Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής τ.ε.
Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Ελλάδας

Θεωρία Πληροφορίας

Διάλεξη 11: Κωδικοποίηση καναλιού με συνελικτικούς κώδικες

Δρ. Μιχάλης Παρασκευάς
Επίκουρος Καθηγητής

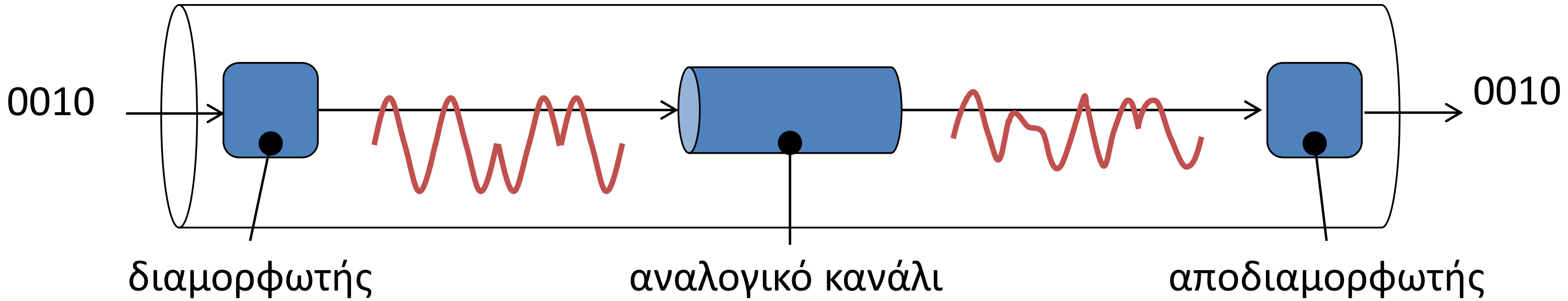
Ατζέντα

- Αποκωδικοποίηση χαλαρής απόφασης
- Σύγκριση μεταξύ αποκωδικοποίησης χαλαρής και αυστηρής απόφασης
- Το θεώρημα Χωρητικότητας καναλιού (Όριο Shannon)

Αποκωδικοποίηση Χαλαρής Απόφασης

Αποκωδικοποίηση Χαλαρής Απόφασης

- Στην αποκωδικοποίηση χαλαρής απόφασης κάνουμε χρήση όλης της πληροφορίας που υπάρχει στο κανάλι μας
- Στις ψηφιακές επικοινωνίες θεωρούμε τα κανάλια ψηφιακά
- Ωστόσο, στο φυσικό επίπεδο, όλα τα κανάλια είναι αναλογικά (συνεχή)
- Ψηφιακό κανάλι = διαμορφωτής + συνεχές κανάλι + αποδιαμορφωτής

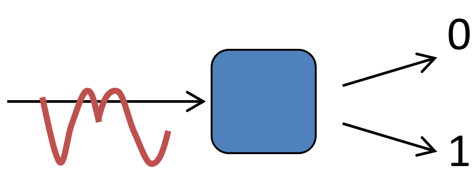


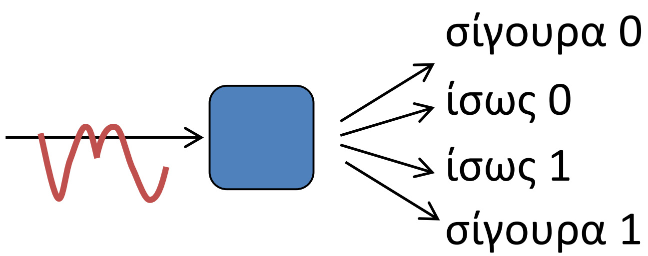
- Ένας απλός αποδιαμορφωτής μεταφράζει τις συνεχείς κυματομορφές σε 0 ή 1, με κάποια πιθανότητα λάθους

«Εξυπνότεροι» αποδιαμορφωτές

- Από την σκοπιά της διόρθωσης λαθών, μία κυματομορφή περιέχει περισσότερη πληροφορία από ότι η δυαδική έξοδος του αποδιαμορφωτή.

- Αποδιαμορφωτές με περισσότερες από 2 εξόδους μπορούν να βοηθήσουν τους αλγορίθμους διόρθωσης λαθών





- Για να χρησιμοποιήσουμε έναν αποδιαμορφωτή με περισσότερες από 2 εξόδους, ο αλγόριθμος αποδιαμόρφωσης θα πρέπει να μπορεί να χειριστεί πολλαπλές τιμές

Τυποποίηση της αποδιαμόρφωσης χαλαρής απόφασης

- Έξοδοι του αποδιαμορφωτή
  - 0^+ (σίγουρα 0), 0^- (ίσως 0), 1^- (ίσως 1), 1^+ (σίγουρα 1)
- Κώδικας $C = \{00000, 01011, 10101, 11110\}$

- Για λαμβανόμενη λέξη $0^-\ 0^+\ 1^+\ 0^-\ 1^-$, ποια κωδική λέξη ελαχιστοποιεί την ποινή, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα;

λαμβανόμενο	ποινή για "0"	ποινή για "1"
0^+	0	3
0^-	1	2
1^-	2	1
1^+	3	0

$\boldsymbol{r}$	0^-	0^+	1^+	0^-	1^-	
$\boldsymbol{c}_0 =$	0	0	0	0	0	
	1 +	0 +	3 +	1 +	2	= 7
$\boldsymbol{c}_2 =$	1	0	1	0	1	
	2 +	0 +	0 +	1 +	1	= 4

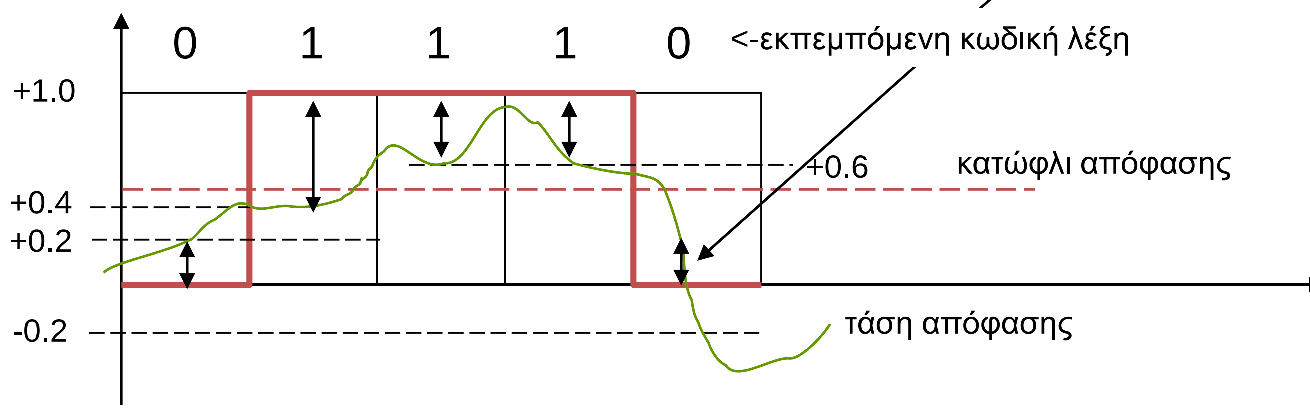
Αποδιαμόρφωση σκληρής vs. χαλαρής απόφασης

- Αποδιαμόρφωση σκληρής απόφασης
  - η έξοδος του αποδιαμορφωτή είναι δυαδική (0 ή 1)

- Αποδιαμόρφωση χαλαρής απόφασης
  - η έξοδος του αποδιαμορφωτή έχει τρείς και πάνω πιθανές τιμές
  - είναι περισσότερο αποδοτική, αλλά και περισσότερο πολύπλοκη

Αποδιαμόρφωση σκληρής vs. χαλαρής απόφασης

- Αποδιαμόρφωση σκληρής απόφασης
  - κάθε λαμβανόμενη κωδική λέξη συγκρίνεται με όλες τις λέξεις του κώδικα, και η κωδική λέξη με την μικρότερη **απόσταση Hamming** επιλέγεται
- Αποδιαμόρφωση χαλαρής απόφασης
  - η αξιοπιστία της απόφασης εκτιμάται από την αναλογική τάση του αποδιαμορφωτή χρησιμοποιώντας την **Ευκλείδεια απόσταση**
  - τέλος, η κωδική λέξη με την μικρότερη απόσταση επιλέγεται



Σκληρή απόφαση-> 0 0 1 1 0 Απόσταση Hamming = 1

Χαλαρή απόφαση-> $0.2^2 + 0.6^2 + 0.4^2 + 0.4^2 + 0.2^2 = 0.76$ Ευκλείδεια απόσταση = 0.76

Αποδιαμόρφωση σκληρής vs. χαλαρής απόφασης

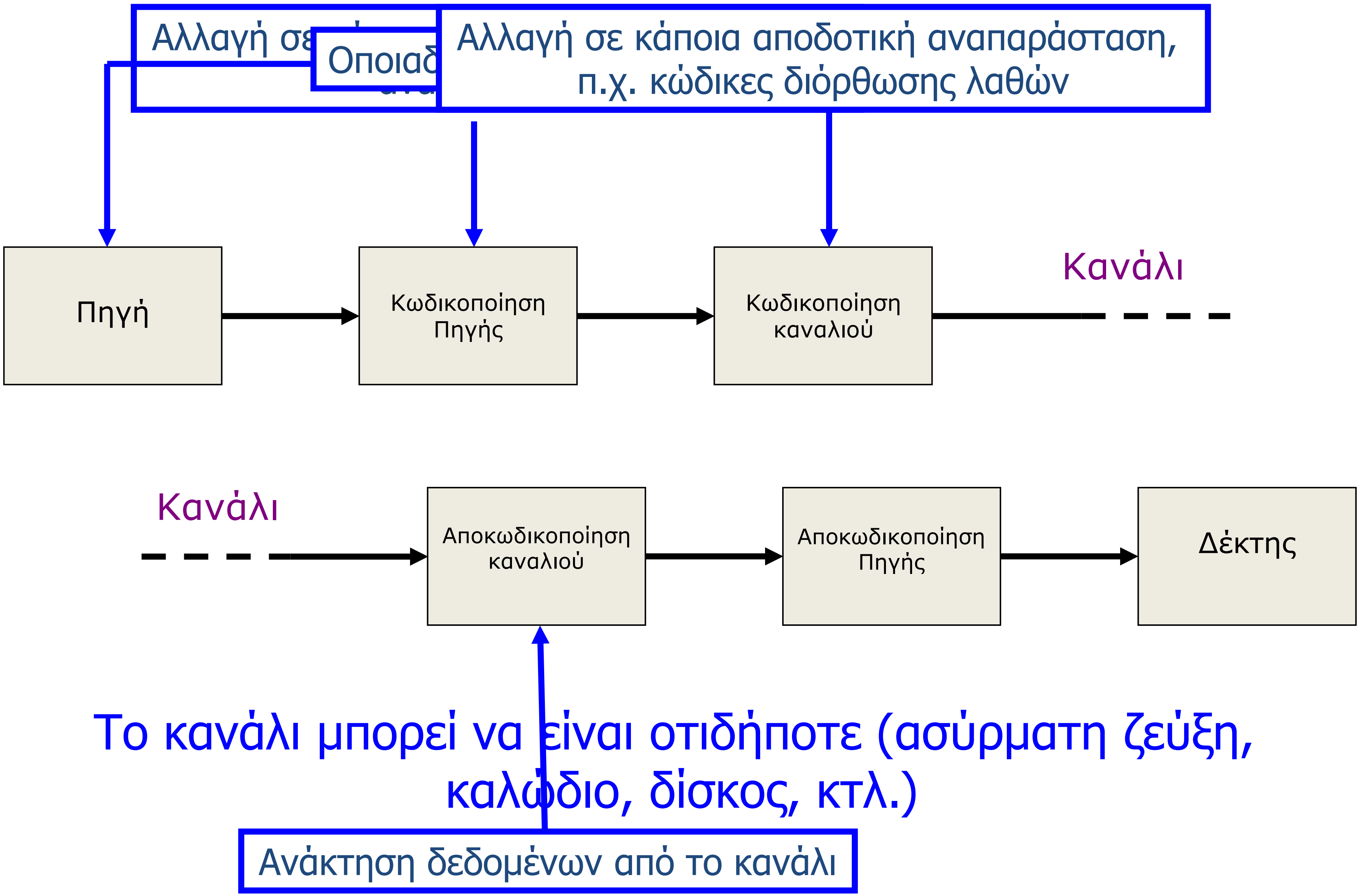
- Η αποδιαμόρφωση χαλαρής απόφασης προσφέρει περίπου 2 dB βελτίωση όταν συγκρίνεται με την αντίστοιχη σκληρής απόφασης (απαιτείται υψηλό SNR)

- Συχνά η αποδιαμόρφωση χαλαρής υλοποιείται με αποκωδικοποιητές Viterbi

- Η υπολογιστική πολυπλοκότητα της χαλαρής απόφασης μπορεί να εξισορροπηθεί με χρήση συνελικτικών κωδίκων

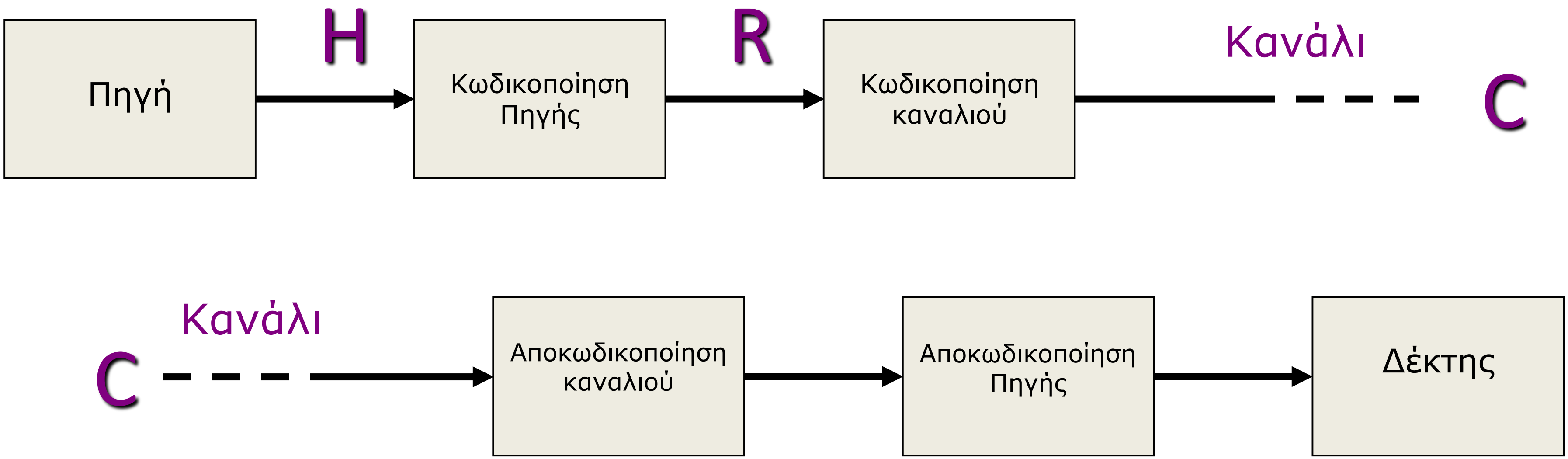
Το θεώρημα χωρητικότητας καναλιού του Shannon

Βασικά Θεωρήματα



Το κανάλι μπορεί να είναι οτιδήποτε (ασύρματη ζεύξη, καλώδιο, δίσκος, κτλ.)

Βασικά Θεωρήματα

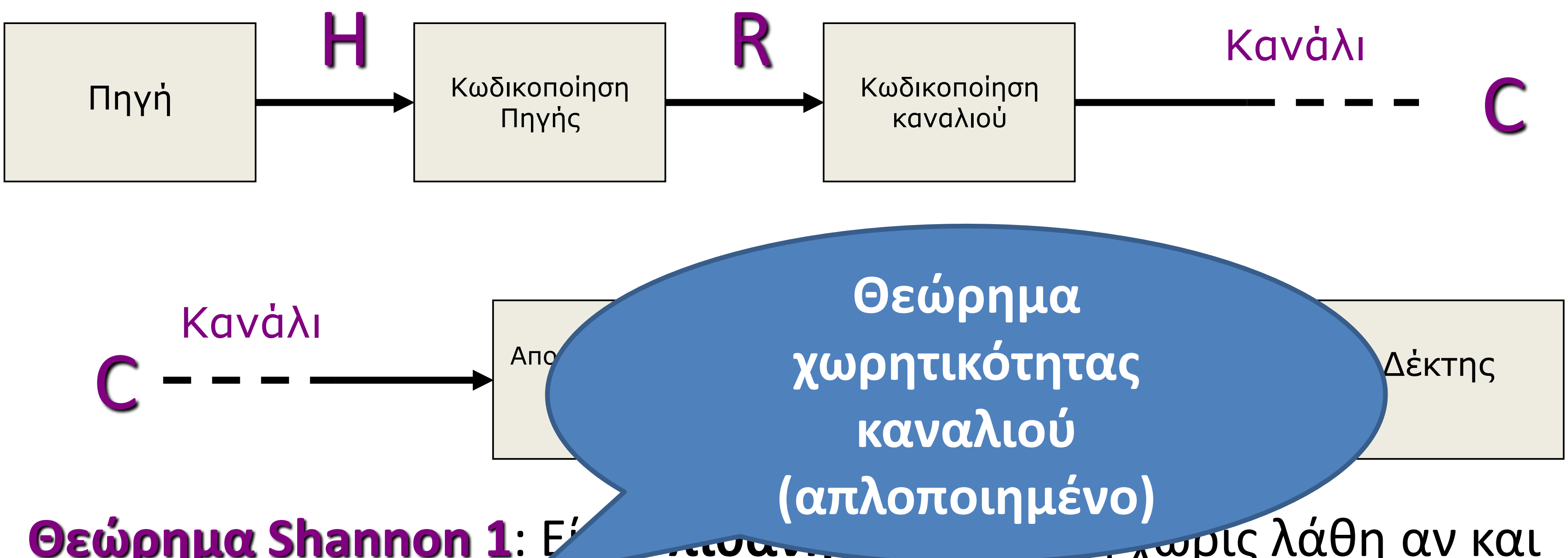


H: Η πληροφορία πηγής

R: Η πληροφορία μετά την κωδικοποίηση πηγής

C: Η χωρητικότητα του καναλιού

Βασικά Θεωρήματα



Θεώρημα Shannon 1: Εί[illegible] χωρίς λάθη αν και μόνο αν R ≥ H and C ≥ R.

Θεώρημα Shannon 2: Η κωδικοποίηση πηγής και η κωδικοποίηση καναλιού μπορούν αν βελτιστοποιηθούν *ανεξάρτητα*, και τα *δυαδικά σύμβολα* μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ενδιάμεσο μέσο αναπαράστασης.

Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού (Θεώρημα Shannon)

- Η χωρητικότητα C ενός καναλιού εύρους ζώνης B Hertz, το οποίο διαταράσσεται από θόρυβο N, δίδεται από τη σχέση

$$C = Blog_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \text{ bits/sec ή } C = Blog_2\left(1+\frac{\mathrm{S}}{N_0\,\mathrm{B}}\right), \text{ όπου}$$

  - S η μέση λαμβανόμενη ποσότητα ισχύος (Watt) στο εύρος ζώνης Β
  - N ο μέσος λευκός θόρυβος γκαουσιανής κατανομής σε εύρος ζώνης Β (Watt)
  - ο λόγος $\frac{S}{N}$ καλείται και σηματοθορυβικός λόγος (SNR)
  - N_0 η φασματική πυκνότητα ισχύος θορύβου

- Το θεώρημα χωρητικότητας καναλιού είναι από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της θεωρίας πληροφοριών
  - μίας απλή σχέση παρουσιάζει την αλληλεπίδραση μεταξύ των τριών παραμέτρων του συστήματος: του εύρους ζώνης του καναλιού, της μέσης εκπεμπόμενης ισχύος (ή, ισοδύναμα, της μέσης λαμβανόμενης ισχύος σήματος) και της φαματικής πυκνότητας του θορύβου στην έξοδο του καναλιού

- **Το θεώρημα δηλώνει ότι για μία δεδομένη μέση εκπεμπόμενη ισχύ σήματος S και εύρος ζώνης B, μπορούμε να μεταδίδουμε πληροφορία με ρυθμό C bits/s με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος εφόσον χρησιμοποιήσουμε επαρκώς πολύπλοκες μεθόδους κωδικοποίησης**

- **Δεν είναι δυνατή η μετάδοση σε ρυθμό υψηλότερο του C bits/s με τη χρήση οποιουδήποτε συστήματος κωδικοποίησης που θα μπορούσε να εφευρεθεί χωρίς την ύπαρξη κάποιας ορισμένης πιθανότητας σφάλματος**
  - το θεώρηρα χωρητικότητας καναλιού ορίζει το θεμελιώδες όριο της μετάδοσης χωρίς σφάλματα για ένα γκαουσιανό κανάλι οριοθετημένης ισχύος και οριοθετημενού εύρους ζώνης.

Ιδανικό Σύστημα

- Ορίζουμε ως ιδανικό σύστημα ένα σύστημα το οποίο μεταδίδει δεδομένα με ρυθμό R_b ίσο με τη χωρητικότητα C του καναλιού
- Η μέση εκπεμπόμενη ισχύς μπορεί λοιπόν να εκφρασθεί ως: $S = E_b C$, όπου E_b είναι η εκπεμπόμενη ισχύς/bit
- Συνεπώς η προηγούμενη σχέση γράφεται

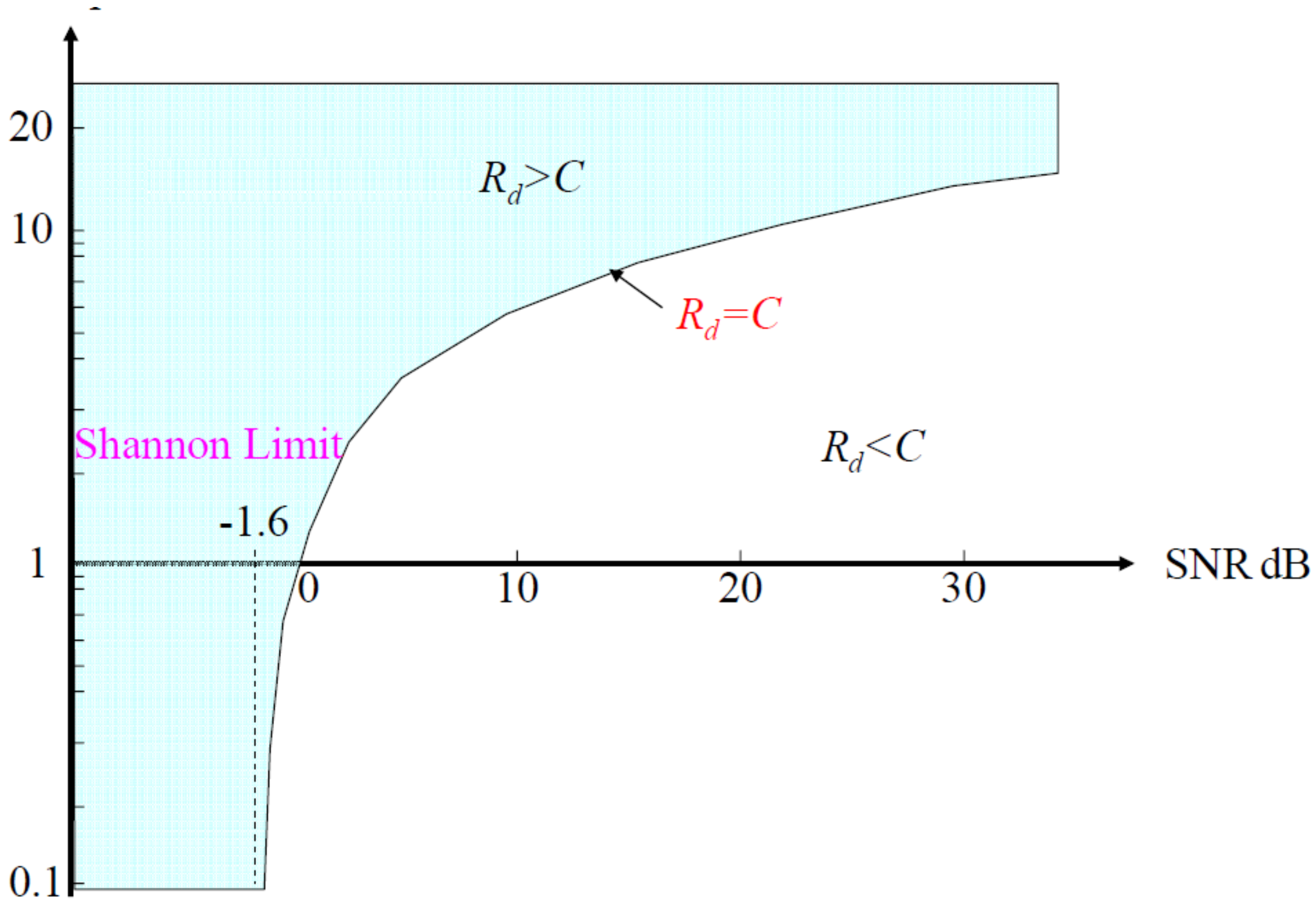
$$\frac{\mathrm{C}}{B} = log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)$$

- Ισοδύναμα, ορίζουμε τον λόγο την ενέργειας bit / φασματική πυκνότητα ισχύος θορύβου

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\frac{\mathrm{C}}{B}} - 1}{\frac{C}{B}}$$

- Η εξίσωση αυτή παρουσιάζεται συνήθως ως μία καμπύλη η οποία ονομάζεται **όριο της χωρητικότητας**.

Γραφική αναπαράσταση του θεωρήματος Shannon



Θεώρημα Shannon - Βασικά Στοιχεία

- Για την απόδοση ισχύος του συστήματος χρησιμοποιείται συνήθως ο λόγος $\frac{E_b}{N_0}$ που αντιπροσωπεύει τη μέση λαμβανόμενη ενέργεια ανά bit στο δέκτη προς την πυκνότητα ισχύος θορύβου.

- Όσο μικρότερος είναι, τόσο λιγότερη ενέργεια απαιτείται να μεταφερθεί από το κάθε bit (αντίστοιχα και από κάθε σύμβολο) ώστε αυτό να ανιχνευθεί με δεδομένη πιθανότητα σφάλματος παρουσία μιας δεδομένης ποσότητας θορύβου.

- Η χρήση του λόγου $\frac{E_b}{N_0}$ για την παράσταση της απόδοσης ισχύος ενός συστήματος προτιμάται συνήθως έναντι του λόγου $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}$ επειδή είναι κανονικοποιημένος, με την έννοια ότι είναι ανεξάρτητος του εύρους ζώνης. Αντίθετα, πιθανή χρήση του λόγου $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}$ επιβάλλει την αναφορά στο χρησιμοποιούμενο εύρος ζώνης.

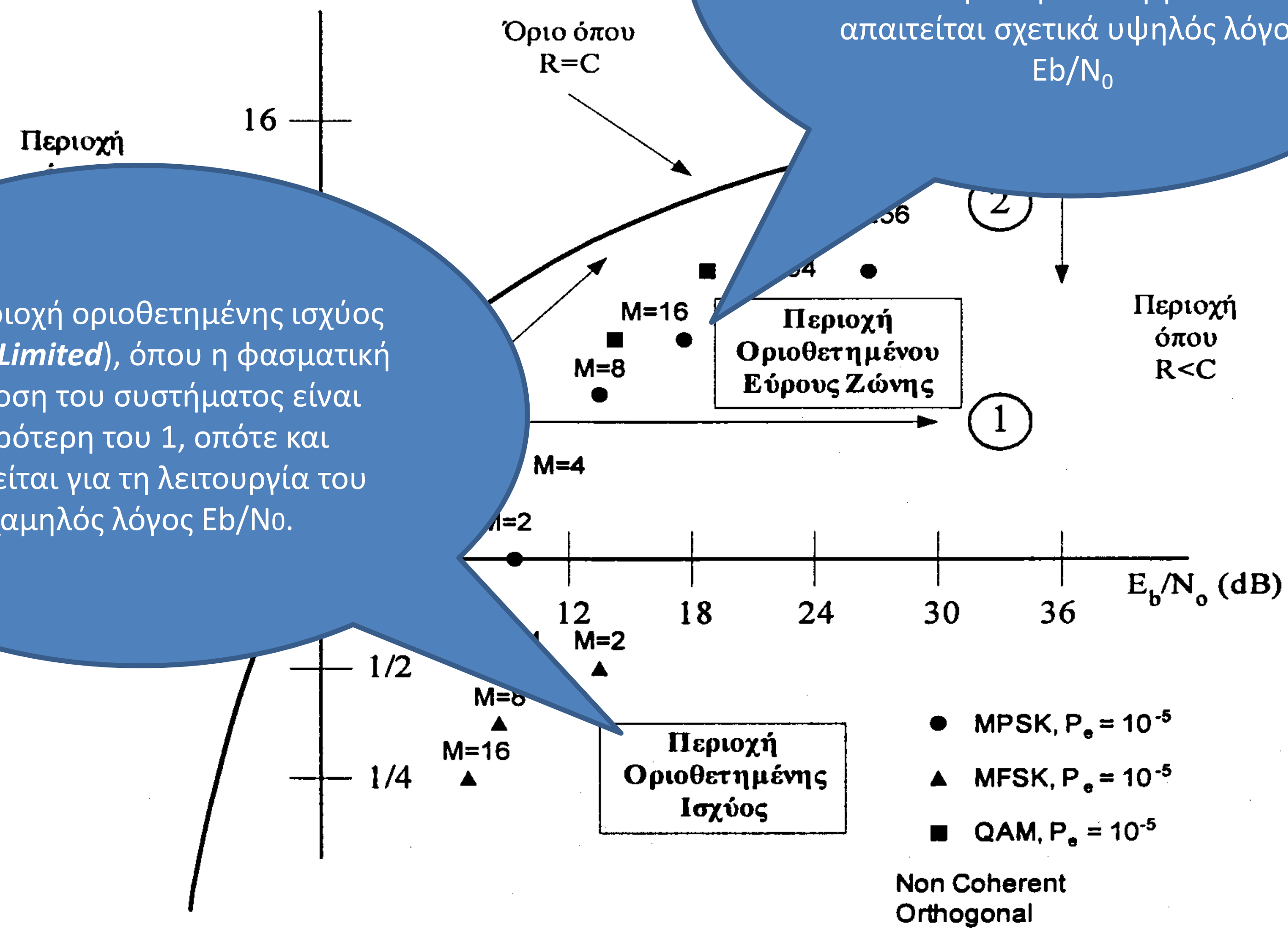
Θεώρημα Shannon - Βασικά Στοιχεία

- Οι διάφορες διαμορφώσεις αξιολογούνται κατ' αρχήν με βάση το «καθαρό» κριτήριο $\frac{E_b}{N_0}$ και κατατάσσονται ανάλογα στο διάγραμμα του Shannon. Η διαφοροποίηση αυτή, όμως, αφορά κυρίως τη δομή του διαγράμματος αστερισμού δηλαδή την αρχιτεκτονική της διαμόρφωσης.

- Η δομή αυτή καθορίζει την (σχετική) ευαισθησία της διαμόρφωσης ως προς την πιθανότητα σύγχυσης μεταξύ γειτονικών σημείων και κατ' επέκταση την ευαισθησία της σε σφάλματα.

Θεώρημα Shann
Βασικά Στοι

υποπεριοχή οριοθετημένου εύρους ζώνης ***(Bandwidth Limited)***, όπου η φασματική απόδοση ενός συστήματος είναι μεγαλύτερη του 1 αλλά για τη λειτουργία του απαιτείται σχετικά υψηλός λόγος E_b/N_0



υποπεριοχή οριοθετημένης ισχύος (***Power Limited***), όπου η φασματική απόδοση του συστήματος είναι μικρότερη του 1, οπότε και απαιτείται για τη λειτουργία του χαμηλός λόγος E_b/N_0.