 (συνέχεια)

2) Η εντροπία των συμβόλων που εκπέμπεται από όλες τις καταστάσεις της πηγής δίνεται από τη σχέση:

$$H(S) = -(1-\alpha)\log(1-a) - a\log a$$

Η εντροπία λαμβάνει τη μέγιστη τιμή για ισοπίθανα ενδεχόμενα, δηλαδή στην περίπτωσή μας για $(1-a) = a = 1/2$.

Επομένως, η μέγιστη εντροπία Markoff προκύπτει για $a = 1/2$.

Στην περίπτωση αυτή, η εντροπία της πηγής Markoff είναι ίση με 1 $bit\ /\ symbol$.

3) Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Huffman, λαμβάνουμε για τα 4 ισοπίθανα σύμβολα, Α, Β, Γ και Δ, τον κώδικα (00, 01, 10, 11).

Άσκηση 3 (συνέχεια)

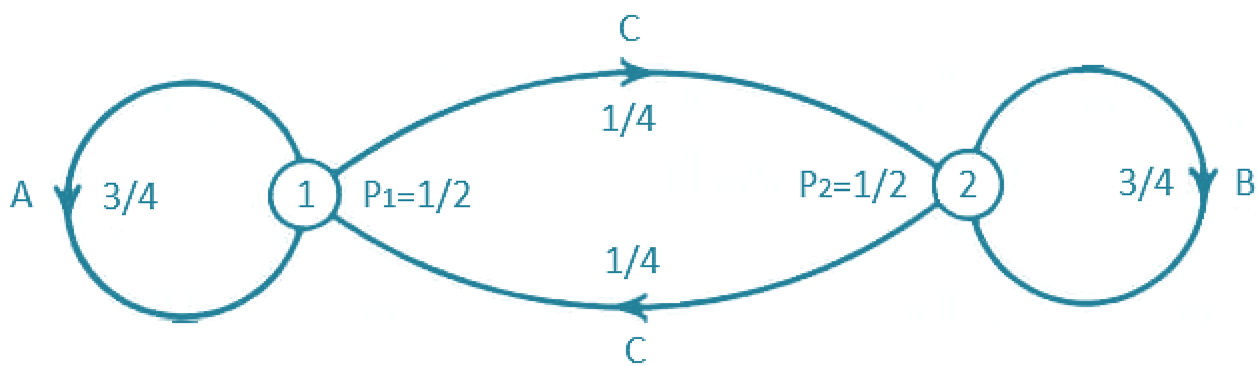
4) Αφού η πηγή είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα πρώτης τάξης, η μνήμη της πηγής έχει βάθος $l = 1$. Επομένως για την αποτελεσματική κωδικοποίησή της, αρκεί να λάβουμε υπόψη το σύμβολο που εκπέμφθηκε τελευταίο. Αυτό γίνεται και με την κωδικοποίηση μηνυμάτων της πηγής αποτελούμενων από δύο σύμβολα.

Προκύπτει ο ακόλουθος κώδικας (000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111) για τα μηνύματα ($m_1 =$ 'ΑΑ', $m_2 =$ 'ΑΒ', $m_3 =$ 'ΒΒ', $m_4 =$ 'ΒΓ', $m_5 =$ 'ΓΓ', $m_6 =$ 'ΓΔ', $m_7 =$ 'ΔΔ', $m_8 =$ 'ΔΑ'), με αντίστοιχες πιθανότητες (1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8).

Πιο αποτελεσματικός κώδικας μπορεί να προκύψει αν ορίσουμε διαφορετικό κώδικα για κάθε κατάσταση της πηγής. Επειδή από κάθε κατάσταση μπορούν να παραχθούν μόνο δύο σύμβολα, αρκεί η κωδικοποίηση καθενός από τα δύο αυτά σύμβολα με 1 bit, το '0' ή το '1', το οποίο οδηγεί σε μέσο μήκος κώδικα ίσο με 1 bit. Παρατηρούμε ότι η κωδικοποίηση αυτή οδηγεί σε αποδοτικότερο κώδικα, σε σύγκριση με τον προηγούμενο κώδικα μηνυμάτων της πηγής μήκους δύο συμβόλων.

Άσκηση 4

Μια διακριτή πηγή πληροφορίας εκπέμπει ένα από τα τρία σύμβολα A, B, και C και έχει για υπόδειγμα μια διακριτή διαδικασία Markoff της οποίας το γράφημα δίνεται στο σχήμα.

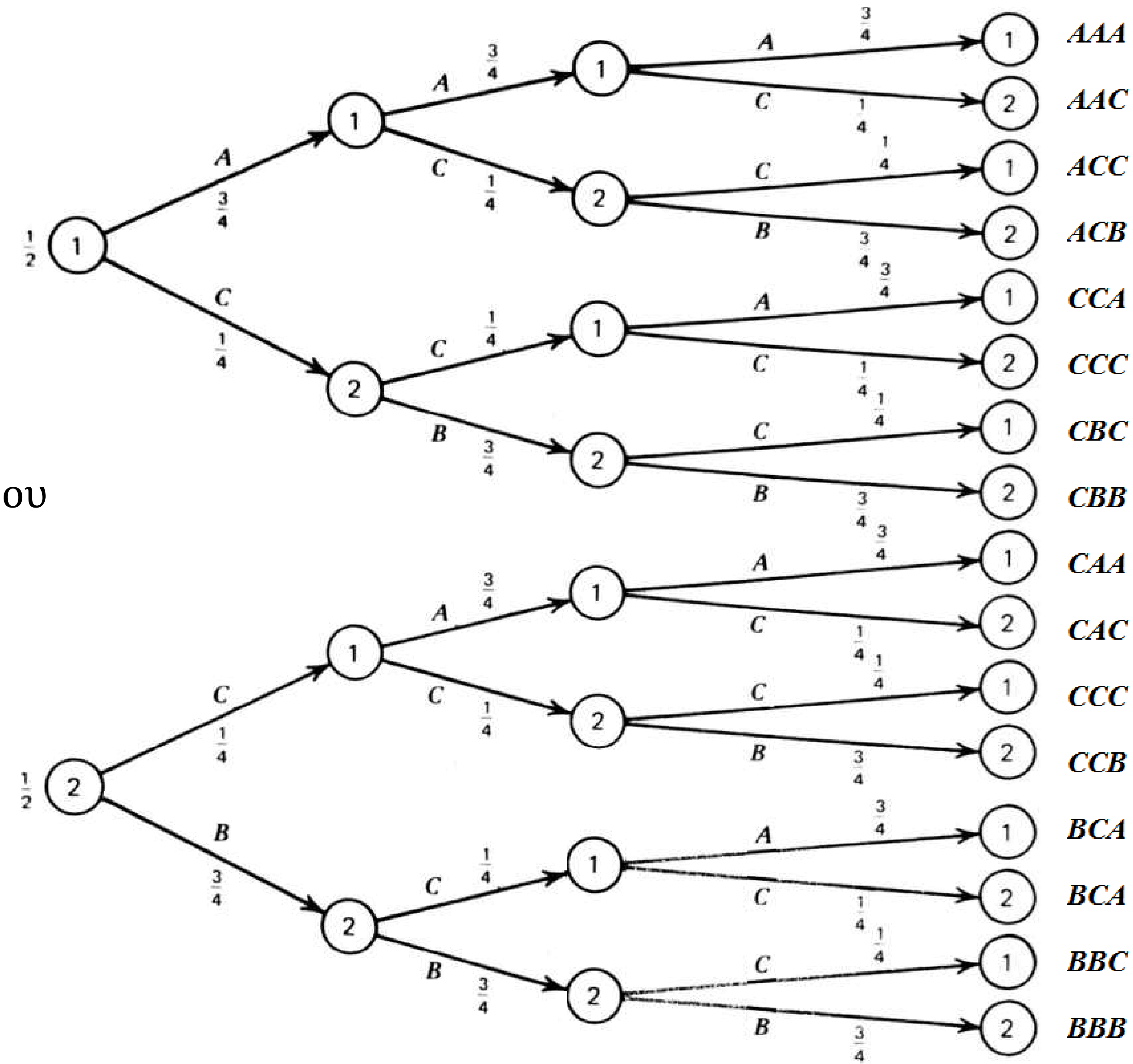


Να βρείτε:

1) Την εντροπία H της πηγής
2) Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενό κατά σύμβολο σε ένα μήνυμα που περιέχει ένα, δύο και τρία σύμβολα

<u>Απάντηση</u>: Το διάγραμμα δένδρου της εξόδου της πηγής φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

Άσκηση 4 (συνέχεια)



Το διάγραμμα δένδρου της εξόδου της πηγής

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Για να διευκρινίσουμε πώς γεννιούνται τα μηνύματα αυτά και οι πιθανότητές τους, ας θεωρήσουμε την ακολουθία CCC. Υπάρχουν δύο διαδρομές στο γράφημα που δίνουν την CCC και αντιστοιχούν στις ακολουθίες μεταπτώσεων καταστάσεων 1→2→1→2 και 2→1→2→1.

Η πιθανότητα της πρώτης δίνεται από το γινόμενο της πιθανότητας να βρίσκεται το σύστημα αρχικά στην κατάσταση 1 και των πιθανοτήτων των μεταπτώσεων 1→2, 2→1 και 1→2. Οι πιθανότητες αυτές είναι αντίστοιχα 1/2, 1/4, 1/4 και 1/4 και έτσι η πιθανότητα της διαδρομής αυτής είναι 1/128.

Ομοίως, υπολογίζεται ότι η πιθανότητα της δεύτερης διαδρομής είναι 1/128.

Έτσι η πιθανότητα της ακολουθίας CCC δίνεται από το άθροισμά τους, δηλαδή είναι 2/128.

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό υπολογίζουμε τον επόμενο πίνακα πιθανοτήτων των συμβόλων της πηγής για μηνύματα μήκους 1, 2 και 3 συμβόλων.

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Μηνύματα μήκους 1	Μηνύματα μήκους 2	Μηνύματα μήκους 3
A (3/8)	AA (9/32)	AAA (27/128)
B (3/8)	AC (3/32)	AAC (9/128)
C (1/4)	CB (3/32)	ACC (3/128)
	CC (2/32)	ACB (9/128)
	BB (9/32)	BBB (27/128)
	BC (3/32)	BBC (9/128)
	CA (3/32)	BCC (3/128)
		BCA (9/128)
		CCA (3/128)
		CCB (3/128)
		CCC (2/128)
		CCB (3/128)
		CAC (3/128)
		CBB (9/128)
		CAA (9/128)

Μηνύματα μήκους 1, 2 και 3 συμβόλων και οι πιθανότητές τους

Άσκηση 4 (συνέχεια)

Η **εντροπία των συμβόλων** που εκπέμπονται από την κατάσταση i είναι:

$$H(K_i) = -\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \log P_{ij} = -\left[\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\log\left(\frac{3}{4}\right)\right] = 0{,}8113 \quad bits/symbol$$

Η **εντροπία της πηγής** είναι ο μέσος όρος της εντροπίας των καταστάσεων, δηλ:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \, H(K_i) = \left[\frac{1}{2}0{,}8113 + \frac{1}{2}0{,}8113\right] = 0{,}8113 \quad bits/symbol$$

Άσκηση 4 (συνέχεια)

2) Ας υπολογίσουμε τώρα το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο κατά σύμβολο σε μηνύματα που περιέχουν δύο σύμβολα. Υπάρχουν επτά τέτοια δυνατά μηνύματα.

Τα πληροφορικά τους περιεχόμενα είναι $I(AA) = I(BB) = 1.83$, $\mathrm{I}(BC) = I(AC) = I(CB) = I(CA) = 3{,}4150$ και $I(CC) = 4.0\ bits$.

Το μέσο πληροφορικό περιεχόμενο των μηνυμάτων αυτών δίνεται από το άθροισμα των γινομένων του πληροφοριακού περιεχομένου το καθενός μηνύματος επί την αντίστοιχη πιθανότητα.

Βρίσκουμε το μέσο πληροφοριακό περιεχόμενο κατά σύμβολο, διαιρώντας με το πλήθος των συμβόλων που συγκροτούν το μήνυμα:

$$G_2 = 2{,}55598/2 = 1{,}2799 \quad bits/symbol$$

$$G_1 = 1{,}5612 \quad bits/symbol$$

$$G_2 = \ 3{,}2910/3 = 1{,}0970 \quad bits/symbol$$

Συνεχείς πηγές πληροφορίας

- Η **μέση ποσότητα πληροφορίας** $H(X)$, μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, log\, f(x)\, dx$$

- Η **συνδυασμένη ποσότητα πληροφορίας** $H(X,Y)$, των τυχαίων μεταβλητών X και Y ορίζεται από τον τύπο:

$$H(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) log\, f(x,y) dx\, dy$$

- Η **υπό συνθήκη ποσότητα πληροφορίας** $H(X|Y)$, των τυχαίων μεταβλητών X και Y ορίζεται από τον τύπο:

$$H(X|Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) log\, f(x|y) dx\, dy$$

- Η **αμοιβαία ποσότητα πληροφορίας** $I(X;Y)$, των τυχαίων μεταβλητών X και Y ορίζεται από τον τύπο:

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$